

LA CREACIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Uldarico Malaspina Jurado

umalasp@pucp.edu.pe

Pontificia Universidad Católica del Perú

Tema: IV.2 Formación y actualización del profesorado

Modalidad: Conferencia regular

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Creación de problemas, identificación de problemas, formulación de preguntas.

Resumen

Se destaca la importancia de que profesores y alumnos desarrollen la capacidad de crear problemas. La creación de problemas se define como un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema a partir de un problema conocido (variación de un problema dado) o a partir de una situación dada (elaboración de un problema). Se dan ejemplos de creación de problemas y se detallan estrategias para estimular la capacidad de crear problemas.

1. Importancia de crear problemas

Reconocidos matemáticos preocupados por la educación matemática, como Polya (1954) y Freudenthal (1973) consideraban la creación de problemas como una experiencia matemática importante para los estudiantes. Ya en 1989 el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) recomendaba a los profesores brindar oportunidades para que los estudiantes piensen matemáticamente y desarrollen sus conocimientos mediante la creación de problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Textualmente, decía: “los estudiantes deben tener algunas experiencias reconociendo y formulando sus propios problemas, actividad que es el corazón del hacer matemáticas” (p. 138); recomendaba también que a los estudiantes se les dé oportunidades de formular problemas a partir de una situación dada y de crear nuevos problemas modificando las condiciones de un problema dado. (NCTM, 1991, p. 95). En este sentido, Bonotto (2013), como una conclusión de su investigación, nos dice que el proceso de crear problemas representa una de las formas de auténtica investigación matemática, que adecuadamente implementada en actividades de clase, tiene el potencial de llegar más allá de las limitaciones de los problemas verbales, por lo menos como son típicamente tratados. Añade que impulsar la creación de problemas es una de las formas de lograr el desarrollo de diferentes potencialidades de los estudiantes y de estimular una mayor flexibilidad mental.

Por las experiencias desarrolladas en clases y talleres en diversos niveles educativos, consideramos que desarrollar la capacidad de crear problemas, para alumnos y profesores, es contribuir a desarrollar las capacidades de formular(se) preguntas e identificar problemas y, así, estimularlos a la investigación.

A continuación detallamos algunas razones didácticas e investigativas de la importancia de la creación de problemas, tanto para los profesores como para los alumnos.

Razones didácticas

- *En la enseñanza (creación de problemas por los profesores)*

Contribuye a: Proponer problemas que sean cercanos a las motivaciones de los alumnos y a los contextos en los que viven; crear secuencias de problemas de dificultad gradual que lleven a un problema particularmente importante; proponer problemas que recojan las iniciativas, percepciones o interrogantes de los alumnos, que contribuyan a aclarar o ampliar sus ideas, ante el reto de resolver problemas o de comprender temas de matemáticas (esto fortalece mucho una dinámica de aprendizaje por descubrimiento); proponer problemas y actividades que respondan a las orientaciones generales que suelen darse en los diseños curriculares y documentos complementarios desde los organismos centralizados de educación; llenar el vacío que hay en la mayoría de textos de matemáticas, sobre todo en los de nivel escolar; tener problemas adecuados para aplicar las teorías sobre educación matemática, fuertemente apoyadas en la resolución de problemas, como la Teoría de Situaciones Didácticas, la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática; fortalecer la capacidad de investigación de los profesores; mejorar la calidad de las evaluaciones; y a consolidar la formación matemática de los profesores.

- *En el aprendizaje (creación de problemas por los alumnos)*

Contribuye a: motivar más el estudio; fortalecer las capacidades de resolver problemas, de formular(se) preguntas, de identificar problemas y de investigar; ampliar la visión de las matemáticas (suele ocurrir que creen problemas cuyas soluciones requieren conocimientos matemáticos que aún no los tienen); adquirir una formación matemática más sólida (son experiencias que van más allá de lo operativo y de los problemas tipo); ver aspectos matemáticos en el medio que los rodea; establecer conexiones con otros campos del conocimiento; desarrollar la creatividad; y a fortalecer la autoestima del

alumno (sus preguntas y observaciones son tomadas en cuenta y verifica que puede crear problemas; por cierto, el papel del profesor es muy importante).

Razones investigativas

Contribuye a: estimular la capacidad de formularse preguntas (esencial en la investigación); estimular la capacidad de identificar problemas y formular modelos matemáticos; estimular y desarrollar la creatividad; aplicar y continuar investigaciones sobre educación matemática basadas en la resolución y creación de problemas.

2. ¿Qué entendemos por crear problemas de matemáticas?

Aunque hay una percepción intuitiva de lo que es crear problemas de matemáticas, es bueno tener una definición. Algunas de ellas las citan Stoyanova y Ellerton (1996) y ellas mismas, enfocando la creación de problemas hacia los estudiantes, nos dicen que crear problemas es “el proceso por el cual los estudiantes, con base en sus experiencias matemáticas, construyen interpretaciones personales de situaciones concretas y las formulan como problemas matemáticos significativos”

En este artículo consideraremos que *la creación de problemas matemáticos es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema a partir de un problema conocido (variación de un problema dado) o a partir de una situación dada (elaboración de un problema).*

Para tratar más sistemáticamente este proceso, consideraremos – como lo hicimos en Malaspina (2013b) – que todo problema matemático tiene cuatro elementos fundamentales: *Información, Requerimiento, Contexto y Entorno matemático.*

Diremos entonces, que *la creación de un problema de matemáticas, como VARIACIÓN de un problema dado, es un proceso según el cual se construye un nuevo problema modificando la información, el requerimiento, el contexto o el entorno matemático del problema dado. Es decir, modificando uno o más de los cuatro elementos del problema inicial.*

En cuanto a la creación de problemas a partir de una situación dada, precisamos lo siguiente:

Diremos que *la creación de un problema de matemáticas, como ELABORACIÓN a partir de una situación específica, es el proceso mediante el cual se construye un problema cuyo contexto es tal situación u otra inspirada por ella; cuya información es obtenida por selección o modificación de la información que se percibe en la situación*

dada; y cuyo requerimiento es factible mediante relaciones lógicas y matemáticas establecidas o encontradas entre los elementos de la información especificada, que están implícitas en el enunciado, dentro de un cierto entorno matemático.

Ciertamente, lo interesante desde el punto de vista matemático y didáctico está en responder creativamente al desafío de crear problemas – por variación de un problema dado, o por elaboración a partir de una situación vinculada con la realidad o intra matemática (dada o también creada) – que lleven a la formulación de un nuevo problema que sea didácticamente valioso, en el sentido que las experiencias de resolverlo contribuyan al aprendizaje y profundización de los conceptos matemáticos involucrados y – en el caso de tener contextos extra matemáticos – a percibir las matemáticas que hay en la realidad. Es asimismo deseable que los problemas creados contribuyan también a percibir relaciones no evidentes en la información recibida y a estimular la curiosidad matemática.

3. Algunas estrategias para estimular la capacidad de crear problemas.

Para estimular esta capacidad, de profesores o de alumnos, es importante tener sesiones de trabajo dedicadas especialmente a la creación de problemas, en las que el profesor que tenga a su cargo la sesión muestre algunos ejemplos de creación de problemas y luego oriente el trabajo individual y grupal, a partir de problemas y situaciones adecuadamente seleccionados por él. Es esencial que el profesor haya creado antes varios problemas con base en los problemas o situaciones que va a presentar.

3.1 Para crear problemas como *variación de otro dado*

Es conveniente iniciar las sesiones con problemas sencillos y que ofrezcan posibilidades claras de hacer modificaciones a la información, al requerimiento, al contexto o al entorno matemático. (Ver algunas pautas concretas en el Anexo 1, parte A.)

3.2 Para crear problemas como *elaboración, a partir de una situación dada*

Es importante encontrar o configurar situaciones iniciales vinculadas con la realidad, sencillas pero ricas en potencialidades para seleccionar información, plantearse preguntas, encontrar relaciones lógicas y hacer el o los requerimientos del problema, en el entorno matemático que se desea trabajar. (Algunas pautas en el Anexo 1, parte B.)

4. Ejemplos

4.1 De creación de un problema como *variación de otro dado*

Consideraremos un problema trabajado por el autor con profesores en ejercicio y alumnos del primer curso de Análisis de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, desarrollado con bastante detalle en Malaspina (2013b).

- *Problema inicial 1*

(Problema de R. Douady, referido por Maranhão, M.C. en Franchi et al (2012, p. 153).)

A continuación se representan los gráficos de las funciones f y g en un plano cartesiano. Marque, sobre el mismo plano cartesiano, seis puntos que correspondan al gráfico de la función h definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

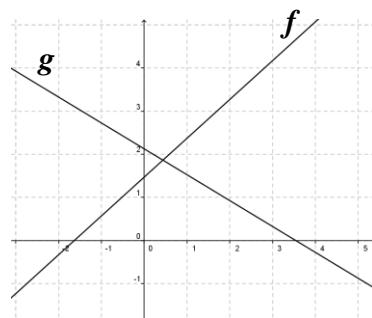


Figura 1

Variación 1 (Hecha por el profesor del curso y presentada a los alumnos. Ver Anexo 2)

Variación 2 (Hecha por el alumno 1, conociendo la variación 1 presentada por el profesor)

Dadas las gráficas en la figura 2,

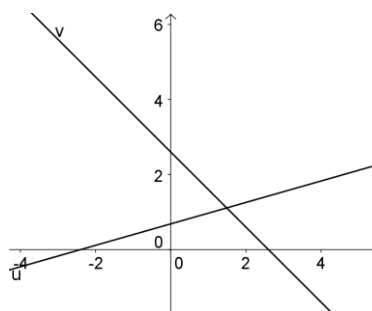


Figura 2

a) Marcar algunos puntos de los gráficos mostrados que son también puntos de la gráfica de la función w definida por $w(x) = u(x) + v(x)$

b) Trazar la gráfica de la función w .

Variación 3 (Hecha por el profesor del curso y presentada a los alumnos, luego de haber conocido algunas variaciones y comentado sus soluciones. Ver Anexo 2)

Por razones de espacio no consideramos comentarios a las soluciones, pero cabe mencionar que una alumna de primer ciclo de profesorado de educación primaria hizo, sin formalizar, una bella solución de la parte b del problema de la variación 2, distinta a la solución de su autor.

- *Problema inicial 2*

Carlitos tiene cuatro monedas de 20 céntimos de nuevo sol, cinco monedas de 1 nuevo sol y tres monedas de 5 nuevos soles. ¿Es verdad que Carlitos puede comprar un libro por S/. 10,60 en la librería y un trompo por S/. 3,40 en la juguetería, sin necesidad de recibir vuelto en ninguno de los casos? Explicar.

Una variación (Hecha por una profesora de secundaria, que da clases en primaria)

Una señora debe recibir 15 nuevos soles como vuelto de una compra y pide a la cajera de la tienda que se lo dé solo en monedas de S/.1 y de S/. 2

- ¿Cuál será el menor número de monedas en total que recibirá, si pide que le dé por lo menos una de cada valor?
- ¿Cuál será el mayor número de monedas en total que recibirá, si pide que le dé por lo menos dos de cada valor?

Cabe explicitar que en relación al problema inicial, al crear este problema se ha modificado tanto la información como el requerimiento y el contexto, lo cual muestra que la autora está logrando avances significativos en el desarrollo de su capacidad de crear problemas. En cuanto al entorno matemático, este problema lleva a tanteos inteligentes considerando paridad e imparidad de números naturales y – pensando en su aplicación en el nivel secundario – a ecuaciones diofánticas y a una representación gráfica en el marco de un problema de programación lineal entera, que podría llevar inclusive al uso de un software dinámico como el GeoGebra.

4.2 De creación de un problema como *elaboración a partir de una situación*

- *Situación 1*

(Parte de las experiencias desarrolladas en un taller sobre creación de problemas en el Departamento de Matemática de la Universidad de Valparaíso y expuestas con detalle en Malaspina (2013a)).

Carlitos obtuvo las siguientes notas en los cursos A y B. (La escala de calificación es de 0 a 20; la nota final se obtiene como media aritmética de tres exámenes; los cursos se aprueban con 11 y procede el redondeo habitual)

Curso A: 1er Examen: 08; 2do Examen: 12

Curso B: 1er Examen: 10; 2do Examen: 14

Elaboración 1.1, 1.2 y 1.3 (Ver Anexo 2)

Elaboración 1.4

¿En qué curso hay mayor probabilidad de que Carlitos apruebe?

- *Situación 2*

(Parte de experiencias desarrolladas en un taller con profesores, en la PUCP)

Juan tiene un terreno en forma de **L**, que se puede dividir en dos lotes formados por un rectángulo y un cuadrado.

Elaboración 2.1 y 2.2 (Ver Anexo 2)

5. Creación de problemas y clases de matemáticas

Ante la clase concreta y con un tema específico a tratar, en una perspectiva de aprendizaje por descubrimiento, es importante que el profesor proponga a sus alumnos problemas que les resulten atractivos resolverlos, que ellos perciban que pueden resolverlos y que perciban también que requieren de nuevos conocimientos para resolverlos de la mejor manera (los conocimientos que tienen les resultan insuficientes o quizás con tales conocimientos la solución es solo aproximada o toma mucho tiempo). Tales problemas podrían ser seleccionados de un texto, pero si el profesor tiene desarrollada su capacidad para crear problemas, podrá hacer algunas variaciones a tales problemas, de modo que se adecuen mejor a las motivaciones y particularidades de sus alumnos, o podrá crear alguno(s), partiendo del entorno matemático dado por el tema a tratar y de un contexto – intra o extra matemático – más atractivo para sus alumnos.

Luego de presentado el tema y de haberlo usado para resolver el o los problemas iniciales, será conveniente proponer nuevos problemas para ejercitar las habilidades de sus alumnos en el manejo del tema, tanto en el aspecto operativo como en la solución de problemas. Será más estimulante y motivador que algunos de tales problemas sean creados por el profesor a partir de las preguntas e intervenciones de sus alumnos y de situaciones ocurridas en la clase. Más aún, si pide a sus alumnos que creen problemas – ya sea haciendo variaciones a algunos seleccionados, o a partir de situaciones que él las haya seleccionado o configurado para ofrecérselas como puntos de partida – reforzará la comprensión del tema; tendrá una idea más clara de la comprensión de los conceptos y procesos; estimulará tanto la capacidad de formular preguntas como la creatividad de sus alumnos; y contribuirá a fortalecer la autoestima de ellos. Profesor y alumnos irán

así ampliando su visión de las matemáticas como una ciencia en permanente expansión y, como decimos en Malaspina (2013c), tomando conciencia de que no todos los problemas están escritos en los libros, ni todos los problemas están resueltos. Crear problemas contribuirá a que alumnos y profesores sientan que es posible colaborar a esa continua expansión de la matemática. Estimular esta capacidad, acompañada con la de resolver problemas, puede hacer percibir mejor la belleza de la matemática y su didáctica, y sentir que es posible contribuir a crear “obras de arte” en la matemática.

Referencias bibliográficas

- Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 37-55
- Franchi et al (2012). *Educação Matemática: uma (nova) introdução*. São Paulo: EDUC.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Malaspina, U. (2013a). Creación de problemas. Un caso con probabilidades. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 119 – 124. Recuperado de <http://www.fisem.org/web/union/images/stories/33/ARCHIVO13.pdf>
- Malaspina, U. (2013b). Variaciones de un problema. El caso de un problema de R. Douady. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 34, 141 – 149. Recuperado de <http://www.fisem.org/web/union/images/stories/34/archivo13.pdf>
- Malaspina, U. (2013c). La enseñanza de las matemáticas y el estímulo a la creatividad. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 63, 41 – 49.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). Professional standards for teaching mathematics. Reston, VA: NCTM
- Polya, G. (1973). *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method*. New Jersey: Princeton University Press
- Stoyanova, E. & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In Clarkson (Ed.), *Technology in Math. Educ.*, 518–525. Melbourne, Victoria: Mathematics Education Research Group of Australasia.

ANEXO 1

Algunas estrategias para estimular la capacidad de crear problemas

A. Como *variación* de un problema dado

Trabajo individual

- a) Buscar más de una forma de resolver el problema.
- b) Luego de resolver el problema, o al intentar resolverlo, plantearse preguntas “¿*Qué pasaría si...*?”. Por ejemplo, qué pasaría si la información fuera otra, si el requerimiento fuera diferente, si se considerara otro entorno matemático, si se cambiara el contexto. Ciertamente, es un trabajo reflexivo, creativo y con mente abierta, y el ¿*Qué pasaría si...*? incluye analizar si los cambios tienen sentido y verlos integradamente.

Trabajo grupal

- c) Compartir en grupos (preferentemente a lo más de 4 integrantes) la solución del problema y las diversas preguntas “¿*Qué pasaría si...*?” , efectuadas por cada integrante del grupo.
- d) Seleccionar en grupo las preguntas, analizar las posibles respuestas y decidir las modificaciones para configurar el nuevo problema.
- e) Escribir en grupo el enunciado del problema creado con base en lo anterior, y examinar su claridad.
- f) Resolver ordenadamente el problema creado.
- g) Atendiendo a la dificultad del problema creado y al nivel educativo en el que se pretenda emplear, pensar en la posibilidad o conveniencia de desagregarlo en problemas de dificultad gradual.
- h) Proponer el problema a otro grupo y pedirle solución y comentarios.

Socialización

- i) Según la disposición del tiempo y del número de grupos, hacer exposiciones críticas de los grupos que resolvieron los problemas.
- j) Promover el intercambio de opiniones
- k) Revisar la redacción de los enunciados de los problemas expuestos y hacer los ajustes que se consideren necesarios.
- l) Redondear ideas o conceptos matemáticos que hayan surgido y evidenciar nuevos problemas como *variación* del problema inicial (los que haya previsto el profesor, u otros que surjan en esta fase).

B. Como *elaboración*, a partir de una situación dada

(La situación puede ser vinculada con la realidad o intra matemática.)

Trabajo individual

- a) Observar la situación y anotar toda la información que se vaya encontrando
- b) Examinar las relaciones lógicas y matemáticas que se pueden establecer con la información que se percibe.
- c) Seleccionar la información que se considere relevante en relación a las relaciones lógicas y matemáticas encontradas; o modificar convenientemente la información.

Trabajo grupal

- d) Compartir en grupos la información decidida individualmente para el nuevo problema y las relaciones lógicas y matemáticas que se hayan encontrado o establecido.
- e) Examinar qué requerimientos se pueden hacer a partir de la información decidida y sus relaciones lógicas y matemáticas.
- f) Decidir un requerimiento, y darle forma de problema, considerando como contexto la situación dada, o haciendo algunas modificaciones a ésta, y un entorno matemático acorde con el nivel educativo en el que se pretenda proponer el problema.
- g) Escribir en grupo el enunciado de un problema con base en lo anterior, y examinar su claridad.
- h) Resolver el problema
- i) Atendiendo a la dificultad del problema creado y al nivel educativo en el que se pretenda emplear, pensar en la posibilidad o conveniencia de desagregarlo en problemas de dificultad gradual.
- j) Proponer el problema a otro grupo y pedirle solución y comentarios.

Socialización

- k) Según la disposición del tiempo y del número de grupos, hacer exposiciones críticas de los grupos que resolvieron los problemas.
- l) Promover el intercambio de opiniones.
- m) Revisar la redacción de los enunciados de los problemas expuestos y hacer los ajustes que se consideren necesarios.
- n) Redondear ideas o conceptos matemáticos que hayan surgido y evidenciar nuevos problemas a partir de la situación dada (los que haya previsto el profesor u otros que surjan en esta fase).

ANEXO 2

Variaciones al Problema inicial 1 de la sección 4.1

Variación 1

(Hecha por el profesor del curso y presentada a los alumnos antes de pedirles que hagan otras variaciones al Problema inicial 1.)

En la figura 2 se muestran representaciones gráficas de las funciones u y v .

Marcar algunos puntos de las gráficas mostradas que son también puntos de la gráfica de la función w definida por $w(x) = u(x) \cdot v(x) \forall x \in \text{Dom}(u) \cap \text{Dom}(v)$.

Usar Q_1, Q_2, \dots, Q_n para representar tales puntos y explicar cómo obtuvo cada uno de ellos.

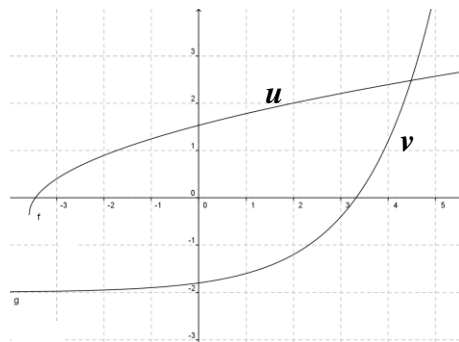


Figura 2

Variación 3

(Hecha por el profesor del curso y presentada a los alumnos, luego de haber conocido algunas variaciones hechas por ellos y comentado sus soluciones.)

Si la función h está definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, para todo número real x , siendo f y g funciones reales continuas, cuyos dominios son todos los números reales, ¿siempre ocurrirá que algunos puntos de los gráficos de f y de g son también puntos del gráfico de h ?

Examinando las variaciones hechas, se puede percibir las distintas modificaciones a la información, a los requerimientos y al entorno matemático, en relación al problema inicial.

ANEXO 3

Problemas *elaborados* a partir de dos situaciones dadas

De la Situación 1

Elaboración 1.1

¿Carlitos puede aprobar ambos cursos con nota 15?

Elaboración 1.2

Carlitos posee una beca cuya condición para mantenerla es que el promedio de los cursos A y B sea mayor a 12. ¿Qué nota mínima debe obtener en los terceros exámenes de los cursos A y B?

Elaboración 1.3

Carlitos aprueba un curso con tres notas y con promedio 11. ¿Cuáles son las posibles notas en dos de las pruebas si en la tercera obtuvo 15?

De la Situación 2

Elaboración 2.1

El lote en forma de **L** de Juan, se puede dividir en dos lotes formados por un rectángulo y un cuadrado. El lote rectangular es de 2000 m^2 y el cuadrado es de 1600 m^2 . Dibuja el terreno con las posibles dimensiones.

Elaboración 2.2

Juan tiene un terreno en forma de **L**, que se puede dividir en dos lotes formados por un rectángulo y un cuadrado. Si cada lado del cuadrado mide $a \text{ cm}$ y los lados del rectángulo miden $a \text{ cm}$ y $b \text{ cm}$, con $b > a$, ¿cuál es el área y cuál el perímetro del terreno?