

CAPÍTULO 2

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

OSCAR JOSÉ BECERRA, MARITZA RUTH BUITRAGO,
SONIA CONSTANZA CALDERÓN, RODRIGO ARMANDO GÓMEZ,
MARÍA C. CAÑADAS, PEDRO GÓMEZ

1. Introducción y formulación del problema

La unidad didáctica que exponemos a continuación aborda los elementos que consideramos necesarios para la solución de las dificultades que encuentran los estudiantes de grado séptimo al resolver situaciones que involucran la adición y sustracción de números enteros. Presentamos la descripción del problema por tratar, la manera en que lo abordamos y los principales resultados de nuestra experiencia. Posteriormente, en el cuerpo de este documento, exponemos la fundamentación del diseño de la unidad didáctica, seguido del análisis didáctico para la adición y sustracción de números enteros, la descripción y justificación del diseño de la unidad didáctica, la evaluación de la implementación, el balance de la experiencia y reflexiones hacia el futuro. Finalizamos con nuestras conclusiones.

1. Descripción del problema

Como docentes de grado séptimo, nos encontramos con dificultades frecuentes en el uso de algoritmos que permitan a los estudiantes solucionar situaciones aditivas de números enteros, bien sea porque los estudiantes dan interpretaciones incorrectas a los enunciados propuestos por nosotros (profesores) o por concepciones erróneas relacionadas con el tratamiento de enteros negativos y positivos. Una situación aditiva es el contexto en el que la solución al cuestionamiento realizado se resuelve mediante las operaciones de adición y sustracción. Consideramos de gran importancia el tratamiento adecuado de este tema, dada su relevancia en temas posteriores del mismo grado. Es el caso

de la solución de situaciones en las que se requiere el uso de operaciones con números racionales o, en años siguientes, en la resolución de ecuaciones, el tratamiento de funciones o el cálculo infinitesimal. Además de las matemáticas escolares, este tema es relevante en la etapa de preparación profesional.

2. Cómo se abordó el problema

Para abordar el problema descrito, diseñamos una unidad didáctica en la que esperábamos que los estudiantes adquirieran destrezas y habilidades matemáticas; superaran errores y dificultades en el manejo de la adición y sustracción entre números enteros; y, finalmente, logaran la solución de situaciones problema con el uso de estas operaciones. De acuerdo con ello, la unidad didáctica incluyó una prueba diagnóstica, cinco tareas¹ y un examen final, en los que esperábamos el logro de tres objetivos de aprendizaje. Dichos objetivos de aprendizaje están relacionados con el uso de vocabulario específico, la justificación de procedimientos necesarios para la solución de adiciones y sustracciones, y la interpretación y solución de situaciones de la vida real que involucran estas operaciones.

Esta unidad didáctica, compuesta por siete sesiones de trabajo, fue puesta en práctica con estudiantes de grado séptimo de una institución educativa privada en Bogotá. Durante su implementación, fue posible observar las actuaciones de los estudiantes.

3. Principales resultados de la experiencia

Tras la implementación de la unidad didáctica, fue posible establecer varios resultados. Por un lado, el uso de tareas contextualizadas fue apropiado para el logro de los objetivos propuestos, porque los estudiantes manifestaron cercanía con las situaciones planteadas. Por otro lado, también fue posible apreciar que el empleo de materiales y recursos ayudó, en cierta medida, a la apropiación de conceptos y solución de las tareas propuestas, dado que los estudiantes tuvieron la posibilidad de manipular diferentes elementos durante el desarrollo de las tareas. Esto puede apreciarse en el análisis realizado de los comentarios de los estudiantes, consignados en los diferentes instrumentos diseñados para la recolección de datos, que se presentarán más adelante. Además de estos resultados,

¹ Llamamos tarea a una propuesta para el alumno que implica una actividad suya en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como instrumento para el aprendizaje o la evaluación del aprendizaje (Marín, s. f.).

también encontramos algunas cuestiones que obstaculizaron el desarrollo de la implementación de la unidad didáctica; por ejemplo, necesitamos más tiempo del planificado para trabajar las tareas y las puestas en común posteriores. También, echamos en falta la aclaración de algunos de los términos empleados en una de las tareas propuestas, situación que afectó los tiempos y la comprensión al resolverla. Observamos, además, algunas dificultades por parte de los estudiantes al plantear expresiones aritméticas a partir de enunciados verbales (escritos), y se encontraron errores en el planteamiento del problema.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la implementación y teniendo en cuenta el balance realizado de las debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades, presentamos una propuesta de diseño mejorado que permita conseguir mejores resultados para próximas implementaciones de esta unidad didáctica. A continuación, tratamos la fundamentación del diseño de la unidad didáctica.

2. Fundamentación del diseño de la unidad didáctica

Con el propósito de fundamentar nuestra unidad didáctica, presentamos en este apartado y el siguiente los aspectos más relevantes que sustentan su diseño e implementación. En este apartado, describimos su contexto curricular, socioeconómico y académico. En el siguiente apartado, presentamos los resultados del análisis didáctico de nuestro tema. Esta información constituye la base para el diseño de la unidad didáctica.

1. Contexto curricular

El diseño e implementación de esta unidad didáctica está enmarcado en los requerimientos descritos para el grado séptimo de los estándares básicos de competencias en matemáticas de la legislación colombiana (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006) y se ajusta al plan de área propuesto en la institución educativa para la asignatura del mismo grado.

Los criterios de evaluación de esta unidad didáctica se elaboraron con base en lo establecido en el Decreto 1290 de 2009, que reglamenta la evaluación del aprendizaje y la promoción de los estudiantes para los diferentes niveles de la educación básica y media a escala nacional. Esto llevó a establecer una escala de valoración nacional con cuatro valores para el desempeño —superior,

alto, básico y bajo—, según el artículo 5 de este decreto (MEN, 2009). Esta escala de valoración para la calificación del desempeño de los estudiantes se incluyó a partir del 2010 en el sistema interno de evaluación de la institución educativa en la que se llevó a cabo la implementación.

Seleccionamos la adición y sustracción de números enteros como tema de las matemáticas escolares por estar contemplado en el plan de estudios de la institución. Además, los contenidos abordados en la unidad didáctica son coherentes con la secuencia propuesta en el plan de área para grado séptimo en la institución educativa.

2. Contexto socioeconómico

Nuestra unidad didáctica fue implementada en la Fundación Ideales-Gimnasio Santa Ana. Esta es una institución educativa privada, ubicada en el norte de Bogotá y de carácter femenino. La institución cuenta con educación personalizada y atiende rigurosamente las necesidades particulares de cada niña. El promedio de estudiantes por curso oscila entre 14 y 16 niñas. Las estudiantes de la institución forman parte de familias ubicadas en un estrato socioeconómico alto. Los padres de familia cuentan con estudios académicos universitarios y priorizan los tiempos, espacios y recursos necesarios para el aprendizaje de sus hijas. Esto hace que cada estudiante cuente con los materiales y textos necesarios para las clases, y tenga acceso a recursos tecnológicos e internet en sus hogares.

3. Contexto académico

Las estudiantes que participaron en la implementación se caracterizan por tener un buen nivel académico y un gran interés por adquirir nuevos conocimientos que les permitan avanzar en los requerimientos académicos exigidos para cada una de las asignaturas impartidas. Así mismo, la institución cuenta con una trayectoria de resultados en la categoría “muy superior” en las pruebas nacionales Saber 11.

Al llegar a grado séptimo, las estudiantes resuelven de manera amplia situaciones que involucran operaciones entre números naturales y reconocen el conjunto de los números enteros de acuerdo con su orden, ubicándolos en la recta numérica. Además, saben identificar diferentes situaciones en las que este conjunto numérico es aplicable.

3. Análisis didáctico de la adición y sustracción de números enteros

El análisis didáctico es un procedimiento compuesto por cuatro análisis —de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación— con el que el profesor puede diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas (Gómez, 2007). Inicialmente, presentamos el análisis de contenido, en el que describimos los contenidos conceptuales y procedimentales relacionados con el tema de la unidad didáctica, los diferentes sistemas de representación que se pueden emplear en la adición y sustracción de números enteros, y los fenómenos relacionados con el tema. Posteriormente, trataremos el análisis cognitivo, al describir las expectativas de aprendizaje —competencias, objetivos y capacidades—, así como los caminos de aprendizaje y los posibles errores y dificultades con los que se pueden encontrar los estudiantes.

A continuación, formulamos las tareas seleccionadas para nuestra unidad didáctica, sus relaciones con las expectativas de aprendizaje y con los contenidos del tema. Finalmente, presentamos el análisis de actuación, en el que describiremos algunos criterios, aspectos e instrumentos que permitirán establecer, una vez se implemente la unidad didáctica, en qué medida los estudiantes lograron los objetivos y en qué medida las tareas contribuyeron a las capacidades y competencias propuestas.

1. Análisis de contenido

El análisis de contenido proporciona un conjunto de herramientas para analizar el contenido matemático desde la perspectiva de la matemáticas escolares (Gómez, 2007). Estas herramientas, denominadas *organizadores del currículo* (Rico, 1997), son la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología. En este apartado describiremos en detalle nuestro tema desde la perspectiva de cada uno de estos organizadores del currículo.

1. Estructura conceptual

Resumimos la estructura conceptual del tema mediante un mapa conceptual que realizamos de acuerdo con el siguiente procedimiento. Primero, elaboramos una lista de los elementos de carácter conceptual y procedimental relacionados con el tema de las matemáticas escolares, con base en información procedente de diferentes textos de matemáticas escolares y universitarios. Luego, establecimos las relaciones entre esos elementos. Finalmente, diseñamos

un mapa conceptual en el que recogimos los elementos y los organizamos de tal manera que se mostraran las relaciones de forma coherente, como lo expone la figura 1. Su descripción y sus posibles relaciones se encuentran a continuación.

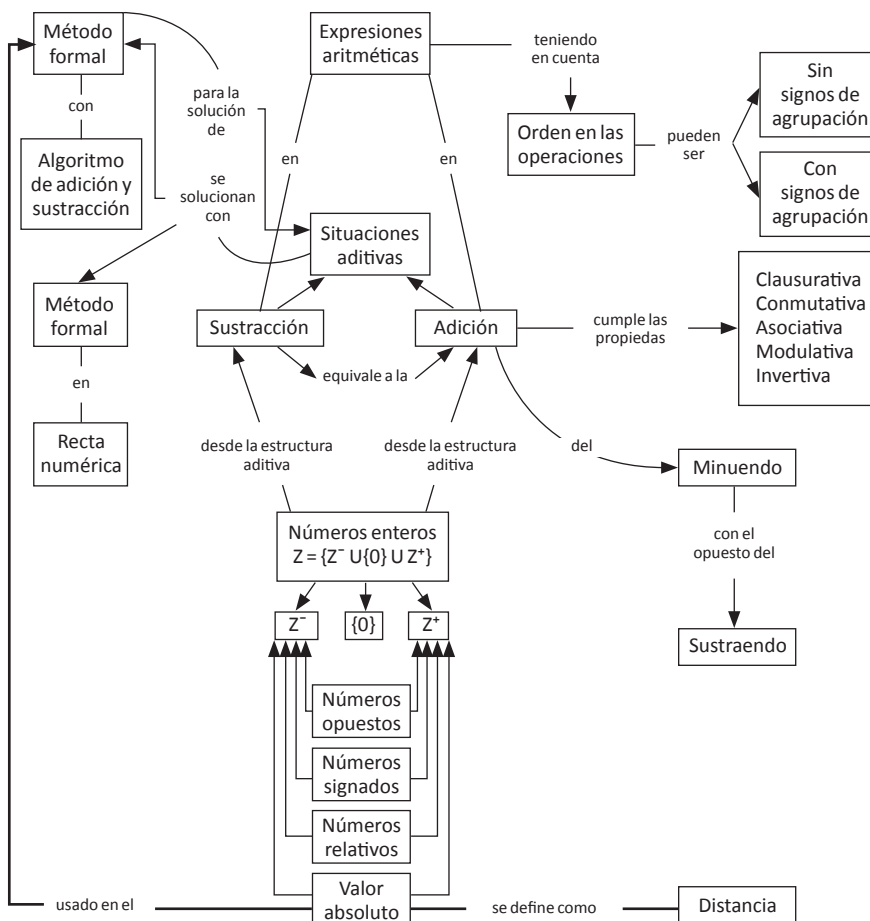


Figura 1. Mapa de la estructura conceptual para la adición y sustracción de los números enteros

Partimos del conjunto de los números enteros (que denotamos Z) que contiene el 0, los números enteros positivos (Z^+) y los números enteros negativos (Z^-). Denominamos estos números como números opuestos. Por ejemplo, $+3$ (que es un elemento de Z^+) es el opuesto de -3 (que es un elemento de Z^-).

Este concepto es esencial, junto con el concepto de orden en \mathbb{Z} , para poder posteriormente organizar los números enteros en una línea recta denominada “recta numérica” (véanse sistemas de representación).

Podemos hablar entonces del valor absoluto de un número entero “ x ”, que denotaremos como $|x|$. Es posible realizar adiciones y sustracciones (entiéndase sustracción como la adición del minuendo con el opuesto del sustraendo) con los elementos de \mathbb{Z} , donde el resultado de esas operaciones siempre será un número entero (positivo o negativo). Por ejemplo, si a y b son números enteros, el resultado de $|a - b|$ es un número entero y es la distancia entre a y b . Para ejecutar esa expresión, se procede a realizar la sustracción entre a y b , luego se aplica la definición del valor absoluto y, finalmente, se obtiene el resultado.

Para realizar una expresión aritmética que involucra solo adición y sustracción de números enteros (por ejemplo, $3 + 4 - 8 + 1$), es posible utilizar las propiedades clausurativa, conmutativa, asociativa, modulativa e invertiva. Es más, si una expresión aritmética del tipo mencionado contiene signos de agrupación —por ejemplo $2 + [3 - (4 + 5)]$ — es posible operar teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones. Por ejemplo, la expresión aritmética $2 + [3 - (4 + 5)]$ se puede ejecutar de la siguiente forma: $2 + [3 - (4 + 5)] = [3 - (9)] + 2 = [3 - 9] + 2 = [-6] + 2 = -6 + 2 = -4$. En el procedimiento empleado hemos usado la jerarquía de las operaciones y de la propiedad conmutativa de la adición. Otra forma de realizar esa expresión es utilizando la recta numérica: para resolver $4 + 5$ se procede a ubicar el número 4 en ella y luego se avanzan 5 unidades a la derecha. El resultado será el número donde termina esa acción, en este caso +9. Para resolver $3 - 9$ se ubica el número 3 en la recta numérica y se cuentan 9 unidades a la izquierda del número, cuyo resultado será -6. Reiterando este procedimiento se obtiene como resultado final -4.

De acuerdo con la descripción anterior, podemos decir que si tenemos dos o más elementos del conjunto de los números enteros, se pueden realizar adiciones y sustracciones entre ellos a partir de diferentes situaciones aditivas. Esto se puede hacer mediante el método formal, aplicando los algoritmos correspondientes en una expresión aritmética, o mediante el método gráfico, usando la recta numérica.

2. Sistemas de representación

Describimos los sistemas de representación más relevantes para nuestro tema, los elementos que hacen parte de ellos y las relaciones que hemos establecido. Un sistema de representación responde a las preguntas ¿qué representaciones

hay asociadas con el tema? y ¿qué relaciones se pueden establecer entre esas representaciones? (Gómez y Cañadas, 2011). Teniendo en cuenta esas dos preguntas, identificamos los sistemas de representación que consideramos relevantes para nuestro tema: simbólico, gráfico, manipulativo y verbal. Los presentamos, junto con diferentes representaciones de elementos del tema, en la figura 2.

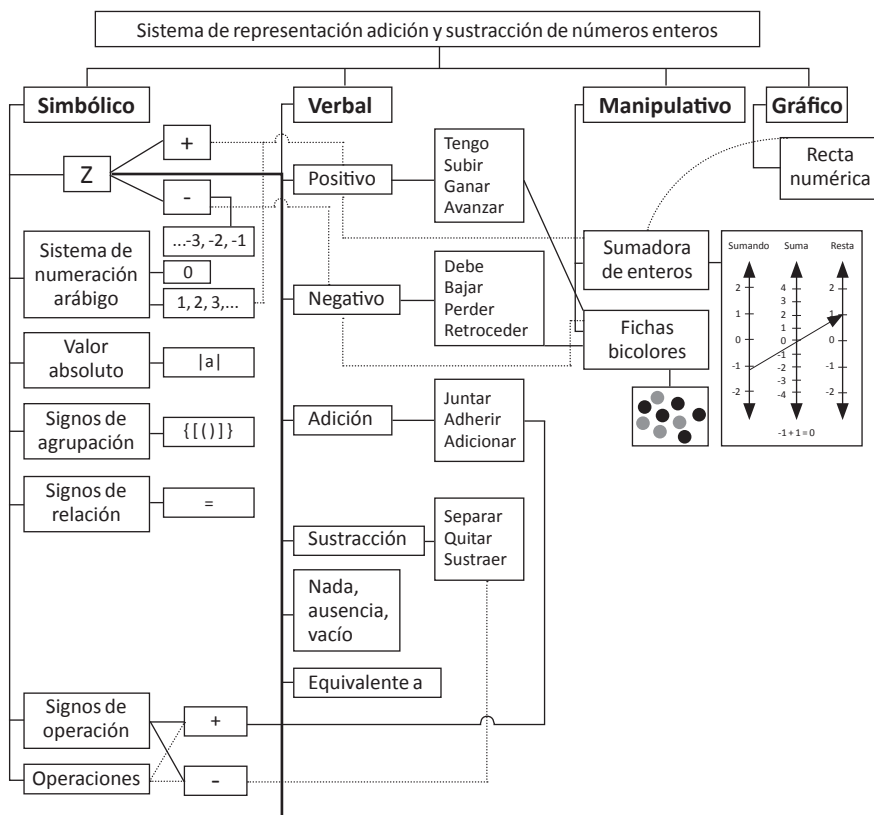


Figura 2. Sistemas de representación de la adición y sustracción de números enteros

Sistema de representación simbólico

El sistema de representación simbólico consiste en el conjunto de símbolos (caracteres) que pueden asociarse con nuestro tema. Esto es, el sistema de numeración utilizado, los signos de las operaciones empleadas y otros símbolos

que tienen significados precisos y coherentes dentro del tema. Por ejemplo, usamos el sistema de numeración arábigo para designar los elementos del conjunto Z . Como se aprecia en el ejemplo anterior, el símbolo $+$ forma parte de ese sistema (que denota un número positivo o una adición), el símbolo $-$ (que denota un número negativo o una sustracción), el símbolo $||$ (que denota el valor absoluto de un número entero), el símbolo $=$ (que denota “igual a”) y los signos de agrupación $()$, $[]$ y $\{ \}$.

Sistema de representación gráfico

El sistema de representación gráfico, como su nombre lo indica, consiste en las posibles representaciones que se pueden dibujar o graficar asociadas con los conceptos y procedimientos del tema estudiado. Entre estos, encontramos la recta numérica, el plano cartesiano, diagramas estadísticos, diagramas de Venn, diagrama de Euler y el diagrama sagital. En nuestra unidad didáctica, solo utilizamos la recta numérica como representación gráfica. Se trata de una línea recta, horizontal o vertical, donde se ubican los números enteros que queramos representar. El 0 es el número que separa los números positivos de los negativos. La distancia entre cada uno de los números es constante y están organizados teniendo en cuenta el orden de Z . Mostramos un ejemplo de recta numérica en la figura 3.

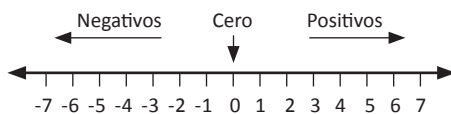


Figura 3. Recta numérica

Sistema de representación manipulativo

El sistema de representación manipulativo consiste en los posibles elementos manipulables relacionados con un tema matemático específico. Estos fueron producto de una búsqueda en diferentes medios, como textos, internet y nuestra propia experiencia. Para nuestro tema encontramos los dados de colores, el tablero agujereado, las fichas bicolores, los naipes, las varillas chinas, la sumadora de enteros y la calculadora. Para el diseño de nuestra unidad didáctica seleccionamos las fichas bicolores, la sumadora de enteros y la calculadora. Los describiremos en detalle en el próximo apartado.

Sistema de representación verbal

El sistema de representación verbal consiste en representar conceptos y procedimientos mediante palabras, expresiones y oraciones cortas, escritas u orales. Los nombres de las operaciones de los números enteros y sus signos correspondientes, junto con el nombre de los números mencionados anteriormente, hacen parte de este sistema de representación.

Un “número positivo” (elemento de Z^+) se interpreta como “tener” algo (por ejemplo, “tengo” manzanas, significa tener un número dado de manzanas); por el contrario, un “número negativo” (elemento de Z^-) se interpreta como “deber” algo (por ejemplo, “debo” dinero, significa tener un pasivo de dinero). “No tener nada” significa tener una cantidad igual a 0. Realizar una adición se interpreta como “adherir” o “juntar” dos o más cosas y realizar una sustracción se interpreta como “separar” o “quitarle” una cantidad a algo.

Relaciones entre los sistemas de representación considerados

A continuación, describimos cómo se relacionan algunos elementos pertenecientes a los sistemas de representación descritos (figura 2) y que tuvimos en cuenta para el diseño de las actividades en la unidad didáctica. Por ejemplo, las operaciones de adición y sustracción entre dos o más números enteros (sistema de representación simbólico) pueden dar como resultado un número positivo o un número negativo, y ser interpretado en una situación financiera como “saldo a favor” o “saldo en contra” (sistema de representación verbal). Este resultado también puede ser verificado utilizando la sumadora de enteros (sistema de representación manipulativo), expresado en la recta numérica (sistema de representación gráfico) que contiene números escritos con el sistema de numeración arábigo y comunicado de manera verbal.

Examinemos otro ejemplo: $-7 + 3$. Esta expresión corresponde al sistema de representación simbólico. También se puede expresar “debo 7 y tengo 3” en el sistema de representación verbal. Podemos obtener un resultado mediante la representación y ejecución de la operación en la recta numérica (sistema de representación gráfico) y expresarlo como “aún debo 4” (sistema de representación verbal).

3. Análisis fenomenológico

El análisis fenomenológico de un tema da respuesta a la pregunta: ¿cómo se organizan los fenómenos que dan sentido al tema? (Gómez y Cañadas, 2011). Para dar respuesta a esa pregunta, describiremos los fenómenos asociados con

el tema, las subestructuras matemáticas y los contextos numéricos que los organizan, y las relaciones entre estas subestructuras y contextos.

Fenómenos

Mencionamos algunos fenómenos relacionados con la adición y sustracción de números enteros. El fútbol es un deporte ampliamente aceptado en la cultura colombiana. En este deporte existen, por ejemplo, los goles a favor (que se pueden interpretar como números positivos) y los goles en contra (que se pueden interpretar como números negativos). Es posible dar respuesta a la pregunta “¿cuál es el total neto de goles del equipo A?” mediante una adición.

En la época del diseño de esta unidad didáctica, algunos mineros quedaron atrapados en una mina de Chile a más de 1000 metros de profundidad. Dado que la posición de los mineros se puede interpretar como una posición negativa respecto al suelo (bajo el suelo), es posible preguntarse ¿cuál es la distancia entre su posición y la superficie? Otro fenómeno cotidiano es el recorrido que hace un mensajero, un bus o un ciclista en una calle recta entre el norte y el sur de una ciudad colombiana. Dado que las calles están numeradas con números enteros (las calles positivas están al norte y las negativas, al sur) es posible plantearse qué distancia recorren ellos diariamente. El manejo de dinero es también un ejemplo en el que podemos usar los números enteros para plantear una situación contable. Por ejemplo, “deber dinero” se puede representar con un número negativo y tener activos se representa por un número positivo. Finalmente, es posible medir la temperatura de una ciudad colombiana en grados Celsius. Esta escala maneja números positivos y negativos (por ejemplo, -3°C significa “menos 3 grados Celsius”) y se puede ver en los noticieros o en los periódicos. Las preguntas planteadas en los diferentes fenómenos presentados hacen referencia a una pregunta más general: ¿cuáles son los valores?

Subestructura matemática

El objetivo principal de la unidad didáctica es que los estudiantes trabajen expresiones aritméticas involucradas en situaciones de la vida cotidiana y en situaciones con fines académicos. Identificamos una única subestructura matemática (expresiones aritméticas presentes en situaciones aditivas) que permite organizar los fenómenos de nuestro tema.

Contexto numérico y su relación con la subestructura mencionada

Uno de los propósitos de la unidad didáctica es que los estudiantes operen (ejecuten) expresiones aritméticas que involucran adiciones y sustracciones de

números enteros. El contexto asociado con nuestro tema lo hemos denominado “contexto operacional”. Para realizar adiciones y sustracciones de números enteros y hallar un resultado es posible emplear las propiedades y procedimientos descritos en la estructura conceptual. Por lo tanto, para resolver una expresión aritmética que representa una situación aditiva es posible aplicar algoritmos y propiedades para su solución.

4. Relación entre la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico

Con los elementos del conjunto Z (números enteros, operaciones) se pueden plantear expresiones aritméticas (por ejemplo, $-287 + 75$) y realizar operaciones que representen una situación aditiva (por ejemplo, Arquímedes nació en -287 a. de C. y vivió 75 años ¿en qué año murió?). Es posible ejecutarlas utilizando las propiedades de la adición y la sustracción. Además, el resultado de esas operaciones se puede verificar con la recta numérica y la sumadora de enteros. La figura 4 muestra un resumen de esa posible relación.

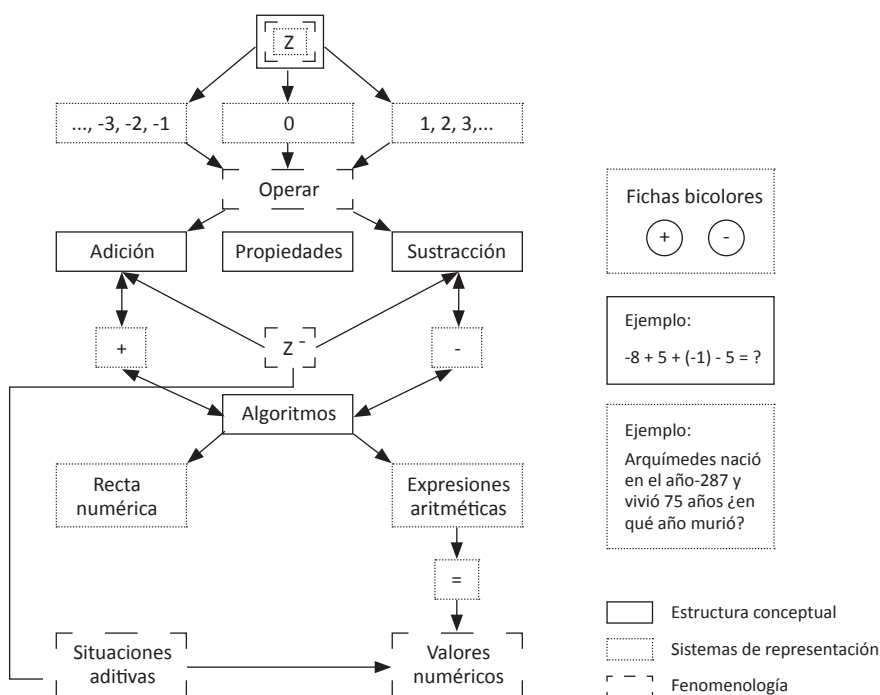


Figura 4. Mapa general para la adición y sustracción de números enteros

2. Análisis cognitivo

En el análisis cognitivo, el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2007). En este análisis, abordamos los objetivos de aprendizaje que se han propuesto para la unidad didáctica, las capacidades que pretendemos que los estudiantes activen y cómo estas contribuyen al desarrollo de su competencia matemática; así como, también, las posibles formas en que los estudiantes pueden solucionar una tarea del tema, y las dificultades y errores que se pueden presentar en su solución.

1. Objetivos de aprendizaje

Los objetivos previstos para la unidad didáctica están basados en los estándares del MEN (2006). Este documento curricular indica que los estudiantes deben justificar procedimientos aritméticos, utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones al terminar grado séptimo. Además, deben formular y resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en diferentes contextos y dominios numéricos. Teniendo en cuenta estos aspectos, la unidad didáctica que proponemos pretende ofrecer herramientas que permitan a los estudiantes resolver problemas en diferentes situaciones de la vida cotidiana que involucren la adición y sustracción de números enteros. Con base en los documentos curriculares, hemos formulado objetivos que contribuyen al dominio del vocabulario matemático, la justificación de procedimientos y la resolución de problemas en situaciones contextualizadas.

Objetivo 1. Reconocer y utilizar el vocabulario empleado en un enunciado que involucre adición y sustracción de números enteros.

Objetivo 2. Explicar cada paso en la realización de una tarea matemática, teniendo en cuenta las relaciones y propiedades de la adición y sustracción de los números enteros.

Objetivo 3. Interpretar y resolver problemas en diferentes situaciones de la vida real que involucren la adición y sustracción de números enteros.

Podemos observar que los objetivos 2 y 3 se relacionan directamente con lo que se espera que logren los estudiantes al terminar el grado séptimo. Por tanto, están vinculados con el nivel educativo y el contenido temático. En cambio, el objetivo 1 es necesario para lograr los otros dos.

2. Capacidades

En el análisis cognitivo, una capacidad se define como una expectativa del profesor sobre la actuación de un estudiante respecto a cierto tipo de tarea asociada con un tema matemático. Las capacidades se manifiestan mediante conductas observables de los estudiantes (González, Gómez y Lupiáñez, 2010). Para el análisis cognitivo de nuestro tema, identificamos una serie de capacidades que esperamos que los estudiantes activen y desarrollen en la realización de las tareas propuestas. Las capacidades están relacionadas con los organizadores del currículo que se han trabajado previamente. Por ejemplo, para la recta numérica se identifican capacidades como la correspondencia de un número entero a un punto, la solución de adiciones y sustracciones entre números enteros, la traducción de una situación aditiva entre diferentes sistemas de representación y la verificación de los resultados obtenidos. Hemos denotado las capacidades con la letra “C” acompañada de un número. En la tabla 1 presentamos las capacidades previstas.

Tabla 1
Capacidades previstas

Capacidad	Descripción
C1	Corresponder el conjunto de los números enteros y los puntos de la recta numérica
C2	Ubicar números positivos y negativos en la recta numérica teniendo al cero como referente
C3	Realizar adiciones y sustracciones entre números enteros utilizando la recta numérica
C4	Hallar el valor absoluto de un número entero
C5	Ejecutar operaciones indicadas de acuerdo a los signos de agrupación
C6	Aplicar la propiedad asociativa, conmutativa, clausurativa o modulativa de la adición para los números enteros
C7	Traducir una situación aditiva a una expresión aritmética, gráfica o verbal; y viceversa
C8	Verificar los resultados obtenidos a partir de la formulación de una situación aditiva
C9	Interpretar los resultados de acuerdo con su signo y expresarlos en un lenguaje matemático apropiado
C10	Dado un par de números enteros, ejecutar la operación indicada y obtener un resultado

Capacidad	Descripción
C11	Plantear la operación a realizarse (adición o sustracción) de acuerdo con la situación propuesta en un problema
C12	Identificar el signo de un número de acuerdo con el contexto de la situación planteada
C13	Aplicar la simplificación de ceros en el momento de realizar operaciones
C14	Aumentar los ceros simplificados al dar la respuesta de un problema
C15	Identificar las cantidades y datos relevantes para la resolución de un problema
C16	Calcular mentalmente operaciones de adición y sustracción con números enteros
C17	Validar los procedimientos aritméticos realizados en una expresión

Las capacidades se pueden relacionar con la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico. Por ejemplo, C12 es una capacidad de tipo conceptual, ya que requiere los conceptos número negativo y número positivo para su identificación (sistema de representación verbal) en diferentes situaciones (análisis fenomenológico). La capacidad C10 es de tipo procedimental, ya que para ejecutar la operación se emplea un procedimiento algorítmico que permite encontrar un resultado.

El desarrollo de ciertas capacidades en la solución de una o varias tareas contribuye al logro de los objetivos de aprendizaje previstos. Por ejemplo, las capacidades C7, C9, C11, C12 y C15 están asociadas con el objetivo 1. Así, la capacidad C7 contribuye al uso de la terminología involucrada en expresiones aritméticas, que hace referencia al objetivo 1. Cuando las capacidades se relacionan secuencialmente, forman lo que se denomina un camino de aprendizaje.

3. Caminos de aprendizaje

Un camino de aprendizaje es la previsión que el profesor hace de la secuencia de capacidades que el estudiante puede poner en juego para realizar una tarea matemática determinada. Se construye a partir de la lógica con la que el profesor resuelve dicha tarea y a partir del conocimiento que él tiene sobre el aprendizaje de los estudiantes. El camino de aprendizaje en la unidad didáctica cumple un papel fundamental, ya que describe los posibles pasos que los estudiantes pueden emplear en la realización de cada tarea. Además, los caminos de aprendizaje proporcionan al profesor información que puede ser utilizada para diseñar, evaluar y seleccionar tareas que contribuyan al logro de los objetivos.

Los posibles caminos de aprendizaje que identificamos se relacionan con los objetivos propuestos. Por ejemplo, para el logro del objetivo 3, teniendo en cuenta los cuatro pasos para la resolución de problemas propuestos por Pólya (1973), el estudiante —en un primer paso— (comprender el problema) puede activar ciertas capacidades (C12 y C15). De esta forma, a partir de la conexión de capacidades, se puede identificar un posible camino de aprendizaje para cada tarea y este, a su vez, se relaciona con los objetivos propuestos (esto será tratado en detalle en el análisis de instrucción). En la figura 5 mostramos los posibles caminos de aprendizaje para el objetivo 3.

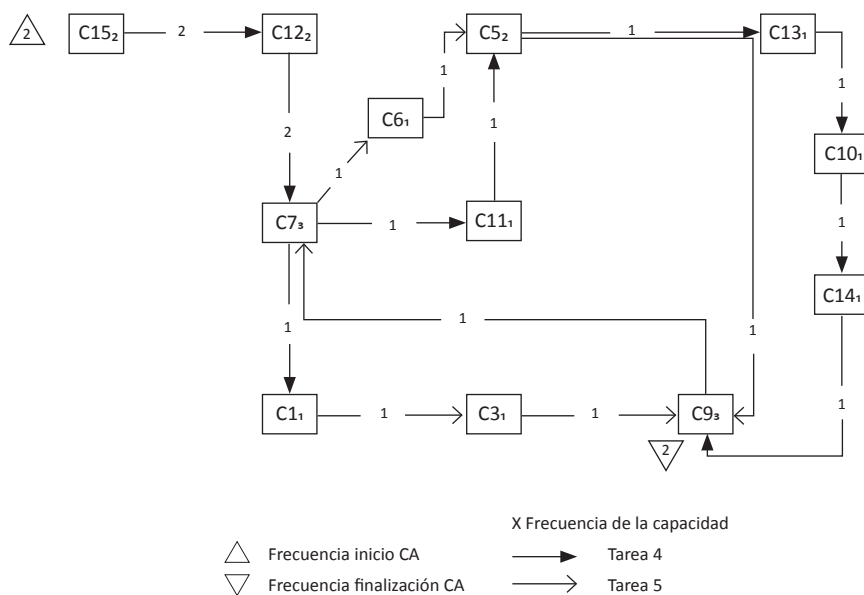


Figura 5. Camino de aprendizaje del objetivo 3

4. Dificultades y errores

Las dificultades y errores son limitaciones en el aprendizaje que los estudiantes presentan al resolver ciertas tareas matemáticas. Consideramos las limitaciones relacionadas con la adición y sustracción de números enteros; por ello, hemos identificado una serie de posibles errores que describen manifestaciones equivocadas en las que pueden incurrir los estudiantes. Por ejemplo, prescindir

del signo del número entero al realizar operaciones, interpretar la resta de números negativos como la acción de quitar el sustraendo al minuendo, u omitir los signos de agrupación al resolver una expresión aritmética son algunos de estos errores.

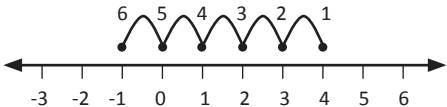
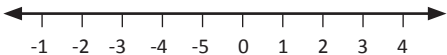
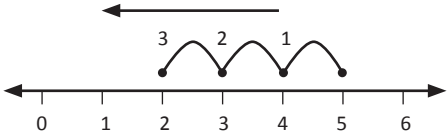
El anexo 1² recoge los errores identificados, así como su relación con las dificultades. Entre estas dificultades se encuentran: dificultad en la utilización del lenguaje matemático y verbal en situaciones aditivas, dificultad del uso de la recta numérica para la adición y sustracción de números enteros o dificultad para realizar operaciones que involucran números enteros. Por ejemplo, la última dificultad hace referencia al error de omitir los signos de agrupación, puesto que es un procedimiento realizado cuando se opera con números enteros. En la tabla 2 presentamos los posibles errores y dificultades relacionados con nuestro tema.

Tabla 2
Dificultades y errores

Error	Enunciado
	D1. Dificultad en la utilización del lenguaje matemático y verbal en situaciones aditivas
E1	<p>No diferenciar entre la sustracción y el concepto de número negativo en su representación verbal y simbólica.</p> <p>Ejemplo: cinco “menos” ocho. Se nota la ambigüedad sobre si el menos se refiere al signo del número o al de la operación.</p> <p>En inglés esta distinción es evidente:</p> <p><i>Five minus eight. $5 - 8$</i></p> <p><i>Five plus negative eight. $5 + (-8)$</i></p> <p><i>Five minus negative eight. $5 - (-8)$</i></p>
E2	<p>Plantear inadecuadamente una expresión aritmética, malinterpretando palabras como “excede”, “disminuido en, aumenta en, diferencia entre...”</p> <p>Ejemplo: ¿Cuál es la diferencia entre 5 y -2?</p> <p>El 5 es mayor que 2.</p>
E3	<p>Obtener un resultado negativo para una distancia.</p> <p>$3 - (-9)$</p> <p>“Un lado del rectángulo mide -6 cm” <input type="text"/></p>

Continúa

² Los anexos de este capítulo se encuentran en <http://funes.uniandes.edu.co/1890/>.

Error	Enunciado
	D2. Dificultad en la utilización de la recta numérica para la adición y sustracción de números enteros
E4	<p>Uso incorrecto de la recta numérica para realizar operaciones aditivas: iniciar contando desde el número que indica la operación, lo que llevará a obtener en el resultado una cantidad mayor o menor a la correcta. El estudiante cuenta los puntos que se ha desplazado y no los espacios entre estos.</p> <p>Ejemplo: $4 - 6 = -1$</p> 
E5	<p>Ordenar los números negativos y positivos en la recta numérica de forma que extrapolan el orden de los naturales a los negativos.</p> 
	D3. Dificultad para realizar operaciones que involucran números enteros
E6	<p>Cambiar el orden de los números en una operación para efectuar una operación conocida.</p> <p>Ejemplo: $2 - 5 = 5 - 2$</p>
E7	<p>Omitir el signo cuando el resultado de una operación es un número negativo.</p> <p>Ejemplo: $15 - 20 = -5$</p> <p>R / 5</p>
	D4. Dificultad en la interpretación de la sustracción entre números enteros
E8	<p>Utilizar la definición de resta como un desplazamiento hacia la izquierda en la recta numérica, omitiendo los demás signos implicados en la operación.</p>  <p>Ejemplo: $5 - (-3) = 2$ porque restar es ir hacia la izquierda.</p>

Error	Enunciado
E9	Omitir los signos de agrupación al resolver una expresión aritmética. Ejemplo: $4 - (2+5) - 7 = 4 - 2 + 5 - 7 = 0$
E10	Prescindir del signo del número entero al realizar operaciones. Ejemplo: En operaciones como $237 + 89 - 89 + 67 - 92 + 92$ Los estudiantes optan por prescindir del signo “-” que acompaña a 89 y efectúan la adición $89+67$.
E11	Utilización inadecuada de la ley de signos. Ejemplo: $-4-5=9$ $-3-1=+3$, porque menos por menos es igual a más.
E12	Interpretar la resta de números negativos como la acción de quitar el sustraendo al minuendo. Ejemplo: $8 - (-3) = 5$
E13	Adicionar o sustraer el inverso aditivo en una expresión aritmética. Ejemplo: $-10-(-5)=5$ porque $-10-(+5)$ resto.
D5. Dificultad para dar sentido a un resultado negativo	
E14	Pensar que siempre el minuendo debe ser mayor que el sustraendo (como ocurre en los naturales). Ejemplo: $20-21$: No se puede
E15	Asegurar que la respuesta a una operación no puede dar negativa. Ejemplo: $-2+1 = -1$ pero ¿por qué no me parece lógico?
D6. Dificultad en la utilización del valor absoluto	
E16	Pensar que si el valor absoluto de un número negativo es una cantidad positiva, el valor absoluto de un número positivo será un número negativo.

5. Competencias

El Proyecto PISA entiende por competencia el conjunto de capacidades puestas en juego por los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o formulan problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Las competencias o procesos generales elegidos por el proyecto PISA son: pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones, y usar herramientas y recursos (OCDE, 2004, p. 40;

Rico, 2007). En este trabajo, hemos seleccionado las competencias modelar, plantear y resolver problemas, y representar. Estas competencias se encuentran relacionadas con los estándares (MEN, 2006), ya que en este documento se habla de los cinco procesos generales de la actividad matemática, refiriéndose a formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar y, por último, formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos (MEN, 2006, p. 51). A continuación, definimos cada una de las competencias seleccionadas.

Modelar (M). Esta competencia incluye: (a) estructurar el campo o situación que va a modelarse, (b) traducir la realidad a una estructura matemática, (c) interpretar los modelos matemáticos en términos reales (trabajar con un modelo matemático), (d) reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados, (e) comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones), y (f) dirigir y controlar el proceso de modelización.

Plantear y resolver problemas (PR). Esta competencia incluye (a) plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados) y (b) resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.

Representar (R). Esta competencia incluye (a) decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones, y (b) escoger y relacionar diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito (Rico, 2007).

Estas competencias se relacionan con los objetivos propuestos. Por ejemplo, el objetivo 3 se refiere a la interpretación y resolución de problemas en diferentes situaciones de la vida real, que involucren la adición y sustracción de números enteros, y se relaciona directamente con la competencia plantear y resolver problemas. De la misma manera, también aporta a las competencias modelar y representar, puesto que las tareas que contribuyen a este objetivo contribuyen a estas competencias. Por ejemplo, si elegimos una tarea relacionada con la competencia representar, el estudiante puede decodificar y codificar la situación, interpretarla y traducir desde la representación verbal (oriente, occidente, norte, sur, ingresos, gastos, etc.) —relacionándolos con el sistema de representación simbólico al momento de usar los números enteros y operaciones entre ellos—, y luego, representar la situación en la recta numérica. Esta posible actuación del estudiante evidencia la relación que existe con las representaciones relevantes a nuestro tema y que a su vez son tratadas en cada uno de los objetivos.

3. Análisis de instrucción

En el análisis de instrucción, el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción (Gómez, 2007). De cara a realizar el análisis de instrucción, analizamos las cinco tareas que componen la unidad didáctica, los materiales y recursos que involucran, y sus caminos de aprendizaje. Estas tareas fueron producto del trabajo sobre la estructura conceptual, los sistemas de representación, el análisis fenomenológico, las capacidades y los posibles caminos de aprendizaje previstos para su solución, con el propósito de lograr los objetivos de aprendizaje propuestos. En este apartado describimos brevemente las tareas de la unidad didáctica. Además, analizamos con mayor detalle una de ellas, al describir sus características, las condiciones para su aplicación y un estudio de su complejidad.

1. Recursos y materiales empleados

Un material es un elemento diseñado con un propósito específico relacionado con un tema matemático en particular y cuya función es facilitar (promover) el aprendizaje del estudiante relacionado con el tema. Un recurso no tiene ningún objetivo específico predeterminado y puede tener múltiples funciones (Carretero, Coriat y Nieto, 1993). Describimos dos recursos utilizados en nuestra unidad didáctica: la sumadora de enteros y las fichas bicolores. La sumadora de enteros consiste en tres rectas numéricas paralelas, con una distancia específica entre ellas. El objetivo es que si representamos números enteros en las rectas de los laterales y trazamos una recta que una ambos números, esa recta corte a la recta numérica del centro en un número que es el resultado de la adición de los números representados inicialmente en las rectas de los lados (figura 6). Además de obtener resultados, este recurso permite verificar el resultado de una adición (o sustracción) entre dos o más números enteros. Por ejemplo, para ejecutar $4 - 5 + 6$ podemos aplicar la propiedad asociativa con el propósito de hallar el valor de la resta $(4 - 5) + 6$ y así obtener una expresión equivalente que contiene solo dos números, en este caso $-1 + 6$. Finalmente, se sigue el procedimiento mencionado para hallar su resultado.

Las fichas son bicolores y tienen una determinada forma geométrica (por ejemplo, circulares, como las fichas de damas chinas). Cada ficha tiene valor absoluto igual a 1. Un color indica que la ficha representa un valor positivo y el otro color indica valor negativo. Así, dos fichas positivas equivalen a $+2$ y tres fichas negativas equivalen a -3 .

Los materiales que van a utilizar los estudiantes en nuestra unidad didáctica son hojas de papel, lápiz y borrador, bolígrafo, cuaderno y regla, con el fin de tomar apuntes del tema y trazar líneas rectas.

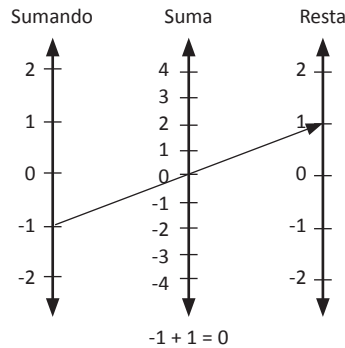


Figura 6. Sumadora de enteros

2. Descripción y formulación de las tareas

La primera tarea está relacionada con los cuatro recorridos que realiza un ciclista en sus entrenamientos y que pueden ser representados en la recta numérica.

Tarea 1. Lucho el ciclista

Lucho el ciclista entrena diariamente para una competencia. Los últimos cuatro días decidió entrenar sobre terreno llano, e hizo un recorrido sobre una autopista recta, ubicada justo enfrente de su casa, que conecta el occidente con el oriente. Siempre tiene un acompañante con quien regresa a casa en carro después del entrenamiento. En la tabla A aparecen los recorridos que realizó cada día en su bicicleta saliendo desde su casa.

Tabla A

Día	Recorrido
Primero	Recorrió 15 km hacia el oriente, tomó agua y avanzó 40 km más. Descansó un momento y luego recorrió 30 km más en la misma dirección.
Segundo	Recorrió 10 km hacia el oriente, avanzó 25 km más y se devolvió 30 km por la misma autopista.
Tercero	Recorrió 20 km hacia el occidente, se devolvió 30 km por la misma autopista y avanzó de nuevo hacia occidente 15 km más.
Cuarto	Recorrió 50 km hacia el occidente, descansó un momento avanzó 25 más en la misma dirección y luego recorrió 30 km al occidente.

Tabla C

Pasos	Justificación de cada paso
$\{-5+[-3-2-(-4+4)-1]-10\}$	

En la tercera tarea, se mencionan los recorridos realizados por un minero en un día de trabajo. Con estos recorridos se pretende dar solución a una situación aditiva mediante el planteamiento de una expresión aritmética que los involucre.

Tarea 3. El minero

Un minero está realizando trabajos en un túnel de una mina de esmeraldas de Boyacá, como muestra la figura A.

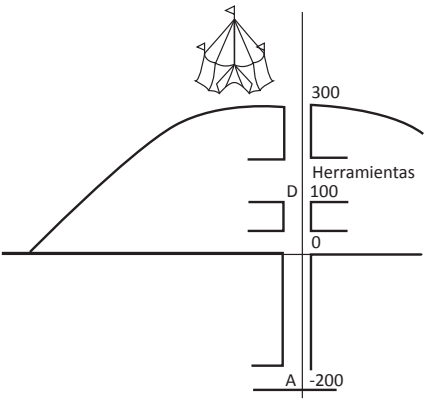


Figura A

¿Cómo podrías utilizar la recta numérica (esta la entregará tu profesor) para representar los puntos relacionados con los siguientes desplazamientos hechos por los mineros?

Inicialmente, el minero está ubicado en la sección (A); de allí sale a almorzar al campamento ubicado en la cima de la montaña y luego, según indicaciones de su jefe, debe llevar las herramientas a un compañero que se encuentra en el punto D; estando allí, cae en la cuenta de que dejó la pica olvidada en el punto A y se devuelve a buscarla para hacer la entrega en el punto indicado por su jefe.

Su compañero utiliza las herramientas y se devuelve con él al punto A de la excavación.

¿Mediante qué expresión aritmética puedes representar los trayectos realizados por cada minero?

¿Podrías indicar con ayuda de las fichas bicolores el valor de estos desplazamientos? ¿Cuál sería?

La cuarta tarea hace referencia a una situación financiera sobre la compra, ahorro y gastos que tiene un estudiante que está decidiendo si comprar o no un monopatín (*skateboard* en inglés) con base en su estado financiero. Para ello, se debe proponer una expresión aritmética que la resuelva.

Tarea 4. El skater

Carlos Díaz es un estudiante de grado séptimo que recibe una mesada de \$235 000. Al final de cada mes realiza un balance de sus finanzas, utilizando para ello los comprobantes correspondientes.

Quiere comprar una tabla (*skateboard*) que tiene un valor de \$350 000 y para ello ahorra \$95 000 mensuales y procura ahorrar al máximo el dinero destinado a onces gastando en ello \$50 000 al mes. Va a cine con sus amigos tres veces al mes, en lo cual gasta \$17 000 en la primera película, \$15 000 en la segunda y \$20 000 en la tercera, y quiere comprar un videojuego para XBOX 360 por valor de \$124 000.

¿Puede comprar Carlos el videojuego? Justifica tu respuesta.

¿Es posible plantear una expresión aritmética que involucre números enteros mostrando la situación? ¿Cuál sería esta expresión?

Si además del dinero de la mesada, los abuelos le regalan dinero cada domingo, para recibir en total \$32 000, y arregla el jardín de la casa cada 15 días (por esta labor su padre le paga \$30 000 mensuales), ¿le alcanzará el dinero para adquirir la tabla? ¿Cuánto dinero le faltaría o le sobraría?

En la quinta tarea se describe una serie de recorridos que realiza un repartidor de pizzas por una avenida de Bogotá cuando sale a entregar unos pedidos. El repartidor hace tres recorridos y en uno de ellos debe decidir el mejor momento para el pago de una factura según algunas condiciones. Además, estos recorridos se pueden representar en una recta numérica. También, es posible plantear una expresión aritmética que los describa.

Tarea 5. El repartidor de pizzas

Una pizzería en Bogotá está ubicada sobre la avenida Caracas con calle 0, es decir, en la calle que separa al norte del sur. El repartidor de pizzas distribuyó los pedidos del sur y los del norte de la siguiente manera.

En el primer recorrido entregó una pizza cinco cuadras en dirección sur de la pizzería, dos pizzas 10 cuadras más en dirección sur del sitio del primer pedido.

Para la tercera entrega, antes de arrancar, verifica el pedido y advierte que no es correcto, así que debe devolverse a la pizzería.

Da inicio al segundo recorrido con el pedido errado, que estaba ocho cuadras al sur de la segunda entrega. Partió de allí en dirección norte y entregó cinco pizzas 12 cuadras al norte del último lugar. El último pedido lo entregó 17 cuadras al norte de la última entrega.

Para el tercer recorrido debe entregar cuatro pizzas en un edificio de apartamentos ubicado nueve cuadras al norte de la pizzería, dos pizzas cuatro cuadras al norte de la entrega realizada y la última pizza veintiún cuadras al sur de la última entrega.

Utiliza la recta numérica entregada para representar la situación.

Utilizando colores diferentes, representa cada uno de los tres recorridos realizados por el repartidor.

Además de entregar los pedidos, el repartidor debe cancelar una factura a uno de los proveedores que está ubicado ocho cuadras al norte de la pizzería y la orden es realizar este pago al finalizar alguno de los recorridos del día. Teniendo en cuenta que debe consumir la mínima cantidad de combustible y que solo puede cancelar la factura al terminar cualquiera de los tres recorridos:

¿Cuál es el mejor punto para desplazarse hacia la oficina del proveedor?

¿Es posible plantear una expresión que permita ver los desplazamientos del repartidor y que incluya el pago al proveedor?

Para encontrar la distancia a la que quedó el repartidor de la pizzería luego de entregar el último pedido de su jornada, ¿es posible utilizar la expresión planteada anteriormente? Indica cuál es la distancia.

El desarrollo de estas tareas se debe realizar en etapas y con recursos y materiales. Dichas etapas son comunes para todas las tareas, dependiendo del recurso que se vaya a utilizar. Por ejemplo, para la tarea Lucho el ciclista, las etapas son las siguientes.

Primera etapa. En esta fase inicial se realizan algunos comentarios sobre la situación; en particular, acerca de cómo entrena un ciclista. Es decir, se inicia el desarrollo con una breve inducción sobre la situación por tratar. En ella se esperan las opiniones y comentarios de los estudiantes y del profesor.

Segunda etapa. En esta fase de desarrollo se entrega la tarea impresa y la recta numérica. La etapa se desarrollará en parejas. Los estudiantes pueden presentar dudas y el profesor los orientará mediante ejemplos y preguntas.

Tercera etapa. Se continúa con la fase de desarrollo en la que se entrega el recurso (sumadora de enteros). Con él, los estudiantes podrán verificar los cálculos anteriormente realizados. A su vez, llegarán a una solución compartida de la tarea.

Cuarta etapa. Esta es la fase de cierre en la que se socializan las soluciones obtenidas por las parejas. Los estudiantes participan y el profesor escribe en el tablero todos aquellos aportes propuestos, contribuyendo a la solución correcta de la tarea. Además, se da respuesta a la pregunta final de la tarea, ya que esta se ha diseñado para que en la socialización con todos los estudiantes (gran grupo) se compartan las expresiones escritas para cada día.

Como se puede observar, el profesor cumple un papel de orientador, al permitir que los estudiantes sean los protagonistas en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Así, al dar inicio a cada una de las tareas, el profesor ubica a los estudiantes en el contexto de estas, realizando preguntas que se relacionen de manera directa con ella, y explica cómo utilizar los recursos o materiales que se emplearán durante el desarrollo de la tarea. De igual forma, durante el trabajo grupal, el profesor resuelve dudas relacionadas con la tarea, ya sean conceptuales o del manejo del recurso, mediante ejemplos, preguntas y ayudas.

3. Características de las tareas

Cada tarea tiene un nivel de complejidad. Con base en la distinción que establece Ponte (2004), clasificamos las cinco tareas en tres problemas y dos ejercicios. Según su nivel de complejidad, las tareas El minero, El *skater* y El repartidor de pizzas son problemas, mientras que Lucho el ciclista y Encontrar las llaves son tareas de ejercitación. Identificamos un camino de aprendizaje para cada tarea, así como nuestra previsión sobre cómo los estudiantes podrían abordarla. En la tabla 3 presentamos esos caminos de aprendizaje para las cinco tareas.

Tabla 3
Caminos de aprendizaje de las tareas

Tarea	Camino de aprendizaje
Lucho el ciclista	C15 – C2 – C1 – C7 – C3 – C16 – C9 – C8
Encontrar las llaves	C5 – C6 – C10 – C4 – C17
El minero	C15 – C2 – C7 – C10 – C4 – C9
El <i>skater</i>	C15 – C12 – C7 – C11 – C5 – C13 – C10 – C14 – C9
El repartidor de pizzas	C15 – C12 – C7 – C1 – C3 – C9 – C7 – C6 – C5 – C9

Estos caminos de aprendizaje ponen de manifiesto la relación entre las tareas diseñadas y el análisis de contenido. Además, nos permiten establecer cómo las tareas contribuyen a las expectativas de aprendizaje (objetivos, capacidades, competencias) que fueron presentadas en el análisis cognitivo y cómo

afrontan las limitaciones de aprendizaje (errores y dificultades). La secuencia de estos caminos de aprendizaje es coherente con la planificación y el orden de los objetivos. Por ejemplo, la tarea El repartidor de pizzas (que surge a partir del análisis fenomenológico) pone de manifiesto la relación de las tareas con el análisis de contenido, ya que cuando se activan C15, C12, C7, C1 (es decir, cuando se representan en la recta numérica los recorridos realizados por el repartidor) entran en juego los sistemas de representación y algunos de los conceptos y procedimientos descritos en el análisis de contenido. Esos sistemas de representación pueden ser el verbal (cuando se traduce e interpreta el enunciado del problema), el simbólico (cuando se expresa con un número los recorridos) y el gráfico (cuando se representan en la recta numérica). Los conceptos y procedimientos que pueden tratarse en la solución de esta tarea se evidencian, al activar las capacidades C3, C5 y C9, cuando se interpreta su enunciado y se representa con un número entero; cuando se ubican los recorridos y se realizan adiciones y sustracciones en la recta numérica; y cuando, al plantear una expresión, se ejecutan las operaciones para obtener un resultado, usando los algoritmos de adición y sustracción de los números enteros.

A su vez, esta tarea contribuye al logro de los objetivos. En ella se debe utilizar un vocabulario en la traducción del enunciado (objetivo 1) y su posible representación gráfica o simbólica. El estudiante también debe justificar el procedimiento empleado y tener en cuenta las propiedades y relaciones de la adición de números enteros (objetivo 2) cuando toma decisiones que le permitan contestar las tres preguntas. Además, por ser un problema (según los grados de complejidad analizados) esta tarea contribuye al objetivo 3.

Por otra parte, el camino de aprendizaje previsto para esta tarea proporciona información acerca de la acción propia de cada capacidad y nos permite establecer su contribución al desarrollo de las competencias descritas en el análisis cognitivo. Recogemos esta información en la tabla 4.

Tabla 4
Capacidades activadas y contribución a capacidades de acuerdo al camino de aprendizaje

Acción	Descripción de la acción	Capacidades	Competencias
1	Identifique los valores numéricos de los recorridos del repartidor	C15	Modelar
2	Identifique el signo de los valores numéricos y establezca el orden en los números enteros.	C12	Representar y Modelar

Acción	Descripción de la acción	Capacidades	Competencias
3	Represente gráficamente los recorridos en la recta numérica	C1 y C7	Representar y Modelar
4	Con base en el paso anterior, realice las adiciones y sustracciones necesarias para hallar el mejor punto para desplazarse hacia la oficina del proveedor	C3	Representar y Modelar
5	Observe los recorridos realizados por el repartidor y seleccione el más corto para así ahorrar combustible	C9	Representar
6	Traduzca (desde la gráfica o desde el enunciado) a una expresión aritmética que permita ver los desplazamientos del repartidor	C7	Representar y Modelar
7	Aplice la propiedad asociativa al plantear la expresión aritmética	C6	Modelar
8	Ejecute las operaciones correspondientes en la expresión aritmética planteada	C5	Modelar
9	Halle el valor absoluto para saber la distancia a la que quedó el repartidor de la pizzería después de entregar el último pedido	C4	Modelar

Estas capacidades dan argumentos para justificar que intervengan acciones propias de las competencias de modelar y representar. Esas acciones se organizaron de acuerdo con el camino de aprendizaje para que se hiciera evidente dónde y en qué momento se pueden llegar a desarrollar las competencias PISA consideradas.

Para la selección de las tareas también se tuvo en cuenta cómo estas contribuyen al desarrollo de las competencias PISA de manera específica en la resolución de problemas, de acuerdo con tres niveles de complejidad propuestos: reproducción, conexión y reflexión (OCDE, 2004).

4. Análisis de actuación

Este es el último de los cuatro análisis que conforman el análisis didáctico. Está vinculado con la evaluación, y en este el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que se manifestaron hasta este momento. Por lo tanto, en el presente apartado tratamos algunos criterios,

aspectos e instrumentos que permiten establecer en qué medida los estudiantes lograron los objetivos y en qué medida las tareas contribuyeron a las capacidades y competencias propuestas.

1. Evaluación

En lo concerniente a los instrumentos de evaluación, tratamos en primera instancia la evaluación informal que realizamos de manera cotidiana y habitual. Para esta evaluación, proponemos instrumentos como parrillas de observación, preguntas específicas, diario del alumno y diario del profesor. En segunda instancia, consideramos la evaluación específica, que nos permite obtener información sobre el proceso de aprendizaje del estudiante para establecer su estado en relación con los objetivos propuestos. Proponemos instrumentos como una prueba diagnóstica, rúbricas, examen final y cuestionario individual de evaluación. Comenzamos por describir los instrumentos diseñados para la evaluación informal.

Parrillas de observación para caminos de aprendizaje

Diseñamos parrillas de observación de acuerdo con los caminos de aprendizaje para cada una de las tareas. Incluimos ayudas que pudieran optimizar la resolución de las tareas y abordar los posibles errores en los que los estudiantes pudieran incurrir. Se diseñó una lista de chequeo para cada parrilla de observación. En esta lista se registraron las capacidades desarrolladas y el camino de aprendizaje seguido por el estudiante, los errores en los que incurrieron y una sección donde el docente pudiera realizar anotaciones de acuerdo con las observaciones en clase durante el trabajo de los estudiantes (anexo 3 de los archivos complementarios).

Preguntas específicas

Las preguntas específicas (anexo 4) tienen como objetivo promover la comprensión y la comunicación en el desarrollo de la tarea. Estas preguntas se basan en los conceptos necesarios para la solución de la tarea y la comprensión de su enunciado, teniendo en cuenta la perspectiva constructivista. De acuerdo con lo descrito anteriormente, se proponen preguntas para cada una de las tareas con un propósito específico. Por ejemplo, para la tarea Lucho el ciclista proponemos las siguientes preguntas.

¿Cómo relacionarías los puntos cardinales con los números enteros? Esta pregunta se realiza de forma oral después de que se haya leído la tarea en el gran grupo y

antes de iniciar su desarrollo por parte de los estudiantes. El propósito de esta pregunta es verificar si la situación formulada y la forma de utilizar el material entregado son claras.

¿Podrías mostrar el trayecto realizado en el primer día por el ciclista? Se solicita a uno de los grupos que represente la solución realizada para el primer trayecto del ciclista en el tablero. Esta pregunta se hace con el propósito de nivelar al grupo.

Diario del alumno

El diario del alumno sirve como parte de la evaluación que el alumno realiza del trabajo personal en clase a través de una serie de preguntas. Para la unidad didáctica se propone este diario con el nombre de “diario de clase”. Se incluyen tres preguntas generales y una específica del tema de la tarea. En este diario se incluye un gráfico llamado *Matematógrafo* en el cual los estudiantes registran cómo se sintieron en cada uno de los momentos del desarrollo de la sesión de clase. Este *Matematógrafo* está diseñado en un plano coordenado, donde el eje vertical tiene cuatro caras que representan diferentes estados anímicos (feliz, alegre, triste y muy triste), y en el eje horizontal, los momentos de la tarea (anexo 5).

Diario del profesor

El diario del profesor permite el registro de diferentes actuaciones y aspectos observados durante la sesión de clase. Diseñamos un diario del profesor para cada una de las tareas, que se divide en dos partes, una referida a la enseñanza y otra, al aprendizaje.

Enseñanza. Incluye aspectos referidos a (a) la función de la tarea, (b) tipos de contenido, (c) sistemas de representación, nivel de complejidad PISA, (d) recursos y/o operaciones, (e) presentación, (f) comunicación y (g) agrupamiento.

Aprendizaje. Incluye dos aspectos: (a) avances y (b) errores, dificultades y bloqueos.

Las observaciones se registran de acuerdo con cinco aspectos: (a) lo planificado y realizado, (b) lo planificado y no realizado, (c) lo no planificado y realizado, (d) las modificaciones de la secuencia para sesiones siguientes y (e) las modificaciones en la secuencia *a posteriori* (anexo 6).

A continuación, trataremos lo correspondiente a la evaluación específica, iniciando con la prueba diagnóstica, las tareas de la secuencia, la rúbrica de las tareas y el examen final.

Actividad inicial diagnóstica

Proponemos una prueba diagnóstica llamada Punto gol que pretende activar los conocimientos previos de los estudiantes necesarios para el desarrollo de las tareas. En esta prueba se presentan dos tablas con los puntajes correspondientes a varios equipos de fútbol y, posteriormente, a partir de la información que se registra en estas tablas, se debe dar respuesta a una serie de preguntas (anexo 7). Para esta prueba tuvimos en cuenta el listado de capacidades y los posibles errores (anexo 8).

Rúbrica de las tareas

La rúbrica hace referencia a los cuatro desempeños que el estudiante puede obtener al realizar la tarea y producir su respectiva valoración, de acuerdo con cuatro grados de desempeño. Diseñamos una rúbrica para cada tarea (anexo 9).

Desempeño superior. Supera de manera extraordinaria las metas previstas. Puede hacer aportes relevantes y significativos.

Desempeño alto. Supera ampliamente las metas de comprensión previstas, aplicando procedimientos.

Desempeño básico. Supera las metas con algunas limitaciones.

Desempeño bajo. No supera las metas. Manifiesta dificultades en su aprendizaje.

Se debe tener en cuenta que la rúbrica cambia de acuerdo con la tarea, puesto que cada una está ubicada dentro de un objetivo e involucra capacidades específicas y conocimientos previos diferentes según su nivel de complejidad. La rúbrica permite, así, ubicar el desempeño que obtiene cada estudiante al resolver las tareas y también al examen individual.

Examen final

El examen final se realiza con el propósito de obtener datos específicos del aprendizaje que han logrado los estudiantes al final de la unidad didáctica. Diseñamos el examen con base en los objetivos; por eso, consta de tres partes: (a) ¡Dónde deje mi cuaderno!, para el objetivo 1 y las capacidades correspondientes a este; (b) la casa entera, para el objetivo 2 y sus capacidades correspondientes, y (c) sube, sube la temperatura, para el objetivo 3 y sus capacidades correspondientes (anexo 10). Por otra parte, proponemos una rúbrica para el examen final como fundamento de evaluación de los alumnos, de acuerdo con los diferentes desempeños. Esta rúbrica se divide en tres partes, una para cada

punto del examen final, de acuerdo con parámetros similares expuestos para las tareas (anexo 11).

Cuestionario individual de evaluación

Para el cuestionario individual de evaluación proponemos una serie de preguntas que el estudiante debe contestar individualmente en un formato que el profesor entregará al final de la unidad didáctica. Además, cada estudiante llevará a cabo esta actividad como un trabajo para la casa, con el fin de que utilice su tiempo de la manera más adecuada para responderlo (anexo 12).

4. Descripción y justificación del diseño de la unidad didáctica

En este apartado presentamos el diseño de la unidad didáctica. La unidad didáctica consta de cinco tareas, una prueba inicial diagnóstica y un examen final. Describimos cada una de las sesiones de clase y sus tareas correspondientes. Las tareas fueron diseñadas teniendo en cuenta elementos de la vida cotidiana de los estudiantes; así, pensamos en situaciones con las que estuviesen familiarizados.

1. Descripción del diseño

Para la unidad didáctica diseñamos un formato que orientara, involucrara y compartiera con los estudiantes los objetivos de aprendizaje por alcanzar y los criterios que se tendrían en cuenta para la evaluación. Hemos llamado “presentación de la unidad didáctica” a ese formato y se debe entregar al principio de la unidad. En la presentación se muestran los objetivos organizados por medio de una tabla que relaciona tres elementos: (a) las palabras clave, (b) preguntas y (c) ejemplos relacionados con las preguntas. Además, se presentan los criterios de logro que se van a tener en cuenta y el sistema de evaluación. Este formato está diseñado con un vocabulario sencillo, de tal manera que sea comprensible para los estudiantes (anexo 2).

Cada una de las tareas cumple una función dentro de la secuencia establecida y presenta un nivel de complejidad concreto. Partiendo de este hecho, realizamos unas previsiones cognitivas y planificamos la organización de cada una de las tareas, incluyendo aspectos como la forma de presentarla, la estructura de las fases que la caracterizan, el tiempo destinado para cada momento de la sesión teniendo en cuenta la socialización de resultados, los diarios de

clase y la retroalimentación del examen final. En el siguiente apartado explicamos estas cuestiones.

2. Descripción de las sesiones propuestas

Planteamos la evaluación por medio de diferentes instrumentos que nos permiten observar de manera general o específica los avances en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. De esta manera, para la evaluación de la secuencia de la unidad didáctica, consideramos seis instrumentos aplicados en diferentes momentos. En primer lugar, tomamos la prueba diagnóstica aplicada en la sesión 0, el examen final desarrollado en la sesión 4 y el cuestionario individual de evaluación (diligenciado por los estudiantes como actividad para fuera de clase). En segundo lugar, para las sesiones 1, 2 y 3, los estudiantes deben cumplimentar el diario de clase, de acuerdo con la tarea resuelta. En tercer lugar, el profesor debe completar las parrillas de observación con su lista de chequeo para evaluar a los estudiantes, según los desempeños propuestos en las rúbricas. Estos instrumentos se describieron en la sección correspondiente al análisis de actuación del apartado 3.

La secuencia quedó constituida en seis sesiones, cada una de 100 minutos de duración, previstas entre el 17 marzo y el 7 de abril de 2011. Para cada sesión, asignamos las tareas diseñadas de acuerdo con su función y elaboramos una ficha con las características y condiciones de su aplicación. Esta ficha incluye la meta que se pretende alcanzar, los recursos por utilizar, el tipo de contenido, los agrupamientos de los estudiantes y las diferentes fases que se deben tener en cuenta al momento de la implementación. Presentamos a continuación la descripción general de cada una de estas sesiones.

Sesión 0. Al dar inicio a esta sesión, el profesor realizará preguntas en diferentes contextos reales que estén asociadas con los conceptos previos que los estudiantes pueden llegar a necesitar para la solución de la tarea Punto gol. Se planificaron dos momentos. El primero, con una duración de 40 minutos, para realizar la presentación de la unidad didáctica, los objetivos y el sistema de evaluación. El segundo, con duración de 60 minutos, para entregar la prueba diagnóstica y el diario de clase, con el fin de que los estudiantes los resuelvan de manera individual. Luego, planificamos realizar la puesta en común en el gran grupo (todos los estudiantes).

Sesión 1. Se planificaron cuatro momentos. En el primero de ellos, planeamos entregar a los estudiantes la prueba diagnóstica calificada por el docente.

Después, previmos realizar la realimentación, con una duración de 15 minutos de trabajo en el gran grupo. En segundo lugar, con una duración de 40 minutos, planeamos entregar la tarea Lucho el ciclista (para un trabajo individual y posteriormente en parejas). En tercer lugar, planteamos una puesta en común de 15 minutos en el gran grupo sobre los resultados obtenidos en la solución. Y, por último, proponemos completar el diario de clase de manera individual en los 20 minutos restantes de la sesión.

Al inicio de la sesión, el profesor dará las orientaciones verbales y escritas. Se pretende usar la recta numérica en papel y la sumadora de enteros como recursos, con el propósito de facilitar la solución de la tarea propuesta.

Sesión 2. Planificamos siete momentos. En el primero, con una duración de 5 minutos, se entregará la tarea revisada Lucho el ciclista. El segundo, con duración de 25 minutos, incluye la resolución de la tarea Encontrar las llaves, que se trabajará en parejas. En el tercero y cuarto, con una duración de 10 minutos cada uno, proponemos realizar la puesta en común en el gran grupo y completar el diario de clase de manera individual. Para el quinto, con una duración de 20 minutos, planificamos el desarrollo de la tarea El minero en parejas, una puesta en común de 10 minutos en el gran grupo y el desarrollo del diario de clase de manera individual en los últimos 10 minutos.

Para la tarea Encontrar las llaves, planificamos poner en el salón tres carteleras, de tal manera que en cada una esté dibujada una puerta; 6 llaves, en las que cada llave tiene una posible respuesta para las expresiones aritméticas propuestas; varias hojas con representaciones gráficas de la recta numérica, para ser utilizadas como recurso, y una tabla con dos columnas para resolver las expresiones propuestas en cada una de las puertas de manera que puedan justificar cada paso. Además, en la fase final, que corresponde a la puesta en común, los estudiantes deben realizar la exposición de las propiedades y relaciones matemáticas necesarias para llegar a la solución.

Para el desarrollo de la tarea El minero proponemos el uso de la recta numérica y de fichas bicolores como recursos. Luego, el profesor debe dirigir una reflexión sobre los mineros atrapados en una mina en Chile, con el fin de relacionar una situación real con el contexto de la tarea.

Sesión 3. Establecemos seis momentos para esta sesión. El primero es la entrega de las tareas revisadas de la sesión anterior y tiene una duración aproximada de 5 minutos. El segundo, con duración de 20 minutos, se dedica a trabajar individualmente en la solución de la tarea El skater y, posteriormente, se comparan

los resultados en parejas. En el tercero se realiza la puesta en común en el gran grupo durante 10 minutos. El cuarto es para entregar la tarea El repartidor de pizzas y resolverla en parejas, y tiene una duración de 30 minutos. El quinto es para realizar la puesta en común (gran grupo) en un periodo de 10 minutos. Y el sexto es para desarrollar el diario de clase de las dos tareas durante 15 minutos.

Para la tarea El *skater* pretendemos utilizar comprobantes de ingresos como recurso. El profesor entrega estos comprobantes al hacer la presentación escrita de la tarea. Al terminar, los estudiantes deben comprobar los resultados obtenidos por medio de la calculadora como segundo recurso. De igual manera, para el desarrollo de la tarea El repartidor de pizzas, proponemos el uso de dos materiales: la recta numérica y la sumadora de enteros. Al realizar la presentación de la tarea, el profesor hace algunos comentarios sobre la situación laboral de un repartidor de pizzas.

Sesión 4. Consideramos tres momentos: el primero, para entregar las tareas revisadas, con una duración de 10 minutos (gran grupo); el segundo se dedica a desarrollar el examen final de manera individual durante 70 minutos; y el último, para entregar el cuestionario individual de evaluación por parte del docente como actividad extraclase en los 10 minutos restantes.

Sesión 5. En esta sesión planificamos hacer la realimentación y cierre de la secuencia. La sesión se divide en cuatro momentos. En el primero se planea la entrega del cuestionario individual de evaluación por parte de los estudiantes en un periodo de 5 minutos. El segundo momento es para entregar el examen calificado y realizar su realimentación por parte del profesor. En el tercero se planea la entrega de las notas finales en un lapso de 20 minutos. El último momento se dedica a explicar las acciones que deben seguir aquellos estudiantes que obtengan como valoración final un desempeño bajo.

3. Descripción de una tarea de la secuencia didáctica

Presentamos El repartidor de pizzas por ser la más compleja de las cinco tareas propuestas en el diseño de la unidad didáctica. Se trata de una tarea de conexión, en la que el estudiante debe establecer la relación entre los términos empleados y el lenguaje simbólico, para así aplicar métodos gráficos en la solución del problema. Además, la tarea presenta una serie de características que pueden contribuir al desarrollo de la competencia resolución de problemas. A continuación describimos cada una de estas características.

Redacción para su comprensión. Reescribimos esta tarea desde su primera versión, en la que contaba con un lenguaje más técnico, hasta lograr un enunciado escrito con lenguaje sencillo y de acuerdo con el contexto educativo en el que se aplica la unidad didáctica. Finalmente, en el enunciado no hay términos matemáticos técnicos y está redactado de acuerdo con el vocabulario conocido por los estudiantes y profesores.

No es un ejercicio de reproducción. El enunciado presenta una situación particular inspirada en acontecimientos de la vida real. No hay un procedimiento inmediato que pueda dar respuesta a las preguntas propuestas.

Es un reto. El contexto de la tarea está basado en las experiencias de la vida cotidiana de los estudiantes. Se busca acercar a los estudiantes, por medio de una situación real, a la aplicación de sus conocimientos en relación con la adición y sustracción de números enteros. Además, se busca motivarlos y que encuentren utilidad en la tarea.

Se ponen en juego diversas destrezas. El estudiante debe traducir el enunciado entre distintos sistemas de representación (verbal a gráfico, gráfico a simbólico y simbólico a verbal) para poder solucionar la tarea.

Se puede comprobar si la solución es válida. El estudiante puede verificar la respuesta obtenida en la última etapa de la tarea por medio de recursos como la sumadora de enteros.

4. Justificación del diseño

El diseño propuesto se relaciona con el entorno de los estudiantes, con los profesores y con el tema matemático trabajado. Esto tiene como consecuencia que la implementación de la unidad didáctica sea natural.

Dicha unidad está basada en los cuatro análisis que conforman el análisis didáctico. La secuencia de tareas es coherente y apunta a las expectativas de aprendizaje que hemos presentado. La primera tarea es de un nivel de complejidad básico y tiene como propósito motivar y relacionar los conceptos que tienen los estudiantes. La última tarea de la secuencia presenta el grado de dificultad más alto y pretende que los estudiantes sinteticen y utilicen el conocimiento trabajado en las cuatro tareas anteriores. La coherencia contribuye al logro de los objetivos propuestos y, como consecuencia, al aprendizaje de los estudiantes.

Los estudiantes reciben apoyo al utilizar recursos y ayudas para contribuir a la superación de posibles errores en la resolución de las tareas. Además, ellos perciben el interés del profesor por guiarlos y resolver sus dudas para contribuir a su aprendizaje.

5. Descripción de la implementación de la unidad didáctica

En este apartado realizamos la descripción de la implementación de unidad didáctica. Explicamos cómo se llevó la unidad didáctica a la práctica, qué modificaciones realizamos en el diseño original y por qué se hicieron tales modificaciones.

1. Descripción de la implementación

El desarrollo de la prueba diagnóstica, las tareas y el examen final se llevó a cabo en ocho sesiones, cada una de 100 minutos. Estas sesiones se desarrollaron de acuerdo con el siguiente patrón general.

- Las estudiantes resolvieron la prueba inicial diagnóstica de manera individual.
- El profesor conformó cinco grupos de dos estudiantes y un grupo de tres. Las estudiantes trabajaron en grupos para resolver las actividades. A cada estudiante se le asignó una letra, con el propósito de identificarlas sin tener la necesidad de usar sus nombres. Los grupos fueron: (A, B), (C, D), (E, F), (G, H), (I, J), (K, L, M).
- En cada sesión de clase se realizó un trabajo en el gran grupo para la introducción, luego el profesor hizo orientaciones generales referentes a la tarea correspondiente y, finalmente, las estudiantes pusieron en común los resultados de la tarea.
- El examen final se trabajó de manera individual.

2. Descripción de las sesiones implementadas

La unidad didáctica fue implementada entre el 17 de marzo y el 15 de abril de 2011 por uno de los integrantes del grupo que realizó este trabajo: La llamaremos en adelante “profesora”. Las sesiones que componen la unidad didáctica presentaron algunas variaciones de tiempo para el desarrollo de las tareas,

puestas en común, diarios de clase y uso de materiales y recursos. A continuación, mostraremos la descripción general del desarrollo de cada sesión.

Sesión 0. La profesora realizó la presentación de la unidad didáctica, mostrando los objetivos y el sistema de evaluación en un tiempo de 40 minutos. La profesora utilizó el formato propuesto en el análisis de actuación, que incluye algunas preguntas que permitieron la activación de los conceptos previos. Las estudiantes realizaron individualmente la prueba en un periodo de 20 minutos. Los siguientes 20 minutos se usaron para la cumplimentación del diario de clase y su puesta en común en el gran grupo.

Sesión 1. La sesión inició con la entrega y realimentación de la prueba diagnóstica en el tiempo y agrupamiento planificado. En segundo lugar, la profesora entregó la tarea Lucho el ciclista, impresa, junto con los materiales necesarios para que las estudiantes la solucionaran (recta numérica y sumadora de enteros). Al iniciar la tarea, la profesora mencionó una situación relacionada con la rutina de entrenamiento de un ciclista. La sesión se desarrolló en los grupos designados, con orientaciones por parte de la profesora, según se presentaban dudas. Por otra parte, dado que fue necesaria la explicación del uso de la recta numérica y de la sumadora de enteros, no se pudo cumplimentar el diario de clase ni la puesta en común, que fueron aplazados para la siguiente sesión.

Sesión 2. La profesora inició con la puesta en común de la tarea Lucho el ciclista en los primeros 15 minutos. Después, presentó la tarea Encontrar las llaves, de manera escrita, y a cada grupo le entregó tres puertas del tamaño de una hoja carta y un juego de llaves. Cada llave tenía un número que podía o no corresponder a la respuesta de cada expresión aritmética. Adicionalmente, la profesora entregó las tablas para escribir la propiedad o relación matemática que las estudiantes usaron para la solución del algoritmo. El trabajo en esta tarea tomó toda la sesión de clase. Por tal razón, solo se cumplimentó el diario de clase correspondiente de manera individual y no se alcanzó a realizar la puesta en común posterior.

Sesión 3. La profesora inició la sesión con la puesta en común de la tarea Encontrar las llaves en un tiempo de 20 minutos. Luego, hizo una reflexión de 10 minutos en el gran grupo acerca de la situación de los mineros de Chile, entregó la tarea escrita y dio inicio al trabajo en los grupos designados, para el cual las estudiantes utilizaron las fichas bicolores. Esta parte de la sesión tomó 40 minutos. Posteriormente, se realizó la discusión de los resultados en el gran grupo y se cumplimentó el diario de clase en 20 minutos.

Sesión 4. Las estudiantes desarrollaron la tarea El *skater* utilizando lápiz, papel y calculadora científica. El desarrollo de la tarea se realizó durante 60 minutos en los grupos designados.

Sesión 5. Las estudiantes trabajaron en la tarea el Repartidor de pizzas, para la cual usaron la recta numérica y un recuadro en el que escribieron las expresiones aritméticas que consideraron pertinentes para hallar la respuesta más acertada a la situación propuesta. La tarea fue entregada por la profesora al inicio de la sesión y las estudiantes la trabajaron en grupos. Las estudiantes cumplieron el diario del estudiante durante 10 minutos y se utilizaron otros 15 minutos para la puesta en común.

Sesión 6. La profesora entregó a las estudiantes su revisión de las tareas desarrolladas en la sesión anterior y ellas realizaron el examen final de manera individual. Además, entregó el cuestionario individual de evaluación como actividad para realizar fuera de clase.

Sesión 7. La profesora entregó el cuestionario individual de evaluación a las estudiantes para ser cumplimentado. Luego, hizo entrega del examen final calificado y realizó la realimentación correspondiente. Posteriormente, la profesora entregó las notas finales, lo cual tomó 20 minutos. Por último, la profesora explicó las acciones que debían seguir aquellas estudiantes que obtuvieron como valoración un desempeño bajo.

3. La implementación frente al diseño

Resaltamos las diferencias presentadas entre el diseño y la implementación de la unidad didáctica. Para ello, hacemos una breve descripción de las modificaciones que se presentaron en cuanto a enunciados, explicaciones, materiales y recursos de cada una de las tareas, enfatizando con más detalle aspectos que no pueden poner de manifiesto de manera directa en los apartados anteriores.

1. *Lucho el ciclista*

En esta tarea, observamos diferencias en el enunciado, el material y la explicación necesaria para las estudiantes.

Enunciado de la tarea

Los valores propuestos inicialmente para los recorridos realizados mostraban las mismas distancias hacia los positivos que hacia los negativos. Estos valores eran sencillos y tenían el mismo valor tanto para el oriente (números positivos),

como para el occidente (números negativos). Por tal razón, al momento de la implementación se cambiaron los valores, para así incrementar la dificultad de la tarea. Estos valores se modificaron buscando un mayor grado de dificultad en la solución de las operaciones, tratando de suprimir los valores simétricos respecto al cero.

Material

De acuerdo con las modificaciones realizadas en los valores propuestos para la situación, fue necesario modificar también las sumadoras de enteros, sin que ello implicara algún cambio en la manera en que se usaron.

Explicación

Teniendo en cuenta que al estructurar la unidad didáctica no se planificó el tiempo requerido para explicar la manera de utilizar el material, para el diseño final fue necesario ocupar parte del tiempo para ello.

2. Encontrar las llaves

Las diferencias que apreciamos para esta tarea son las siguientes.

Material

Para la tarea Encontrar las llaves, inicialmente se propusieron tres carteleras con las puertas. Sin embargo, para la implementación, se decidió entregar las tres puertas a cada grupo. Además, las rectas numéricas propuestas no se utilizaron por razones de tiempo.

Tiempos

La sesión se inició con la puesta en común de la tarea Lucho el ciclista. La tarea Encontrar las llaves tomó toda la sesión de clase, por lo cual la tarea El minero se realizó tomando una clase no programada dentro del cronograma (clase de geometría). Se pospuso la puesta en común.

3. El skater y El repartidor de pizzas

Para estas tareas identificamos diferencias en el material y los tiempos utilizados.

Material

Los comprobantes de ingresos y egresos de la tarea El skater no se utilizaron. Para la tarea El repartidor de pizzas no se utilizó la sumadora de enteros, ya que los valores eran demasiados grandes como para utilizar el recurso.

Tiempos

La tarea de El *skater* tomó toda la sesión de clase, por lo cual la tarea El repartidor de pizzas se realizó en la siguiente sesión.

4. Examen final

Esta tarea solamente tuvo diferencias en los tiempos.

Tiempos

Teniendo en cuenta las modificaciones en los tiempos de las tareas, se modificó la fecha del examen.

5. Realimentación del examen

Considerando las modificaciones en los tiempos de las tareas, se cambió la fecha de la realimentación del examen. En las tablas 5 y 6 presentamos el cambio efectuado en el cronograma diseñado, de acuerdo con el desarrollo de la implementación.

Tabla 5
Cronograma previsto para la implementación de la unidad didáctica

Sesión 0 Presentación (marzo 17)		Sesión 1 Objetivo 1 (marzo 24)		Sesión 2 Objetivo 2 (marzo 28)	
Presentación de la unidad	10 min	Entrega de prueba diagnóstica revisada y retroalimentación	15 min	Entrega de la tarea 1 revisada	5 min
Presentación de los objetivos	20 min				
Explicación del sistema de evaluación	10 min	Tarea 1: Lucho el ciclista	40 min	Tarea 2: Encontrar las llaves	25 min
				Puesta en común	10 min
Prueba diagnóstica	20 min	Puesta en común	15 min	Diario Encontrar las llaves	10 min
Diario de clase	20 min		20 min	Tarea 3: El minero	20 min
				Puesta en común	10 min
Presentación común de la prueba diagnóstica	20 min			Diario El minero	10 min

Tabla 6
Cronograma de la implementación de la unidad didáctica

Sesión 0 Presentación (marzo 17)	Sesión 1 Objetivo 1 (marzo 24)	Sesión 2 Objetivo 2 (marzo 28)	Sesión 3 Objetivo 2 (marzo 30)
Los tiempos se aplicaron según la programación	Lucho el ciclista: puesta en común para la siguiente sesión	1. Puesta en común: Lucho el ciclista	El minero
		Solo se realiza la tarea Encontrar las llaves	Hora de geometría
Sesión 4 Objetivo 3 (marzo 31)	Sesión 5 Objetivo 3 (abril 5)	Sesión 6 Sesión de evaluación (abril 8)	Sesión 7 retroalimentación (abril 15)
Desarrollo de la tarea El <i>skater</i>	Tarea El repartidor de pizzas	Examen final	Corrección de la evaluación y entrega del examen corregido

Sesión 3 Objetivo 3 (marzo 31)		Sesión 4 Sesión de evaluación (abril 4)		Sesión 5 Retroalimentación (abril 7)	
Entrega de las tareas revisadas	5 min	Entrega de las tareas revisadas	10 min	Entrega del cuestionario de evaluación por parte de los estudiantes	5 min
				Entrega del examen calificado y retroalimentación	35 min
Tarea 4: El <i>skater</i>	20 min	Examen final de la unidad	70 min	Entrega de notas finales	20 min
Puesta en común	10 min			Explicación de acciones para la obtención de Desempeños Bajos	30 min
Tarea 5: El repartidor	30 min	Entrega de cuestionario individual de evaluación para estudiantes	10 min		
Puesta en común	10 min				
Diarios El <i>skater</i> y El repartidor de pizza	15 min				

6. Evaluación de la implementación

Para la evaluación de la implementación tenemos en cuenta los resultados sobre las tareas propuestas y los instrumentos diseñados para la recolección de datos. Así mismo, realizamos una evaluación de los logros obtenidos en el aprendizaje de las estudiantes y de sus actuaciones.

1. Evaluación de las tareas e instrumentos utilizados

Para recolectar datos sobre los logros en el aprendizaje de los estudiantes, usamos la información que proporcionaron los instrumentos de evaluación que diseñamos. Cada uno de esos instrumentos compila información diferente de acuerdo con la función que cumple cada tarea dentro de la unidad didáctica.

1. Evaluación y tareas seleccionadas

Cada una de las tareas implementadas corresponde a alguno de los tres objetivos propuestos en el diseño de la unidad didáctica. Por consiguiente, presentamos las tareas en una secuencia coherente que permitió a las estudiantes aplicar progresivamente los conceptos.

Dentro de las dificultades encontradas, observamos que el uso de algunos de los términos empleados en las tareas causó confusión en las estudiantes. Entre estas, observamos procedimientos distintos a los esperados dentro de los caminos de aprendizaje previstos para la solución de cada tarea. Esto, a su vez, se vio reflejado en las valoraciones obtenidas. Por ejemplo, el primer apartado de la tarea El repartidor de pizzas requiere representar los tres recorridos realizados por un repartidor, de acuerdo con la descripción dada; a manera de ilustración, mostramos la representación realizada por la estudiante E en la receta numérica de la tarea (figura 7). Posteriormente, el segundo apartado solicita el mejor punto para realizar un pago en la oficina del proveedor. Por ejemplo, la estudiante C plantea una expresión con valores absolutos, aunque no se preguntaba por distancias. Después, esta estudiante vuelve a mencionar distancias para el tercer punto, en el que se pedía una expresión que permitiera ver desplazamientos (figura 8).

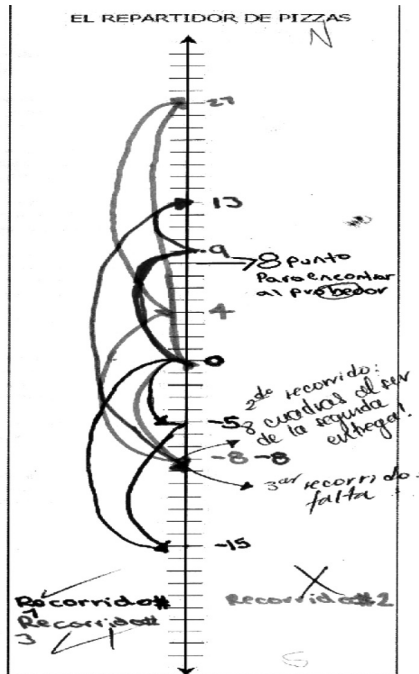


Figura 7. Representación realizada por la estudiante E en la recta numérica de la tarea El repartidor de pizzas

1. el mejor punto de para
 ir a la oficina del proveedor
 es el punto 9 de modo del 3 = 3
 recorrido. *NO se están pidiendo distancias.*

$$\{ [|5| + |-15| + 0] + [|8| + 4 + 27] + [9 + |-8|] + [9] \}$$

 si x_i indica la distancia
 ya que suma mas todos los
 recorridos o los mas simientos
 de los 3 recorridos
 ¿A qué distancia queda?

Figura 8. Expresión aritmética planteada por la estudiante C

2. Instrumentos utilizados en la evaluación

Consideramos adecuado el uso del diario del profesor, pues permitió el registro de las situaciones presentadas durante el desarrollo de la implementación. De esta manera, fue posible apreciar las modificaciones en los tiempos, en el número de sesiones y en las instrucciones impartidas por el profesor, con el fin de que él pudiera realizar acciones en la siguiente sesión. Por otra parte, la lista de chequeo de la rúbrica de la tarea se constituyó en un instrumento de gran utilidad y proporcionó información de calidad. La lista de chequeo de la parrilla de observación permitió constatar, paso a paso, los procedimientos realizados por las estudiantes y las diferencias respecto a los caminos de aprendizaje previstos.

2. Evaluación de logros

En este apartado mostramos ejemplos relacionados con el logro de las expectativas de aprendizaje de algunas de las estudiantes que resolvieron la tarea El repartidor de pizzas. Lo hacemos con base en una lista de chequeo y algunas respuestas dadas por las estudiantes A, B, L y F en el cuestionario individual de evaluación.

1. Contribución a las expectativas de aprendizaje

Constatamos la efectividad de las tareas propuestas y del examen final frente a las expectativas de aprendizaje (capacidades, objetivos y competencias) en la tabla 7.

En la tabla 7 mostramos la lista de chequeo de la parrilla de observación de la tarea El repartidor de pizzas para las estudiantes denominadas A y B. La tarea está asociada con el tercer objetivo de la unidad didáctica y busca el desarrollo de las competencias modelizar, resolver problemas y representar. En la lista de chequeo recogemos el seguimiento de cada una de las capacidades previstas dentro del camino de aprendizaje, así como el registro de los errores observados y si fueron o no superados. Al analizar la parrilla, podemos concluir que cada una de las estudiantes logró el objetivo propuesto, aunque en diferente medida.

En relación con el examen final, detallamos la valoración del punto del examen asociado con el tercer objetivo para la estudiante L, indicando si la obtención de cada una de las capacidades previstas dentro del camino de aprendizaje propuesto fue total, parcial o nula, como se observa en la tabla 8.

Tabla 7

Lista de chequeo de la tarea El repartidor de pizzas de las estudiantes A y B

TAREA 5: EL REPARTIDOR DE PIZZAS									
GRUPO		CAPACIDADES (CAMINO DE LA TAREA)		ERRORES		ERRORES SUPERADOS			
Mapa (DS)	10	CAPACIDAD	Se utiliza						
	10	C15	✓						
	10	I							
	20	C12	✓						
	30	I							
	10	C7	✓						
	10	I							
	100	I		E2			SI	NO	
	100	C1	✓	E3 ←		✓			X
	100	C3	✓	E4					
(B) Na Paula		I							
(A) Anamaria G1:		I							
Estudiante A		I		nuevo error: no diferenciar entre desplazamiento, distancia y trayecto.			✓	✓	
Estudiante B		C9	✓						
		I							
		C7	✓						
		I							
Anamaria (DBs)		C6	✓						
		I		E6, E7, E1					
		C5	✓						
		OBSERVACIONES:							
		*B: dudas sobre norte y sur. *B: distancia negativa cumpleu c9. c9 ✓✓							

Tabla 8

Esquema en Excel de las capacidades alcanzadas por la estudiante L para el objetivo 3

Ex. final	Punto 1: objeto 3																Total objetivo 3	Total puntos objetivo 3
	a/10				b/20						c/5							
G/Cap	C15	C2	C7	C12	C15	C2	C7	C12	C11	C10	C9	C15	C7	C12	C11	C10	C9	
L	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0,5	0,5	0,5	0,5	1	0	

Las capacidades activadas totalmente se registraron con 1; las activadas parcialmente, con 0,5; y las no activadas, con 0. Podemos concluir que, de un total de 17 puntos posibles para las capacidades, se alcanzaron 11. Es importante mencionar que, por ejemplo, las capacidades C7 y C12 se desarrollan completamente en los apartados a y b, pero para el literal c, el desarrollo es parcial. De esta manera, podemos afirmar que el objetivo se logró en un alto porcentaje.

2. Información suministrada por las estudiantes

Es posible evaluar la obtención de los logros mediante la información obtenida en los diarios de clase de cada tarea y en los cuestionarios individuales de evaluación. Con el propósito de presentar algunos de los logros que las estudiantes afirman haber obtenido, mostramos algunas respuestas dadas en el diario de clase del estudiante. Por ejemplo, para las tareas Encontrar las llaves y El minero, en la pregunta “La tarea en la que trabajamos, ¿te permitió encontrar algo nuevo? ¿Qué?”, la estudiante B afirma: “Sí, me ayudó a aprender y comprender mejor cómo debo hacer una expresión aritmética y a usar mejor los paréntesis”. La misma estudiante evaluó su estado de ánimo durante las diferentes etapas de la tarea con la máxima puntuación.

Del mismo modo, en el cuestionario individual de evaluación, para la pregunta “De lo que aprendiste acerca de este tema, ¿qué te ha servido para justificar la solución de un problema que involucre la adición y sustracción de números enteros?”, la estudiante F respondió: “Sí, ya que puedo justificar cada paso y entender por qué lo realicé”.

7. Balance de la experiencia y reflexiones hacia el futuro

En este apartado describimos los resultados del análisis de debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades (DAFO), que se aplicó tanto al diseño como a la implementación de la unidad didáctica. Este análisis se basa en la identificación de debilidades, posibles amenazas, fortalezas y oportunidades, y las estrategias correspondientes para corregir debilidades, defenderse ante las amenazas y potenciar las fortalezas y oportunidades. Finalmente, proponemos un diseño mejorado de la unidad didáctica con base en el análisis realizado.

1. Análisis DAFO

Dentro de las debilidades, supusimos erradamente que las estudiantes podían plantear adiciones y sustracciones basadas en los contextos de las tareas propuestas. Para corregir esto, proponemos una actividad en la que las estudiantes puedan trabajar solamente el planteamiento de expresiones aritméticas que involucren la adición y la sustracción de números enteros (véase el apartado Nuevo diseño). Otra de las debilidades encontradas fue la de no trabajar la traducción desde la recta numérica (lenguaje gráfico) a la expresión aritmética

(lenguaje simbólico) para representar situaciones aditivas. Para subsanar esto, proponemos una sesión en la que el profesor presente ejemplos o implemente tareas acerca del uso de la recta numérica para traducir a lenguaje simbólico situaciones aditivas. Finalmente, encontramos que las estudiantes interpretaron de manera incorrecta o presentaron una concepción errónea de algunos de los términos utilizados en la unidad didáctica. Para evitarlo, proponemos elaborar un glosario que contenga algunas palabras de uso cotidiano cuyo significado no sea claro en la tarea.

En cuanto a las amenazas, consideramos que las modificaciones en el plan de área pueden imposibilitar el desarrollo de la unidad didáctica. Por esa razón, proponemos establecer la unidad didáctica como tema para abordar la adición y sustracción de números enteros, sin encasillarla a grado séptimo, y estar abiertos a cambios en el modelo evaluativo que den como resultado una modificación en la manera de evaluar la implementación. Otra de las amenazas encontradas es la falta de apoyo institucional, puesto que puede imposibilitar el desarrollo de la unidad didáctica. Para lograr el interés de la institución, proponemos ofrecer una justificación fuerte de los objetivos y capacidades que se alcanzan y se desarrollan con la implementación de la unidad didáctica. Esto permitiría convencer a la institución de su interés y, dentro del área, llevaría a una concienciación de los docentes sobre los beneficios del desarrollo de competencias que permitan una mejor apropiación de otros conceptos, que lleve a la obtención de mejores resultados en el área en un futuro.

Para las fortalezas, encontramos que las tareas diseñadas en la unidad didáctica apuntan al desarrollo de los objetivos propuestos. Proponemos aprovechar cada tarea propuesta, fortaleciendo las etapas de la sesión de clase. Para ello, sugerimos que los estudiantes reescriban con sus palabras los enunciados de cada tarea, luego comenten y argumenten oralmente al profesor la estrategia que deben seguir para hallar la solución correspondiente, y muestren continuamente sus avances en la solución de la tarea. Además, consideramos que el trabajo en grupo facilita el desarrollo de las capacidades propuestas. Para enfatizarlo, el profesor promoverá el trabajo en grupo basado en los elementos del aprendizaje cooperativo (Johnson y Johnson, 1994), mediante una explicación al inicio de la unidad didáctica.

En relación con las oportunidades, consideramos que las tareas se pueden adaptar a diferentes contextos culturales y geográficos para atender a diferentes colectivos de estudiantes. Para aprovecharlas, proponemos trabajar con la distribución de las calles de Bogotá, ya que permite que los desplazamientos realizados por un móvil se puedan representar en la recta numérica. Por ejemplo, la calle 0

de la avenida Caracas divide al norte del sur; así, las calles del norte se pueden representar con los enteros positivos y las calles del sur, con los enteros negativos.

Finalmente, lograr interdisciplinariedad a partir de las tareas propuestas es una valiosa oportunidad. Proponemos que el plan de estudios tenga en cuenta parte de los ejes temáticos de otras asignaturas y proponga la inclusión de la unidad didáctica para ser desarrollada y evaluada a partir de sus criterios.

2. Estrategias formuladas a partir del análisis DAFO

A partir del análisis DAFO, establecemos cuatro estrategias con las cuales pretendemos mejorar y fortalecer el diseño de la unidad didáctica.

La primera estrategia es ofensiva y consiste en buscar el apoyo de la institución educativa para que las tareas que conforman la unidad didáctica sean parte de un proyecto interdisciplinar que integre distintas asignaturas. Por ejemplo, las situaciones presentadas en la tarea El repartidor de pizzas pueden desarrollarse desde la clase de Educación Física, Contabilidad, Física y Lengua Castellana.

La segunda estrategia es defensiva y se trata de realizar una campaña de socialización y concienciación sobre los beneficios de la unidad didáctica y su favorable implementación en la institución educativa. Se trata de destacar el enfoque de cada tarea, la cohesión y coherencia, y el aporte que ellas hacen para el logro de los objetivos propuestos. Además, se podría enfatizar la relación que dichos objetivos tienen con los estándares del MEN y las competencias PISA. Se pueden resaltar las capacidades que desarrollarían en los estudiantes de acuerdo con su edad y nivel académico, al igual que la importancia de la comunicación y el trabajo colaborativo.

Además de estas, planteamos una estrategia denominada de supervivencia, que consiste en crear nuevas tareas en las que pueda realizarse mayor énfasis en la modelación de expresiones aritméticas que involucren adición y sustracción de números enteros. Las tareas deben llevar a la comprensión de términos y a la generación de espacios de socialización que permitan dar el paso entre los diferentes sistemas de representación. Justificaríamos frente a la institución educativa la necesidad de trabajar los estándares establecidos por el MEN, ya que indistintamente de los momentos en que se aborden las temáticas propuestas, la unidad didáctica constituiría una propuesta distinta de presentar el tema de las matemáticas escolares en el aula.

Finalmente, proponemos una estrategia de reorientación, en la que revisamos las situaciones propuestas en las tareas de la unidad didáctica y las

replanteamos, incluyendo contextos que involucren la nomenclatura de la ciudad en la que viven, para desarrollar competencias por medio de situaciones aditivas reales que involucren los números enteros.

3. Nuevo diseño

Para el nuevo diseño proponemos tener en cuenta las correcciones que surgieron de las debilidades encontradas y, con base en ellas, diseñar una actividad, una tarea y un glosario, que se incluirán en diferentes sesiones de la secuencia (figura 9).

1. Corrección de las debilidades

Proponemos la siguiente actividad para activar conocimientos previos y fomentar el planteamiento de expresiones aritméticas.

El clima del aeropuerto

La temperatura medida en el aeropuerto a las siete de la mañana es de 5°C ; de 7 a 9, la temperatura aumentó 3° ; de 9 a 1, disminuyó en 6° ; de la 1 a las 3 no varió; de las 3 a las 6 bajó 2° ; de las 6 a las 9 descendió 4° ; y de las 9 a las 12 descendió 8° .

Respecto a la temperatura de las 12 de la noche, se puede afirmar que:

- a) Aumentó 17°C , respecto a la temperatura inicial.
- b) Disminuyó 17°C , respecto a la temperatura inicial.
- c) Aumentó 12°C , respecto a la temperatura inicial.
- d) Disminuyó 12°C , respecto a la temperatura inicial.

Justifica tu respuesta.

De las 9 a las 3, la temperatura fue:

- a) -6°C .
- b) $+6^{\circ}\text{C}$.
- c) 6°C .
- d) 2°C .

Justifica tu respuesta.

Plantea una expresión aritmética que represente cada una de las siguientes situaciones:

María abre una cuenta bancaria con un total de \$200 000, al cabo de una semana aumenta su saldo en \$416 000 y luego realiza una compra con débito automático por un total de \$57 000, ¿cuál es el saldo actual de la cuenta?

En la mañana, la temperatura era de 5 °C bajo cero y al medio día aumentó 8°, ¿qué temperatura hacía en ese momento?

Tarea: El joven y el mar (adaptado de Alsina, 1982)

¿A qué altura aproximada está cada uno de los objetos que se encuentran situados sobre el nivel del mar?

¿A cuántos metros está el nivel del mar?

¿Cómo marcarías las alturas dentro del agua?

¿Qué orden darías, según la altura en que se encuentran, a cada uno de los elementos que ves dibujados?

Si el pescador quiere sentarse debajo de la palmera, ¿cuántos metros tiene que subir?

Si el buceador quiere pescar el pulpo, ¿cuántos metros tendrá que recorrer?

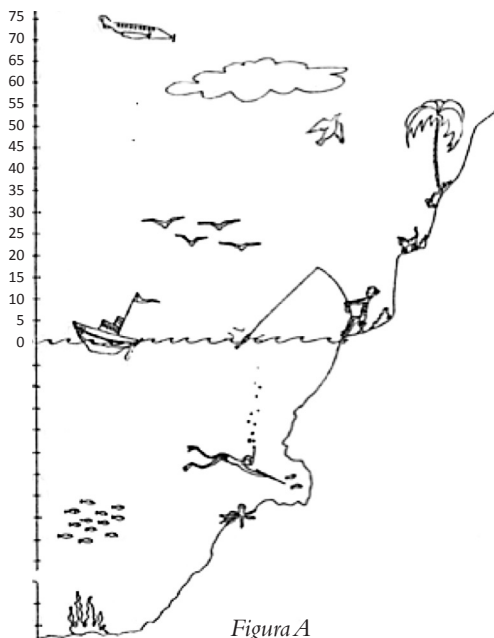
Si las gaviotas quieren beber agua, ¿cómo y cuánto se desplazarán?

¿A qué altura está el avión respecto a la nube? ¿Y el pájaro?

Si el buceador quiere ir a ver si hay algún pez detrás de las algas ¿qué tendrá que hacer?

Si después quiere salir a respirar y descansar bajo la palmera, ¿qué distancia recorrerá?

¿Qué longitud habría de tener el sedal de la caña del pescador para poder pescar uno de los peces que se encuentra sobre el buceador?



Glosario de palabras cotidianas que aparecen en las tareas

Desplazamiento: trasladarse de un lugar a otro.

Longitud: distancia entre dos puntos.

Consignación: incremento en una cuenta bancaria.

Depósito: consignación de dinero.

Débito automático: descuento de dinero de una cuenta al realizar una compra.

En resumen, el nuevo diseño consta de un total de ocho sesiones, como mostramos en la figura 9.

Sesión 0 Presentación	Sesión 1 Objetivo 1	Sesión 2 Objetivo 1	Sesión 3 Objetivo 2	Sesión 4 Objetivo 2
Presentación de la unidad	Entrega de la prueba diagnóstica calificada	Tarea El joven y el mar	Entrega de la tarea Lucho el ciclista calificada	Entrega de la tarea Encontrar las llaves calificada
Presentación de los objetivos	Tarea 1 Representaciones en la recta numérica	Tarea 2 Lucho el ciclista	Tarea Encontrar las llaves	Elaboración del glosario para planear expresiones aritméticas
Explicación del sistema de evaluación				Tarea El clima del aeropuerto
Prueba diagnóstica				
Diario de clase	Diario de clase	Diario de clase	Diario de clase	
Puesta en común	Puesta en común	Puesta en común	Puesta en común	Puesta en común

Sesión 5 Objetivo 3	Sesión 6 Objetivo 3	Sesión 7 Objetivo 3	Sesión 8 Objetivo 3
Entrega de la tarea para expresiones calificada	Entrega de la tarea El minero calificada	Entrega de la tarea El skater calificada	Entrega de la tarea El repartidor de pizzas calificada
Tarea El minero	Tarea El skater	Tarea El repartidor de pizzas	Examen final
Diario de clase	Diario de clase	Diario de clase	Retroalimentación
Puesta en común	Puesta en común	Puesta en común	Notas finales

Figura 9. Propuesta de nuevo diseño

8. Conclusiones

A lo largo de este informe hemos presentado el diseño y descrito la implementación de nuestra unidad didáctica. Primero, describimos el problema por abordar desde el contexto donde se desarrollaría y luego fundamentamos la unidad didáctica como solución al problema planteado con base en el análisis didáctico. Posteriormente, realizamos la descripción y justificación de su diseño y de su implementación en un colegio privado de Bogotá. Evaluamos la implementación a partir de las tareas desarrolladas mediante instrumentos que hemos diseñado. Finalmente, realizamos un balance para el diseño de la unidad didáctica a partir del análisis DAFO y planteamos algunas estrategias por tener en cuenta en función de la situación de la que se trate. Estas estrategias fueron consideradas para el nuevo diseño propuesto, como aspectos de la implementación frente al diseño y de la evaluación de esta.

En este apartado exponemos nuestras conclusiones basadas en el diseño, implementación y evaluación de la unidad didáctica.

1. Posibilidades de éxito para una nueva implementación

Consideramos que esta unidad didáctica presenta un gran potencial para implementaciones posteriores. El éxito se logra alcanzar por las siguientes razones: (a) la unidad didáctica se diseñó con base en un análisis didáctico profundo y detallado, (b) se realizó una propuesta de mejoras específicas, (c) las tareas desarrolladas son contextualizadas, (d) se utilizan materiales y recursos para su solución y (e) el agrupamiento de las estudiantes puede fomentar la interacción entre ellas. Explicamos estas cuestiones a continuación.

1. Unidad didáctica a partir del análisis didáctico

La unidad didáctica que fue diseñada por nuestro grupo se realizó con base en el análisis didáctico desarrollado por Gómez (2007). Como se mencionó en el tercer y quinto apartado de este documento, la aplicación de tareas contextualizadas favoreció la consecución de las expectativas de aprendizaje propuestas, debido a que se logró cercanía entre las situaciones presentadas y la cotidianidad de las estudiantes. De esta manera, fenómenos como el fútbol, el ciclismo y la temperatura, presentados desde el contexto de la adición y sustracción de los números enteros, lograron la puesta en marcha de tareas interesantes y llamativas para las estudiantes. A su vez, estas tareas están basadas en los conceptos y procedimientos establecidos en el análisis de contenido. Por ejemplo, para

la tarea El repartidor de pizzas, se requieren los procedimientos de adición y sustracción de enteros y valor absoluto, y de conceptos como los números signados, recta numérica, propiedades aditivas de enteros y valor absoluto propuestos en la estructura conceptual.

Por otro lado, es bastante factible que los estudiantes se motiven a profundizar en el tema, debido a que ellos pueden considerar que el contenido matemático trabajado en la unidad didáctica es útil para su vida diaria (personal y/o académicamente), ya que las tareas están basadas en fenómenos.

2. Uso de materiales y recursos

El manejo de recursos (sumadora de enteros, fichas bicolores y la recta numérica), de acuerdo con los aportes realizados por los estudiantes, favoreció el logro de las expectativas de aprendizaje propuestas en términos de competencias, objetivos y capacidades, por tratarse de elementos que permitieron manipular las cantidades representadas, dando sentido así a las situaciones. Los materiales y recursos, además de favorecer la comprensión de las situaciones expuestas, contribuyeron a la resolución de las tareas y tuvieron un alto grado de aceptación. Esto se puede constatar en la información recopilada en el diario del estudiante y en el cuestionario individual de evaluación.

3. Interacción entre estudiantes

Las tareas propuestas para la unidad didáctica fueron planteadas para ser trabajadas de manera grupal y de acuerdo con la conformación de parejas y del grupo de tres estudiantes establecidos al inicio de la implementación. Este tipo de agrupaciones resulta interesante debido a las contribuciones del aprendizaje cooperativo en la educación escolar. Como consecuencia, apreciamos algunos beneficios provenientes de las agrupaciones realizadas entre las estudiantes. Por ejemplo, a raíz de las interacciones realizadas, estas pudieron fortalecer su capacidad de argumentación para validar los resultados obtenidos durante las sesiones de trabajo, adquiriendo así destrezas en el planteamiento y resolución de problemas, y logrando avances significativos en la modelización de las situaciones planteadas. En el cuestionario de evaluación se evidencia el aporte y el agrado que tales interacciones tuvieron para el desarrollo y la solución de las tareas.

2. Reflexión sobre la experiencia en MAD

A continuación, describimos nuestra experiencia como grupo de estudiantes de la Maestría en Análisis Didáctico en la Universidad de los Andes y también

como profesionales en el campo de la enseñanza de las matemáticas. Esta reflexión está basada en las actividades realizadas por nosotros en MAD durante los dos años de duración de este programa de maestría.

1. Nuestra experiencia como grupo

Haber trabajado en equipo durante dos años para desarrollar el presente trabajo ha permitido el aprendizaje de diversos aspectos sociales. Por ejemplo, aprendimos a aceptar nuestras diferencias personales, hecho que contribuyó a centrarnos en nuestro trabajo sin mezclar esos dos aspectos. Esas diferencias se pudieron manejar estableciendo acuerdos entre los miembros del grupo y asignando roles, con el fin de lograr nuestro objetivo: realizar la unidad didáctica de la mejor manera posible.

2. Actividad profesional

El trabajo realizado y el conocimiento adquirido en MAD han contribuido especialmente en nuestra forma de planificar las clases. Partiendo de la delimitación del contenido y la formulación de tareas no rutinarias apropiadas para el logro de los objetivos propuestos, con base en una serie de fenómenos dentro de contextos específicos. La experiencia modificó nuestra forma de actuar frente a las preguntas y posibles errores en los que pueden incurrir los estudiantes, y nos permitió constatar la utilidad e importancia de los instrumentos que se pueden tener en cuenta para recoger información del proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. También, nos permitió ser conscientes de que la inclusión de materiales y recursos permiten cambiar la rutina de las clases y motivar su desarrollo, al mejorar el proceso de apropiación de conceptos y procedimientos de un tema específico.

Por otra parte, hemos adquirido dominio frente a aspectos teóricos y prácticos de innovaciones en Educación Matemática pertinentes a nuestro contexto y labor cotidiana. Lo logramos al llevar a cabo cada una de las actividades preparadas por nuestros formadores y con la guía de nuestra tutora, quien con su constante realimentación nos permitió mejorar cada vez más la calidad de este trabajo.

9. Referencias

Alsina, C., Barba, D., Batlle, I., Burgués, C., Giménez, J., & Partegás, J. (1982). *Didáctica de los números enteros*. Madrid: Editorial Nuestra Cultura.

- Carretero, R., Coriat, M., & Nieto, P. (1993). *Etapas 12/16. Área de matemáticas: secuenciación, organización y actividades de aula*. Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2007). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas. En Autor (Ed.), *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (pp. 17-101). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, 2 (Especial), 78-89.
- González, M. J., Gómez, P., & Lupiáñez, J. L. (2010). *Apuntes sobre análisis cognitivo*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Johnson, D., & Johnson, R. (1994). *Cooperative learning in the classroom*. USA: Assn for Supervision & Curriculum. Michigan: Michigan University.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas y ciencias ciudadanas*. (1ed.). Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional (2009). *Decreto 1290 de 2009*. Colombia.
- OCDE (2004). *Learning for tomorrow's world first results from PISA 2003*. Paris: OECD publications.
- Polya, G. (1973). *How to solve it*. (2nd ed.). Princeton, NJ: University Press.
- Ponte, J. P. (2004). *Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos*. En J. Giménez, L. Santos, & J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.
- Rico, L. (1997). Concepto de currículo desde la educación matemática. En Autor (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 211-263). Madrid: Editorial Síntesis.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rodríguez, G. (1993). *Estructuras matemáticas 7º*. Bogotá: Editorial Rei Andes

10. Bibliografía

- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- Gómez, P., Cañadas, M. C., González, M. J., Flores, P., Lupiáñez, J. L., Marín, A., ... Romero, I. (2010). MAD: maestría en Educación Matemática en Colombia. En M.T. González, M. Palarea, & A. Maz (Eds.), *Seminario de Investigación de los Grupos de Trabajo Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Educación Matemática de la SEIEM* (pp. 7-25). Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

- Gómez, P., Peñas, M., Flores, P., Molina, M., Bosch, M. A., Codina, A., ... Lupiáñez, J. L. (2006). *Guías y normas para la publicación de artículos*. Documento no publicado (Documentación). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. (2010). *El análisis didáctico como herramienta para el análisis de textos de matemáticas*. Documento no publicado (Informe). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L., Rico, L., Gómez, P., & Marín, A. (2005). *Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Congreso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM) (18-22 Jul 2005). Oporto, Portugal.
- Piaget, J. (1978). *Introducción a la epistemología genética: el pensamiento matemático*. Buenos Aires: Paidós.
- Rico, L. (2007). *Herramientas matemáticas y competencias escolares*. Conferencia en las XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (XIII JAEM), Granada, Julio 2007.

11. Índice de anexos

Los anexos de este capítulo se encuentran disponibles en <http://funes.unian-des.edu.co/1890/>.

Anexo 1. Presentación de la unidad didáctica

En este archivo se muestra la presentación de los objetivos de la unidad didáctica a las estudiantes, algunos ejemplos ilustrativos para estas y los criterios de evaluación.

Anexo 2. Lista de chequeo de la parrilla de observación

Se presenta la lista de chequeo para verificar la activación de capacidades en las estudiantes, de acuerdo con la parrilla de observación prevista para la tarea El repartidor de pizzas.

Anexo 3. Preguntas específicas para las tareas

Se muestran preguntas relacionadas con la tarea propuesta y de acuerdo con el objetivo. Estas preguntas se formularon antes de iniciar cada tarea.

Anexo 4. Diario del estudiante

Este archivo contiene el diario que diligenciaron las estudiantes al finalizar cada tarea; recoge preguntas relacionadas con los temas específicos de cada una de ellas y un *matematógrafo* en el que pueden registrar su estado de ánimo.

Anexo 5. Diario del profesor

En este archivo se presenta el formato que diligenció el profesor durante cada sesión de clase.

Anexo 6. Actividad inicial diagnóstica

En este archivo se expone la actividad diagnóstica aplicada a las estudiantes.

Anexo 7. Capacidades previas a la prueba diagnóstica y posibles errores

En este archivo se muestran las capacidades previas previstas para que las estudiantes resuelvan la prueba diagnóstico y un listado de los posibles errores en los que pueden incurrir.

Anexo 8. Rúbricas de las tareas

Este archivo contiene las rúbricas de las tareas desarrolladas durante la implementación de la unidad didáctica.

Anexo 9. Examen final de la unidad didáctica

En este archivo se presenta el examen final aplicado a las estudiantes al finalizar las tareas diseñadas para la unidad didáctica.

Anexo 10. Rúbrica del examen final

Este archivo contiene la rúbrica diseñada para la evaluación del examen final de la unidad didáctica.

Anexo 11. Cuestionario individual de evaluación

En este archivo se presenta el cuestionario individual de evaluación diligenciado por las estudiantes al finalizar la unidad didáctica.