CREACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS

Uldarico Malaspina Jurado
umalasp@pucp.edu.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú

Tema: IV.2 Formación y actualización del profesorado
Modalidad: Mini curso
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Creación de problemas, resolución de problemas, situaciones, formulación de preguntas.

Resumen

El aprendizaje de las matemáticas está estrechamente vinculado a la resolución de problemas y ésta a la creación de problemas. El curso pretende contribuir a que los participantes tomen conciencia, por experiencia propia, del importante rol que juega la creación de problemas en la tarea docente, en el aprendizaje, en el desarrollo del pensamiento matemático, en el estímulo a la creatividad y en la profundización de conocimientos. El docente que desarrolle la capacidad de crear problemas, podrá construir problemas en los contextos específicos en los que ejerce su docencia, convertir en problemas adecuados las iniciativas de sus alumnos y estimular a ellos a crear sus propios problemas, como parte de su aprendizaje.

El curso – que se desarrollará participativamente – brindará experiencias de creación y resolución de problemas de primaria, secundaria y superior, considerando temas matemáticos como números, operaciones y funciones. Se prestará especial atención a la creación de problemas a partir de situaciones dadas – vinculadas con la realidad o intra matemáticas – y las sesiones comprenderán diversas fases que incluyan actividades individuales y grupales, con amplia libertad para usar los objetos matemáticos que los participantes consideren pertinentes.

1. Introducción

Hay una relación muy estrecha entre la resolución de problemas y la creación de problemas. En este sentido, Silver (1994) clasifica la creación de problemas según tenga lugar antes de resolver un problema, durante la solución o después de la solución. En este último grupo considera también a los problemas creados para nuevas situaciones, con la experiencia de haber resuelto problemas en contexto.

Hay consenso entre educadores e investigadores en que la resolución de problemas es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas. Una muestra clara de esto la tenemos en muchos artículos de investigación y en tratamientos amplios como la Teoría de Situaciones Didácticas, de Brousseau; la Teoría Antropológica de lo Didáctico, de Chevallard; y el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, de Godino, Font y Batanero. Ciertamente, tales investigaciones y teorías educativas no se podrán aplicar bien si no se tienen los problemas adecuados para los contextos específicos dados por las particularidades de los estudiantes, en el marco de su realidad sociocultural. Es, pues, necesario que el profesor cree problemas adecuados, ya sea haciendo variaciones a problemas que encuentre en textos u otras fuentes, o elaborando problemas a partir de situaciones observadas o configuradas por él, pudiendo ser éstas intra matemáticas o extra matemáticas. Entendemos por estas últimas a las más vinculadas con la realidad.

Sin embargo, la creación de problemas en sí misma es muy importante para el aprendizaje de las matemáticas, como se sostiene en varias investigaciones. Silver, Kilpatrick & Schlesinger (1990) y otros investigadores, reconocen que la incorporación de actividades de creación de problemas en las clases regulares, pueden ser un enfoque poderoso para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes. Nuestras experiencias docentes en la universidad y en la capacitación de profesores, nos permiten afirmar que las actividades de creación de problemas estimulan la creatividad y contribuyen a precisar la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se espera manejen los estudiantes, en el marco de una configuración epistémica adecuada. (Malaspina, 2011, p.237)

2. Formulación de preguntas y creación de problemas

En las clases en general y particularmente en las de matemáticas, cuando se pretende estimular la participación de los estudiantes, se incentiva las respuestas de los alumnos a preguntas que formula el profesor, pero se presta poca atención al estímulo a la formulación de preguntas de los alumnos, lo cual es fundamental para desarrollar su actitud crítica y su pensamiento científico. Como decimos en Malaspina (2013), plantearse preguntas no es solo un primer paso para crear problemas; también es fundamental para resolver problemas y es parte del proceso de comprensión de conceptos, definiciones, teorías, demostraciones e interrelaciones no solo en el campo de la matemática.

Excelentes oportunidades para ejercitar la formulación de preguntas nos proporcionan las actividades de creación de problemas, ya sea haciendo variaciones a un problema dado, formulando preguntas "*¿Qué pasaría si…?*" como medio para modificar la información, el requerimiento, el contexto o el entorno matemático del problema dado; o de manera libre, formulando preguntas suscitadas por una situación cotidiana, un hecho, un objeto, un teorema, una definición, un diagrama, un gráfico, etc.

2.1 Ejemplos

2.1.1 Presentamos una situación muy sencilla y diez de las muchas preguntas de matemáticas que pueden formularse en torno a ella, en diversos entornos matemáticos.

¿Qué preguntas de matemáticas podemos hacernos si disponemos de un alambre flexible de 36 cm de longitud?

1. *¿Cuál es el mayor número de cuadrados con lados de longitud entera que podemos formar?*

(Y preguntas similares con otros polígonos regulares)

Entorno matemático: Geometría plana, cuadrados y perímetros; división entera.

2. *¿Cuál es el mayor número de triángulos no equiláteros con lados de longitud entera que podemos formar?*

- *¿Triángulos de perímetro 4?*
- *¿Triángulos de perímetro 6?*
- *¿Triángulos de perímetro 5?*

(Preguntas similares con otros polígonos no regulares. ¿Pentágonos de perímetro 6?)

Entorno matemático: Geometría plana, propiedades de los lados de un triángulo, construcción de polígonos con perímetro dado y lados de longitud entera.

3. *¿Se puede cortar el alambre en 4 trozos de longitudes enteras diferentes, de modo que cada longitud en cm sea un número primo?*

(Preguntas similares con números diferentes de trozos. ¿En 3 trozos es imposible?

Recordar que 2 es primo.)

Entorno matemático: Teoría de números, conjetura de Goldbach

4. *¿Se puede construir dos cuadrados cuyos lados sean de longitudes enteras, sin desperdiciar alambre?*

Si x, y son las longitudes de cada lado de los cuadrados,

$4x + 4y = 36$, con x, y números enteros positivos

(Preguntas similares con otros polígonos o con un número mayor de figuras. ¿Del mismo tamaño?)

Entorno matemático: Álgebra, ecuaciones diofánticas

5. *¿Se puede construir dos rectángulos semejantes, cuyos lados sean de longitudes enteras, sin desperdiciar alambre?*

Si u y v son las longitudes del largo y el ancho de un rectángulo y k es la constante de proporcionalidad, $2u + 2v + 2ku + 2kv = 36$; $u, v, k \in \boldsymbol{Z}^+$

$$u + v = \frac{18}{1+k} \Rightarrow k \in \{1, 2, 5, 8\}$$

(Preguntas similares con otros polígonos.)

Entorno matemático: Geometría, semejanza de figuras planas; Álgebra, ecuaciones diofánticas.

6. *¿Se puede construir un triángulo rectángulo, cuyos lados sean de longitudes enteras, sin desperdiciar alambre?*

Si las longitudes de los catetos y la hipotenusa son, respectivamente, x , y, z, debe ocurrir que $x^2 + y^2 = z^2$; $x + y + z = 36$; $x, y, z \in \boldsymbol{Z}^+$

(Números pitagóricos y estudio de casos. Intersección de un cono con un plano)

Entorno matemático: Geometría y Álgebra, ternas pitagóricas

7. *¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede formar?*

Si el largo y el ancho del rectángulo miden x, y respectivamente, debemos

Maximizar xy

s.a: $x + y = 18$

$x, y \in \boldsymbol{R}^+$

Entorno matemático: Maximización, función cuadrática, tabulación, completamiento de cuadrados, relación entre media aritmética y media geométrica, derivación.

8. *¿Cuáles son las dimensiones del triángulo de mayor área que se puede formar?*

Si las dimensiones de los lados del triángulo son x, y, z; y su semiperímetro es s, se trata de

Maximizar $(s-x)(s-y)(s-z)$

s.a: $x + y + z = 36$

$x, y, z \in \boldsymbol{R}^+$

Entorno matemático: Maximización, tabulación, relación entre media aritmética y media geométrica, derivación; problemas isoperimétricos.

9. *¿Cuál es el polígono de lados de longitud entera y de mayor área que se puede formar? ¿Cuál es el área de tal polígono?*

Entorno matemático: Geometría plana, área de polígonos regulares y del círculo; trigonometría.

10. *Si el alambre se apoya en una pared que forma ángulo recto con una mesa y va resbalando hasta ubicarse en posición horizontal en la mesa ¿cómo es la curva que describe el punto que está en la mitad del alambre?*

Entorno matemático: Construcciones geométricas; Geometría analítica, lugar geométrico.

2.1.2 Presentamos un problema y algunas de las variaciones hechas por profesores en formación o en ejercicio.

- *Problema inicial:*

La mamá de Carlitos tiene en su monedero un billete de 10 soles, dos monedas de 5 soles, y tres monedas de 2 soles. En el Mini-mercado de su barrio hay ofertas de bolsas de alimentos por 9 soles y por 13 soles. ¿Es verdad que la señora puede comprar cualquiera de estas bolsas pagando su precio exacto (sin necesidad de vuelto) con el dinero que tiene en su monedero? Explicar

Variación 1

(Hecha por una alumna de profesorado de primaria)

La mamá de Carlitos tiene en su monedero un billete de 10 soles, dos monedas de 5 soles, y tres monedas de 2 soles. En el Mini-mercado de su barrio hay ofertas de bolsas de alimentos por 9 soles y por 13 soles. Si la señora compró una de las bolsas con el precio exacto (sin necesidad de vuelto) y después se dio cuenta que necesitaba más alimentos, ¿cuánto recibió de vuelto al comprar la otra bolsa con lo que le quedaba de dinero?

Variación 2

(Hecha por un profesor de secundaria)

La mamá de Carlitos tiene 35 soles. Va al mercado y encuentra bolsas de alimentos de 7 soles y de 13 soles. ¿Cuál es el mayor número de bolsas de ambos precios que puede comprar?

Variación 3

(Hecha por un profesor de secundaria)

Isabel desea preparar una fiesta para su hijo y cuenta con 39 soles. Se entera que los ingredientes están en oferta en el mercado y sabe que las canastas de 9 soles contienen las 3 cuartas partes de las canastas que cuestan 13 soles. ¿Cómo le conviene gastar su dinero en la compra de estas canastas?

Variación 3

(Pensada por el autor)

La mamá de Carlitos tiene en su monedero un billete de 10 soles, dos monedas de 5 soles, y tres monedas de 2 soles. Si por una compra pagó lo que correspondía y no recibió vuelto ¿Cuál es la probabilidad de que tal pago haya sido de 7 soles?

Referencias bibliográficas

Malaspina, U. (2011). *Intuición y resolución de problemas de optimización. Un análisis ontosemiótico y propuestas para la educación básica*. Alemania: Lap Lambert Academic Publishing GMBH & Co.KG - Editorial Académica Española.

Malaspina, U. (2013). La enseñanza de las matemáticas y el estímulo a la creatividad. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 63, 41 – 49.

Silver, E.A., Kilpatrick, J. & Schlesinger, B.(1990). T*hinking through mathematics: Fostering inquiry and communication in mathematics classrooms*. New York: Eds. D. Wolf D. & R. Orril, College Entrance Examination Board.

Silver, E.A. (1994). On mathematical problem solving. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19 – 28.