

ERRORES EN LA TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN DOMINÓ ALGEBRAICO¹

Susana Rodríguez-Domingo, Marta Molina,
María C. Cañadas y Encarnación Castro
Universidad de Granada

Este trabajo se enmarca dentro de una investigación más amplia cuyo principal objetivo es indagar sobre la capacidad de los estudiantes de educación secundaria para traducir y relacionar enunciados algebraicos presentados en los sistemas de representación simbólico y verbal. La recogida de datos se realizó con 26 estudiantes de 4º de ESO a los que se propuso la construcción de un dominó algebraico, diseñado para esta investigación, y su posterior uso en un torneo. En este artículo presentamos un análisis de los errores cometidos en dichas traducciones. Entre los resultados obtenidos, destacamos que los estudiantes encontraron mayor facilidad al traducir enunciados de su representación simbólica a su representación verbal y que la mayoría de los errores cometidos al traducir de la expresión verbal a la simbólica son derivados de las características propias del lenguaje algebraico.

Palabras clave: enunciados algebraicos, errores, juego, representación simbólica, representación verbal, traducción entre sistemas de representación.

Abstract: *We present a research study whose main objective is to inquire into secondary school students' ability to translate and relate algebraic statements which are presented in the symbolic and verbal representation systems. Data collection was performed with 26 4th grade students to whom we proposed the construction of an algebraic domino, designed for this research, and its subsequent use in a tournament. Here we present an analysis of the errors made in translations. Among the obtained results, we note that the students found it easier to translate statements from the symbolic to the verbal representation and that most errors in*

¹ Esta investigación ha sido realizada en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada, y en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

translating from verbal to symbolic expressions where derived of the particular characteristics of algebraic language.

Keywords: *algebraic statements, errors, game, symbolic representation, translation between representation systems, verbal representation.*

INTRODUCCIÓN

En el segundo ciclo de educación secundaria se observa que, en el estudio del lenguaje algebraico, los estudiantes siguen teniendo dificultades para relacionar el lenguaje verbal y el simbólico. Esto dificulta, entre otros aspectos, la resolución de problemas que requieren del uso del lenguaje algebraico. Conocer los errores en los que incurren los estudiantes al traducir enunciados entre los sistemas de representación verbal y simbólico, puede ayudar en el estudio de la adquisición del simbolismo algebraico y de la resolución de este tipo de problemas.

Las dificultades que evidencian los estudiantes en el aprendizaje del álgebra y la destacada presencia de contenidos algebraicos en el currículo de educación secundaria, a nivel internacional, hacen que este campo sea de gran interés para la investigación en Educación Matemática. Investigadores como Arcavi (1994), Bednarz, Kieran y Lee (1996) o Kaput (2000) han planteado la problemática existente en la adquisición de dominio y comprensión del lenguaje algebraico. Estudios centrados en la categorización de los errores en los que incurre el alumnado en el estudio del álgebra, como los de Socas (1997), Palarea (1998) o Ruano, Socas y Palarea (2008) dejan abiertos algunos aspectos por estudiar. Así mismo, observamos que si bien algunos trabajos exploran el papel de la escritura verbal en el aprendizaje del álgebra (MacGregor, 1990; Wollman, 1983), existen escasos estudios sobre la traducción de enunciados entre los sistemas de representación verbal y simbólica. El análisis de los procesos de traducción en los dos sentidos pueden ser de utilidad para: (a) profundizar en la comprensión que poseen de los estudiantes del lenguaje simbólico e (b) indagar sobre las dificultades que tienen para escribir simbólicamente aquello que pueden encontrar enunciado de forma verbal.

OBJETIVOS

El objetivo general que nos planteamos con el trabajo de Rodríguez-Domingo (2011), del cual se presenta aquí parte, es *analizar el proceso de traducción que realizan estudiantes de educación secundaria entre los sistemas de representación verbal y simbólico, de enunciados generales de relaciones numéricas*. Este objetivo se concreta en tres objetivos específicos: (a) construir un instrumento que permita explorar el

proceso de traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal, al no haberse encontrado en la literatura consultada; (b) analizar y clasificar los errores en los que incurren los estudiantes al realizar dichas traducciones; y (c) describir las relaciones que los estudiantes ponen de manifiesto entre representaciones verbales y simbólicas de un mismo enunciado algebraico, así como las explicaciones que dan a las mismas. En este artículo nos centramos en los dos primeros objetivos mencionados.

MARCO TEÓRICO

Tres elementos teóricos son claves en esta investigación: (a) álgebra, (b) sistemas de representación y (c) errores y dificultades en el álgebra. Las relaciones entre estos elementos así como su consideración en el contexto del juego fundamentan este trabajo. En la Figura 1 representamos un esquema que refleja estos elementos.

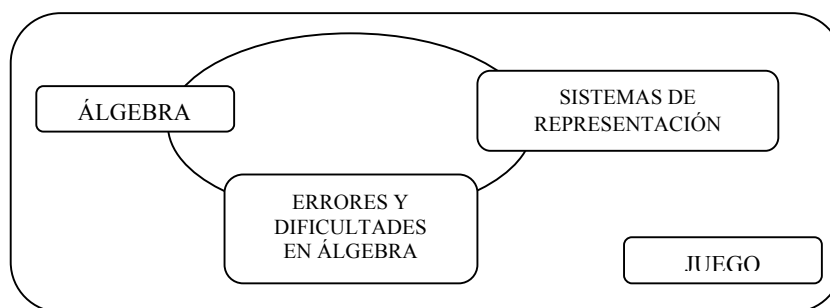


Figura 1. Esquema del marco teórico

Una breve revisión bibliográfica en torno a la concepción del álgebra nos ha permitido percibir la evolución de la misma a lo largo del tiempo, su conexión con la generalización (Bednarz et al. 1996; Kaput, 2000), su consideración como lenguaje y su destacada utilidad para la resolución de problemas (Fernández, 2001; Kieran y Filloy, 1989). En este contexto nos centramos en *enunciados que establecen relaciones generales entre cantidades, algunas de ellas desconocidas*, a los que denominados *enunciados algebraicos*.

Para la profundización sobre las nociones de representación y sistemas de representación nos hemos centrado principalmente en los trabajos realizados en el seno del Grupo “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” (FQM-193). Prestamos atención a las representaciones externas, pues son las que se pueden observar en el trabajo de los estudiantes. Consideramos que un sistema de representación es el conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permite representar una estructura matemática y que sigue cierta sistematización (Castro y Castro, 1997; Rico, 1997).

En lo que concierne a los errores y las dificultades de los estudiantes en el estudio del álgebra, partimos de la idea de que los errores provienen de esquemas cognitivos inapropiados (Matz, 1980; Socas, 1997). Pese a que todos incurrimos en errores, éstos suelen tener connotaciones negativas en la escuela, y parece ser que más en matemáticas. Rico (1995) reivindica que el error es una posibilidad permanente para la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos. Algunos estudios como los de Wollman (1983) o Clement, Lochhead y Monk (1981) determinan fuentes de error en la traducción de enunciados algebraicos verbales en su representación simbólica. En un trabajos más reciente, Ruano et al. (2008) estudian procesos específicos en los que se hace uso del lenguaje algebraico (sustitución formal, generalización y modelización), identificando los tipos de errores en los que incurren los estudiantes. Los autores identifican algunos errores recurrentes relacionados con la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión de la multiplicación y la potencia. Socas (1997) determina tres grandes categorías para los errores según su origen: (a) en un obstáculo, (b) en ausencia de sentido, (c) en actitudes afectivas y emocionales. Esta clasificación ha sido clave para elaborar la clasificación de errores a utilizar en este trabajo, la cual está adaptada a los resultados obtenidos.

Por último, el juego es el contexto en el que se lleva a cabo nuestra investigación. En la revisión de la literatura realizada, hemos observado que un material presentado en forma de juego fomenta el aprendizaje y la motivación entre el alumnado. Algunos autores establecen que el juego se manifiesta como una forma natural de la actividad humana (Castro, Olmo y Castro, 2002; De Guzmán, 1984). Los principios pedagógicos de Moyles (1990) establecen que: (a) el juego no es la antítesis de trabajo, pues ambos forman parte de las actividades de los individuos en la vida y (b) el juego es potencialmente un excelente medio de aprendizaje. El juego cobra especial relevancia en esta investigación porque los estudiantes participantes tienen una falta de motivación considerable para trabajar y aprender.

MARCO METODOLÓGICO

Teniendo en cuenta el objetivo general de este trabajo, se seleccionó una muestra intencional de 26 estudiantes de 4º de ESO matriculados en matemáticas opción A, en tres grupos diferentes a los que la primera autora impartía clase durante el curso académico 2010-2011. El nivel socio-cultural y académico de estos sujetos era bajo, el

lugar donde se encuentra el centro educativo es conflictivo y los estudiantes tenían poco interés tanto por ir a clase como por estudiar. En cuanto a la situación académica de los 26 estudiantes, 6 estaban repitiendo 4º curso y de los 20 restantes, la mayoría tenían aún la asignatura de matemáticas de cursos anteriores sin aprobar. Antes de la aplicación del instrumento de recogida de datos, estos estudiantes ya habían trabajado en clase el bloque de aritmética y parte del bloque de álgebra, en concreto el tema de enunciados algebraicos y de ecuaciones e inecuaciones.

Instrumento de recogida de datos

Las características del alumnado hicieron necesario utilizar un instrumento de recogida de datos que despertase su interés, por lo que planteamos un instrumento en forma de juego: el dominó, con el que los estudiantes están bastante familiarizados.

La profesora de los estudiantes (primera autora de este trabajo) aplicó el instrumento en dos fases: (a) Construcción del dominó: fase individual donde los estudiantes tenían que traducir por escrito algunos enunciados entre los sistemas de representación verbal y simbólico, y (b) Torneo: fase realizada en grupos en la que se pretendía observar las relaciones que establecían los estudiantes al emparejar distintas representaciones de un mismo enunciado algebraico. Esta segunda fase tiene las características de una entrevista clínica no estructurada donde a los estudiantes se les planteó una situación y se les dejó actuar bajo unas reglas establecidas, interviniendo únicamente si alguna regla era incumplida o se requería la repetición de alguna idea. En este artículo nos centramos en la primera fase, que detallaremos más adelante.

Construcción de la primera fase del instrumento de recogida de datos

En la primera fase nuestro interés se centra en analizar los errores en los que incurren los estudiantes al traducir enunciados entre los sistemas de representación verbal y simbólico². Para el diseño de esta fase, en primer lugar, revisamos el libro de texto utilizado en la clase de los estudiantes y el trabajo previo que habían realizado. Esto permitió determinar las relaciones numéricas que habían manejado estos sujetos: la suma y resta de números, la multiplicidad y divisibilidad, potencias, raíces cuadradas, números consecutivos, pares e impares. Decidimos diseñar 12 enunciados que los

² En Rodríguez-Domingo (2011) puede consultarse la recogida de datos y resultados de la segunda fase del estudio.

estudiantes tenían que traducir de un sistema de representación a otro. Para que hubiera un equilibrio, 6 eran verbales y los otros 6 eran simbólicos.

Las relaciones numéricas son la primera variable de tarea considerada. Teniendo en cuenta las posibles combinaciones de las relaciones numéricas identificadas, de los 6 enunciados, decidimos que uno fuese solo aditivo, otro solo multiplicativo, otro solo de potencia, y los otros tres de las posibles combinaciones de los mismos (ver Tabla 1).

	Aditivo	Multiplicativo	Potencia
Aditivo	×	×	×
Multiplicativo		×	×
Potencia			×

Tabla 1. Relaciones entre los enunciados

Respecto al resto de las variables de tarea consideradas, decidimos trabajar sólo con números naturales, que la mitad de los enunciados fuesen abiertos y la otra mitad cerrados³, que la mitad tuvieran solo una variable y la otra mitad dos variables, y que la mitad de los enunciados verbales fuesen secuenciales y la otra mitad no. En la Tabla 2 presentamos los doce finalmente enunciados propuestos. En la primera columna se incluyen los enunciados que fueron presentados verbalmente a los estudiantes para su traducción al lenguaje algebraico, y en la segunda columna los enunciados propuestos en representación simbólica para traducirlos a su representación verbal.

Representación verbal	Representación simbólica
Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	$x + (x + 1) - 4$
El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número	$(\sqrt{x})^y$
Un número par menos la cuarta parte de otro número	$x \cdot (x + 1) = 7x$
El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	$x^2 - y^2 = 11$
Un número, por ese número al cuadrado, es igual al mismo número al cubo	$(x \cdot y)^3$

Tabla 2. Enunciados para traducir en la primera fase

³ Entendemos por “enunciado cerrado” aquel que establece una igualdad entre enunciados, es decir, que equivale a una ecuación.

A partir de estos enunciados configuramos la tarea propuesta a los estudiantes que fue presentada en una hoja en formato A3. En dicha hoja había unas fichas de dominó incompletas simulando una partida ya jugada, de modo que los estudiantes tenían que ir rellenando los huecos que aparecían para que fuera correcto el emparejamiento de fichas hecho (ver Figura 2).

Como se puede observar en la Figura 2, hay fichas donde en un extremo hay un enunciado verbal y la ficha junto a ella está en blanco. Para que estas fichas puedan emparejarse, en la parte en blanco debe estar la representación simbólica correspondiente al enunciado dado. El procedimiento es análogo con todas las fichas.

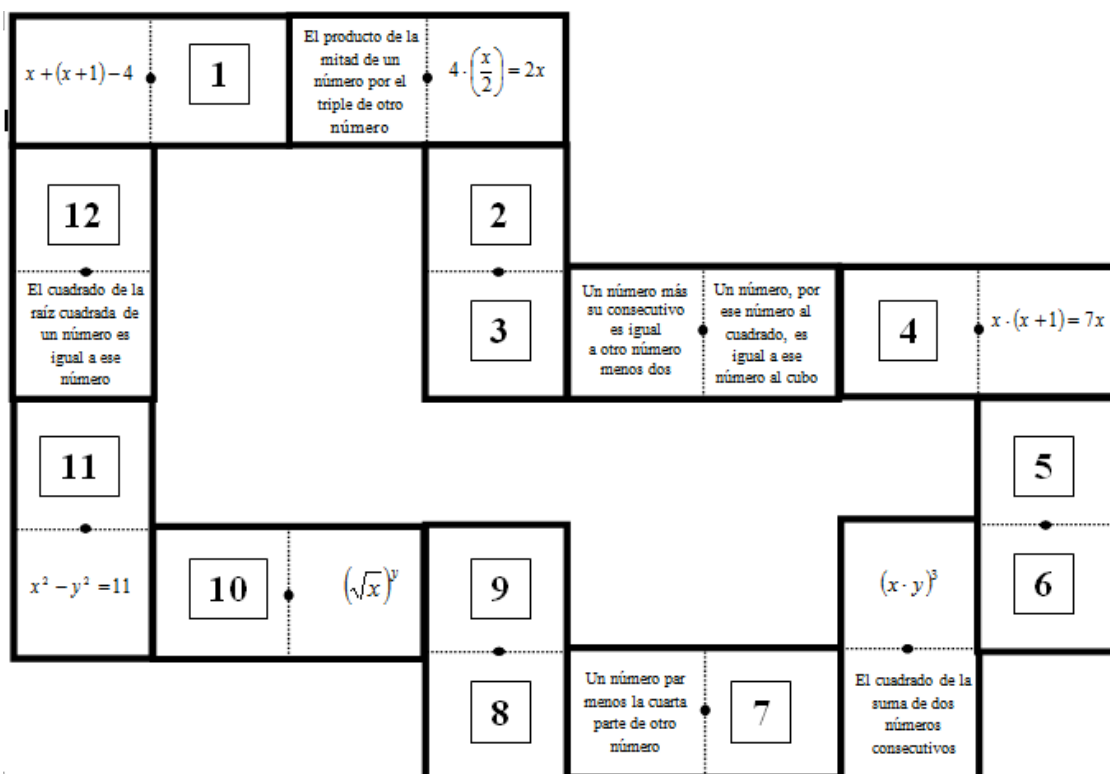


Figura 2. Documento para la primera fase de la recogida de información

Aplicación primera fase

Pedimos a los estudiantes que anotasen el nombre en su hoja de trabajo y que completaran el dominó de forma individual. Informamos a los estudiantes de la forma en que debían rellenar las partes en blanco y de la ausencia de fichas dobles o fichas en blanco (cómo ocurre en el dominó clásico).

ANÁLISIS DE DATOS

En el análisis de datos de la primera fase se atendió al tipo de traducción (de simbólico a verbal o viceversa) que los estudiantes realizaron en cada caso, al tipo de error en que

incurrieron, la frecuencia con que se cometió cada error y el enunciado en el que se produjo.

En primer lugar hicimos un recuento, para cada estudiante, de los enunciados que eran correctos, cuáles habían dejado en blanco, si alguno era dudoso y cuáles eran erróneos. En la Tabla 3 incluimos estos últimos.

De Simbólica a Verbal	Nº Errores	De Verbal a Simbólica	Nº Errores
Enunciado 2	1	Enunciado 1	13
Enunciado 5	4	Enunciado 3	7
Enunciado 6	2	Enunciado 4	1
Enunciado 9	4	Enunciado 7	8
Enunciado 10	2	Enunciado 8	14
Enunciado 12	2	Enunciado 11	0
Total	15	Total	43

Tabla 3. Número de errores en la traducción de enunciados

Para determinar el tipo de error, utilizamos la categorización presentada en la Tabla 4, que surge de categorías consideradas en estudios previos sobre errores, adaptándolas a nuestra investigación y a las respuestas dadas por los estudiantes.

Categoría	Subcategoría o tipo	Código
I. Según la completitud del enunciado	Incompletos	I.1
	Desmedidos	I.2
II. Derivados de la aritmética	Paréntesis	II.1
	Fracción - Producto	II.2
	Potenciación – Producto	II.3
	Suma – Producto	II.4
	Fracción - Potenciación	II.5
III. Derivados de las características propias del lenguaje algebraico	Generalización	III.1
	Particularización	III.2
	Variables	III.3
	Complicación estructural	III.4

Tabla 4. Clasificación de errores

En esta categorización, distinguimos tres grandes grupos de errores: (a) según la completitud del enunciado, (b) derivados de la aritmética y (c) derivados de las características propias del lenguaje algebraico. La primera hace referencia a errores que tienen que ver con enunciados en los que falta o sobra algún símbolo o palabra para que la expresión, ya sea simbólica o verbal, pueda ser considerada correcta. Si falta, se corresponden con la subcategoría de “incompletos” (I.1) y, si sobra, con la subcategoría “desmedidos” (I.2).

En los errores *derivados de la aritmética* consideramos aquellos que provienen de la incorrecta interpretación de los símbolos, operaciones o relaciones entre ellos.

Distinguimos cinco subcategorías. La subcategoría “paréntesis” (II.1) corresponde a errores debidos a la mala posición de un paréntesis o a la falta del mismo y que hacen que la expresión algebraica no sea correcta. Las demás subcategorías se refieren a errores en los que las operaciones referidas en el nombre de la subcategoría no son correctamente interpretadas. Por ejemplo, si se requiere representar verbalmente el enunciado dado por $(\sqrt{x})^y$, y los sujetos lo enuncian como “la raíz cuadrada de un número por otro número distinto”, entendemos que ha cometido un error en la interpretación de la potencia, al haber expresado en su lugar un producto (II.3).

Consideramos errores dentro de la categoría III aquellos que *derivan de las características propias del lenguaje algebraico* usado al interpretar los enunciados verbales o simbólicos, entendiendo como tales aquellos errores que son propios del uso del simbolismo algebraico. En esta categoría diferenciamos otros tipos de errores:

a) Errores en los que se generaliza un elemento o parte del enunciado que es un caso concreto. Por ejemplo, en vez de especificar que en la expresión simbólica $x + (x + 1) - 4$ “se resta el número cuatro”, expresa “se resta un número par” (III.1).

b) Errores debidos a la particularización de números o relaciones concretas de una expresión general (III.2). Por ejemplo, cuando se les pide que traduzcan simbólicamente el enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” y lo expresan particularizando el número “par” a un número concreto, por ejemplo $2 - \frac{x}{4}$.

c) Errores *de variable*⁴ (III.3) cuando no se distingue de manera correcta el uso de distintas variables/incógnitas en el enunciado. Un ejemplo lo encontramos cuando al representar de forma simbólica el enunciado “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos”, el sujeto representa con el mismo símbolo ambas variables pese a corresponder a números diferentes.

d) Errores de *complicación estructural* (III.4) son aquellos en el que los sujetos no interpretan apropiadamente la estructura del enunciado algebraico o parte del mismo. Por ejemplo, un sujeto que expresa el enunciado “El cuadrado de la suma de dos números consecutivos” como $x + (x + 1) = x^2$.

⁴ Debido a las características de los enunciados utilizados en este trabajo, no se está realizando una distinción entre si la letra utilizada tiene papel de variable o de incógnita.

En la Tablas 5 presentamos un resumen del tipo de errores en que incurren los estudiantes al traducir enunciados de forma simbólica a verbal, y viceversa, de la frecuencia de dichos errores, así como el enunciado donde se han producido y los sujetos que los han cometido.

Tipo de error	Frecuencia	Enunciado	Sujetos
De simbólica a verbal			
I.1	3	5	3B, 6B
		10	9B
I.2	1	5	3B
II.3	7	6	4B, 9C
		9	6B, 9B, 2C, 9C
		10	4B
III.1	4	2	4B
		5	4 ^a
		10	4B
		12	4B
III.3	2	5	9B
		12	8B
De verbal a simbólica			
I.1	5	7	3A, 3B, 5B, 6B, 1C
I.2	4	1	5A, 4B, 6B, 3C
II.1	2	7	3A, 1C
II.2	2	1	5B
		8	2 ^a
II.3	4	1	7A, 2B, 3B, 7C
II.4	1	4	7B
II.5	1	8	5 ^a
III.2	7	8	2A, 5A, 4B, 5B, 6B, 6C, 7C
III.3	13	1	7A, 3B, 6B, 7B, 8B, 9B
		3	5A, 7A, 6B, 8B, 9B
		8	6A, 7 ^a
III.4	15	3	8A, 6C
		7	2A, 6A, 3B, 5B, 6B, 1C, 9C
		8	4A, 7A, 8B, 9B, 1C, 5C

Tabla 5. Tipo de errores y frecuencia al transformar de verbal a simbólica

Discusión de resultados

La información recogida en la Tabla 5 nos permite observar que al transformar enunciados del sistema de representación simbólica a verbal, en la categoría debida a errores provenientes de la aritmética, los estudiantes incurren en errores debidos al mal uso de la interpretación de potencias y producto (II.3), mientras que no incurrieron en errores notados por II.1, II.2, II.4 y II.5. De las categorías de errores relacionadas con el álgebra, los sujetos incurren en errores debidos a generalización (III.1) y errores de

variables (III.3). Sin embargo, dentro de esta categoría, no se han producido errores de particularización de elementos (III.2) ni debidos a la complicación estructural (III.4).

En cuanto a la traducción de enunciados del sistema de representación verbal al simbólico, destaca el hecho de que los errores debidos a la particularización (III.2), se produce únicamente en el enunciado 8, *un número par menos la cuarta parte de otro número*, pues los sujetos toman un número par concreto para expresar la relación de manera simbólica. Los errores relacionados con variables (III.4) se encuentran en los enunciados 3, 7 y 8. En el tercer enunciado, se producen errores al no expresar de manera correcta dos números consecutivos de manera simbólica. El sujeto 8A expresa la suma dos números consecutivos como $x + 1x$ y el sujeto 6C como $x + x + 2$. En el enunciado 7 (*el cuadrado de la suma de dos números consecutivos*) se producen errores por cambiar el orden de las operaciones indicadas, expresando los sujetos 1C y 9C el cuadrado de la suma como la suma de los cuadrados, y el sujeto 2A expresa simbólicamente un enunciado que no corresponde con la expresión verbal que se le proporciona ($x + (x + 1) = x^2$). Por último, en el caso del enunciado 8 (*un número par menos la cuarta parte de otro número*) los errores de complicación estructural (III.4) provienen de que el sujeto 7A realiza una interpretación incorrecta de un número par cualquiera, expresándolo como x^2 y los sujetos 8B y 1C como $x + 2$.

Una vez analizados los datos, observamos que en el trabajo escrito, el 75% de los errores analizados correspondían a las traducciones de verbal a simbólico, además, casi todos los errores se debían a la confusión de las operaciones potenciación y producto, a que no interpretaban correctamente la estructura del enunciado algebraico o a la particularización. Estos resultados coinciden con los obtenidos en 2008 en el trabajo realizado por Ruano et al. anteriormente mencionado.

CONCLUSIONES

Hemos construido un instrumento que nos ha permitido obtener información, en particular, en la primera fase que consideramos en este artículo, nos ha permitido realizar un análisis y una clasificación de los errores en los que incurren los estudiantes al realizar traducciones por escrito de enunciados algebraicos.

A partir de estudios previos y de las respuestas encontradas en los trabajos de los estudiantes, hemos construido una categorización que ha permitido realizar un análisis en la traducción de enunciados en los dos sentidos en términos de errores, obteniendo

que se produjeron más errores al pasar de la representación verbal a la simbólica. Todo este proceso de análisis nos ha servido como primer paso para indagar sobre la capacidad de los estudiantes al realizar traducciones y en su comprensión de enunciados en cada uno de los sistemas de representación mencionados, lo que nos ha llevado a la consecución del objetivo general propuesto en esta investigación.

REFERENCIAS

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 1(3), 24-35.
- Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. London: Kluwer Academic Publishers.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.
- Castro, E., Olmo, M^a. A. y Castro, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Dto. Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada
- Clement, J., Lochhead, J. y Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 88, 286-290.
- De Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. En Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas “Isaac Newton” (Ed.). *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)* (pp. 49-85). Tenerife: Editor.
- Fernández, F. (2001). El problema de los “problemas algebraicos”. En P. Gómez y L. Rico (Eds.). *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 137-147). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
- MacGregor, M. (1990). Writing in natural language helps students construct algebraic equations. *Mathematics Education Research Journal*, 2(2), 1-11.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children’s Mathematical Behavior*, 3(1), 93-166.
- Moyles, J. (1990). *El juego en la educación infantil y primaria*. Morata. Madrid.

- Palarea, M^a. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detención de errores comunes cometidos en álgebra por los alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Tenerife: Universidad de la Laguna. Consultado el 10 de febrero de 2011 en http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-106509_archivo.pdf
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-60). Barcelona: Horsori.
- Rodríguez-Domingo, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria*. Trabajo de Fin de Máster. Granada: Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1751/>
- Ruano, R. M., Socas, M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Wollman, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 169-181.