LAS MATEMÁTICAS DE LAS BURBUJAS: SUPERFICIES MINIMAS

Autores: Noel Uribe y Leo Maier (estudiantes Profesorado en Matemática), Cristian Glusko (estudiante Profesorado en Física), Norma Di Franco (Profesora en Matemática), Claudia Gentile (Profesora en Matemática) y María Graciela Di Franco (Lic en Ciencias de la Educación)

ndifranco@hotmail.com

Facultad de Ciencias Humanas – UNLPam
Coronel Gil 353 – 2° Piso - (6300) Santa Rosa - La Pampa
+54 (0)2954-451600, Fax +54 (0)2954-433037

La Propuesta

El presente trabajo intenta mostrar algunos recorridos, que un grupo pequeño de profesores y estudiantes venimos desarrollando, interesados por el análisis y la producción de materiales alternativos para la enseñanza de las disciplinas.

Esta propuesta se sostiene en la fuerza del trabajo colaborativo y la necesidad de abordar la complejidad de las prácticas en la formación de profesores articulando reflexión teórica, formación docente y disciplinar. Se enmarca en un Proyecto Acreditado por el Consejo Directivo de la Facultad de Ciencias Humanas de la UNLPam, que persigue una doble finalidad: por un lado, la posibilidad de construir espacios de vinculación entre la Universidad y la Escuela; entre los saberes teóricos y la práctica educativa y entre la formación docente y las disciplinares. Por otro, la intencionalidad de producir materiales escolares que procuren salvar las distancias mencionadas como intervención en el curriculum enseñado.

La experiencia en este caso está focalizada en áreas de Física y Matemática, vinculadas a conceptualizaciones acerca de la tensión superficial, las superficies minimales y los caminos de recorridos mínimos, en una propuesta de trabajo con burbujas y pompas de jabón, que ensayamos inicialmente en aulas de secundario, y de las que recuperamos el especial interés generado en los estudiantes.

Las películas jabonosas o las superficies minimales no constituyen contenidos que se correspondan directamente con prescripciones curriculares en ningún nivel de la educación institucionalizada en los que los presentamos. Este es, también, un desafío para nuestro grupo, poder poner en valor y en discusión, en las instituciones, saberes con fuertes vinculaciones pero, en principio, no considerados entre los saberes escolares oficialmente propuestos.

A modo de reflexiones iniciales

"Un segmento rectilíneo es la línea mas corta entre dos puntos, un arco de círculo máximo es la curva mas corta que une dos puntos sobre una superficie esférica, la circunferencia es la que encierra mayor área entre todas las curvas planas cerradas de igual longitud, la esfera es que la encierra el mayor volumen entre todas las superficies cerradas de igual área." (Courant y Robbins, 1979: 340). Expresiones como éstas son muy frecuentes en todo tipo de materiales editados que circula y que hacemos circular en las aulas de matemática. A partir de algunas discusiones al interior del grupo comenzamos a preguntarnos si se trata de saberes construidos por los estudiantes. Y en tal caso, ¿de qué maneras se conceptualiza acerca de ellos?

Los autores nos acompañan en un recorrido que recupera esas propiedades de máximos y mínimos ya conocidas por los griegos. Se referencia en esas épocas y se atribuye a Herón de Alejandría – s I a. de n.e. – la caracterización de la trayectoria real de un rayo de luz, como el camino mas corto posible[1], construcción que puede considerarse como el origen de la óptica

[1] Desde épocas anteriores a Herón se sabía que un rayo de luz procedente de un punto P y que incide sobre un espejo plano L, en un punto R, se refleja en dirección a un punto Q, tal que PR y QR forman ángulos iguales con el espejo. La contribución que se atribuye a Herón es la de determinar que, si R´ es otro punto del espejo, la distancia total PR´ + R´Q es mayor que la distancia PR + QR. Esto es, la trayectoria PQR de la luz, es el camino más corto posible entre P y Q.

geométrica. Desde entonces al siglo XVII, en que se inicia la teoría general de los valores extremos, y en que -con Fermat y el cálculo diferencial- se inicia también la posibilidad de proponer unos métodos generalizados para estudiar problemas de valores extremos. Siglo XVIII, de ampliación de los métodos, de elaboración del cálculo de variaciones, de mayor complejidad y de gran aporte a la matemática actual. Siglos XIX y XX, de articulación del análisis y la topología en el desarrollo de la teoría de los valores estacionarios y la generalización del concepto de valores extremos.

En este marco, estudios realizado acerca de redes de caminos de longitud total mínima, superficies minimales, burbujas y otras películas de jabón – Courant y Robbins (1979), Hildebrandt (1990), Díaz Díaz (2000), Rodríguez Pérez (2005) , Ferreyra y Otros (2002), Garza Hume (2001) - nos aportan interesantes reflexiones y recorridos históricos.

De aquellos conceptos y problemas, cobran particular centralidad para la presente experiencia los relacionados con el análisis de las formas de las burbujas – la esfera como superficie de área mínima para un volumen dado- , el problema de Steiner[2] - sistemas conexos de segmentos rectilíneos de longitud total mínima- o el llamado problema de Plateau[3] – como experimento con películas de jabón que representan soluciones empíricas de problemas de mínimos.

En el trabajo del grupo y en relación a los ensayos en aulas, se hizo cada vez más importante la necesidad de pensar estos problemas que nos involucraban con la geometría y con la física sin que pudiéramos dimensionar las proyecciones. El mundo físico, con el aporte de opciones para seguir pensando el campo construido y conceptualizado del espacio geométrico, en el cual los caminos y las superficies mínimas son objeto de reflexión y de análisis. Esto nos significó entonces, la necesidad de pensar en resultados que van más allá de los saberes experienciales y de la verificación empírica, que buscan sus posibilidades en la argumentación, en la interpelación al mundo sensible y en la búsqueda de una validez sostenida desde construcciones más próximas al trabajo matemático.

En el proceso, de miras a una construcción de objetos geométricos, apelamos a la ayuda de Sistemas de Geometría Dinámica como el Geogebra ya que su entorno permite la inclusión de muchos casos, revisados en cortos tiempos, en los que se evocan objetos y se traducen físicamente conceptos, situaciones, relaciones y propiedades sobre las cuales se está focalizando el trabajo con los estudiantes.

Recuperamos aportes de experiencias con sistemas, como el del grupo italiano Mathesis, cuyos referentes teóricos proponen una doble dimensión de los objetos geométricos, figurativa y conceptual, en la construcción de "objetos figurales, entidades que aparecen como entidades abstractas ideales – como cualquier concepto – y al mismo tiempo son intuitivamente representables y manipulables como si fueran un objeto real" (Fischbein en Damiani y Otros, 2000: 63).

En todo momento la intencionalidad pedagógica de la propuesta se reorientaba por la posibilidad remontar del espacio físico, experimentado y sensible, una construcción reflexionada y argumentada para la conceptualización geométrica.

Esas complejas relaciones entre el espacio físico y el espacio geométrico, ratificadas tanto en el trabajo en el ámbito de lo empírico -jugando con las membranas de jabón-, en el intento por llevarlo a las representaciones y esquemas mas dinámicos ayudados por la tecnología de los soft, como en el de los esquemas de objetos mas abstraídos, que participan de un mundo simbólico mas cercano al trabajo en matemática, han sostenido las expectativas y marcado la dinámica del grupo por la fuerza de una gran virtualidad. Se trata del poder anticipatorio: ese conjunto de elementos que vamos leyendo de los objetos con los cuales interactuamos, que comienzan a tener un sentido particular y permiten pensar cómo sería la situación en tal contexto análogo o transferido, cómo se podría llevar a un caso de redes mínimas entre más puntos, de relaciones y propiedades identificables en los formatos de los caminos con diferentes disposiciones de puntos, con más burbujas que se intersequen, de algunos de los elementos planteados en el problema de Steiner o en el de Plateau. Anticipación que traduce la necesidad de una construcción conceptual generalizada, que prescinda de los experimentos y especule con el espacio físico representado.

---

[2] "Tres aldeas, A, B, C, han de ser unidas por un sistema de carreteras de longitud total mínima." (Courant, 1979:364) Determinar el sistema de caminos de longitud total mínima que une a las tres poblaciones.

[3] Denominación debida al físico belga (1801-1883), aunque su origen fuera anterior y que recupera su trascendencia en momentos iniciales del cálculo de variaciones. "En su forma más simple consiste en encontrar la superficie de área mínima limitada por un contorno cerrado dado en el espacio" (Courant, 1979:396)

La experiencia en aula

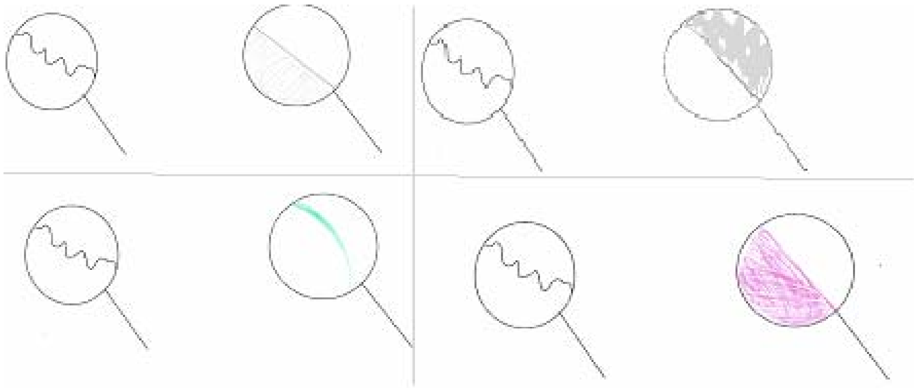
La propuesta actual, señalábamos anteriormente, planteada como estudiantes y profesores interesados por cuestiones didácticas y de divulgación, se funda sobre las posibilidades de trabajar algunos problemas de máximos y mínimos, desde una geometría elemental, que pueda estar presente en la enseñanza de los contextos educativos que aquí referenciamos. Para cada caso (superficies mínimas y caminos mínimos) el diseño de prototipos experimentales de fácil manipulación funcionó como el contexto de habilitación de las posibilidades mencionadas. La idea que nos orientaba era la de intentar analizar argumentos geométricos, matemáticos, intuiciones espaciales, construidas a partir del trabajo con estas membranas jabonosas que son las pompas y las burbujas y sus efímeras muestras aunque profundas contribuciones.
A las complejidades tecnológicas del diseño y construcción de dispositivos para las pompas y burbujas, se agregan las de poder traducir en sistemas de análisis de muchos casos, de verificación mediante el uso de Geogebra, las posibilidades de pensar conceptualizaciones de la óptica geométrica o la tensión superficial de la física, entre otras.
Diferentes momentos de actividad desarrollada en las instituciones escolares puede permitirnos expresar más específicamente algunos alcances, intencionalidades y dificultades.

- Si se trata de reducir tensiones, la receta es hacerlo en superficies de áreas mínimas y en el equilibrio de la mínima energía (acerca de las formas de las pompas y de las burbujas).

Si se sumerge cualquier contorno cerrado, de alambre, en un líquido de baja tensión superficial, al extraerlo, quedará formada en ese contorno una película que adopta la forma de una superficie de área mínima. La tendencia de la membrana es a adoptar un equilibrio estable – que se traduce en la formación de una superficie de área mínima – que corresponde al menor valor posible de energía potencial debida a la tensión superficial.
En esta instancia, y llevando adelante uno de nuestros ensayos en clases de secundario, para mostrar cómo actúa la tensión superficial llevando a adoptar la superficie mínima, sumergimos un aro rígido de alambre, con un hilo que forma un lazo cerrado en el interior.


(*)

Cuando se rompe la superficie jabonosa en el interior del hilo, la tensión superficial de la superficie externa hace que éste adopte una forma perfectamente circular.
Mas tarde, pedimos que se imaginaran como quedaría la pompa si sumergimos en agua jabonosa un aro con un hilo no tenso – atado entre dos puntos de un arco de circunferencia – (como el de la imagen puesta a continuación) - y luego rompemos la película de una de las partes en que queda dividida.
Los protocolos nos ayudan a advertir la complejidad de los procesos de anticipación, en que las transferencias no son inmediatas ni espontáneas.
La mayoría de los dibujos reproducen la idea de las dos primeras imágenes: la película queda distribuida cubriendo un semicírculo y el hilo queda tensado entre los dos extremos del arco de semicircunferencia. Pocos protocolos muestran la película reducida a una superficie - la mínima posible - determinada por la curva cerrada que define el arco rígido metálico, en una parte, y en el resto por la curva del hilo adaptándose a la estabilidad de una superficie de área mínima. Podría considerarse el cuadro inferior izquierdo en esta imagen como un ejemplo rudimentario de esos pocos casos.



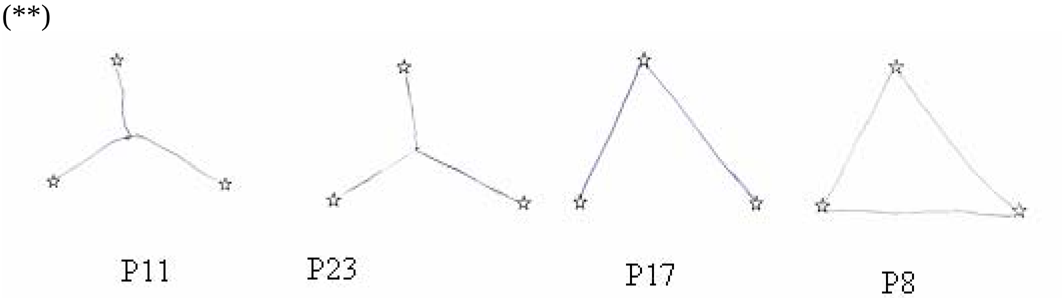
(**)
Sumergimos en agua jabonosa el aro, pusimos en evidencia empírica lo que queríamos.



Ahora bien: después de trabajar con los estudiantes acerca de la tensión superficial en su efecto reductor a la superficie de área mínima y luego de mostrar el aro rígido de alambre, con un hilo que forma un lazo cerrado en el interior, como ejemplo; la mayoría de los estudiantes no podía determinar esa área mínima en el caso de un aro con un hilo no tenso – atado entre dos puntos del arco de circunferencia –. Cuánto para reflexionar acerca de la implicancias didácticas y de conceptualizaciones geométricas de lo que entendemos por juegos de anticipación. Todo nos alerta de manera contundente acerca de las inmediateces que atribuimos a los procesos anticipatorios.

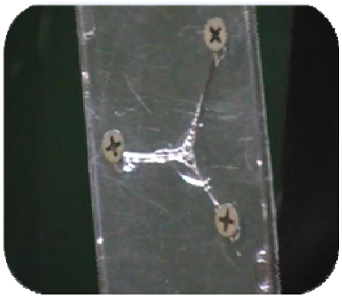
- Si se trata de pensar la ubicación para construir una escuela rural entre tres pequeños pueblos.

La idea en este caso gira alrededor del problema de Steiner de las redes de carreteras de longitud total mínima. Matemáticamente, equivale a hallar un punto P para que la suma de las distancias de P a A, a B y a C, respectivamente, sea mínima.
Distribuimos entre los estudiantes unos esquemas dibujados en papel de 3 y 4 puntos en un plano. Les propusimos que dibujen cómo se imaginaban que quedaría determinado el trazado del camino de mínima longitud total.
Algunos alumnos dibujaron a partir de considerar un punto que claramente jugaba el rol del "P de Fermat",[4] desde el cual se subtienden ángulos de 120º con respecto a los otros tres puntos, entre los cuales determinar el camino. Otros protocolos muestran que "la intuición" orientaba a pensarlo como los lados que cierran el perímetro del triángulo que tiene por vértices a esos puntos. Otros, muy interesantes, toman 2 de los 3 lados como camino.
(**)

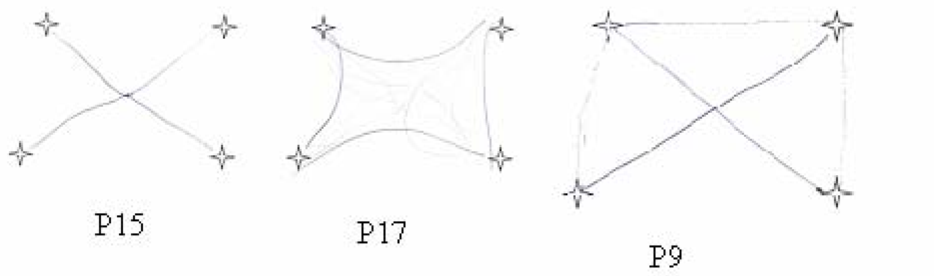


Mostramos a continuación cómo quedaba formada la película de jabón entre 3 puntos con esas disposiciones en el plano.

[4] Problema de P. Fermat: dado un triángulo de ángulos agudos, localícese un punto P tal que la suma de distancias a los vértices sea lo más pequeña posible. A tal punto se lo denomina punto de Fermat.

  (*)

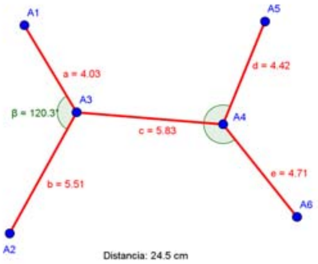
Mostramos con Geogebra que, de las posibilidades propuestas, claramente, una es la de longitud menor y es la que coincide con lo que determinan las pompas.
Vale señalar que, en la primera presentación, no fue clara la muestra de las diferencias de camino entre tres puntos que se dispusieran como los vértices de un triángulo acutángulo, de la configuración de tres puntos cuando alguno de los ángulos subtendidos es mayor de 120º.
Tres inquietudes marcaban fuertemente el diálogo y el intercambio con los estudiantes. Una, acerca de la forma del camino mínimo. Otra, la mas sencilla de resolver, mostrar que es el mínimo de los propuestos (Geogebra, nuestra ayuda). Por último: qué argumentos, racionales y matemáticos, desprendidos del espacio físico, nos permitirían pensar si es único, si existen varias formas que definen la misma longitud, si es el mínimo.
Sin más intervenciones proponemos a los estudiantes que dibujen cómo se imaginan que quedarán esas redes de mínima longitud entonces, si consideramos cuatro puntos en un plano.
Nueva inquietud: la “visualización” de la situación para tres puntos, ¿es un recurso para anticipar cómo quedará con los cuatro puntos? ¿Será suficiente? ¿Permitirá advertir si diferentes posiciones relativas de los puntos determinan diferentes trazas?
A partir de eso, ¿cómo pensar algunas relaciones entre suficiencia, necesariedad, precisión, anticipaciones y conceptualizaciones?
Algunos protocolos con la expresión de los estudiantes nos permiten seguir reflexionando: mayoritariamente los dibujos señalan el camino de mínima longitud entre cuatro puntos a partir de determinar un punto a modo de cruce de las diagonales del cuadrilátero. ¿Será que los saberes intuitivos orientan mayoritariamente a eso? ¿Será que es una de las posibilidades más escolarizadas? ¿Será que los que consideramos saberes intuitivos espaciales están teñidos de concepciones que circulan en la escuela -que se construyen y se refuerzan sistemáticamente-?
Otros alumnos proponen los lados que definen el perímetro del cuadrilátero que queda determinado por esos puntos como vértices. Un estudiante, en una propuesta tan interesante como en el caso de tres puntos, marca que tres de los cuatro lados ya vinculan esos puntos. Otro que particularmente invita a la reflexión es el que, después de dibujar tres de los cuatro lados, pasa corrector a su papel y sobredibuja las “diagonales”.
(**)

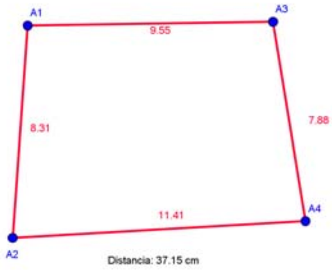


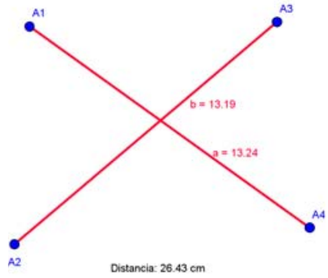
En ningún caso se dibuja una solución como la de la imagen que depositó en las pompas la única posibilidad de ser mostrada.

 (*)

Nuevamente mostramos con geogebra que, de las posibilidades presentadas, una es la de longitud menor y es la que coincide con lo que determinan las pompas.



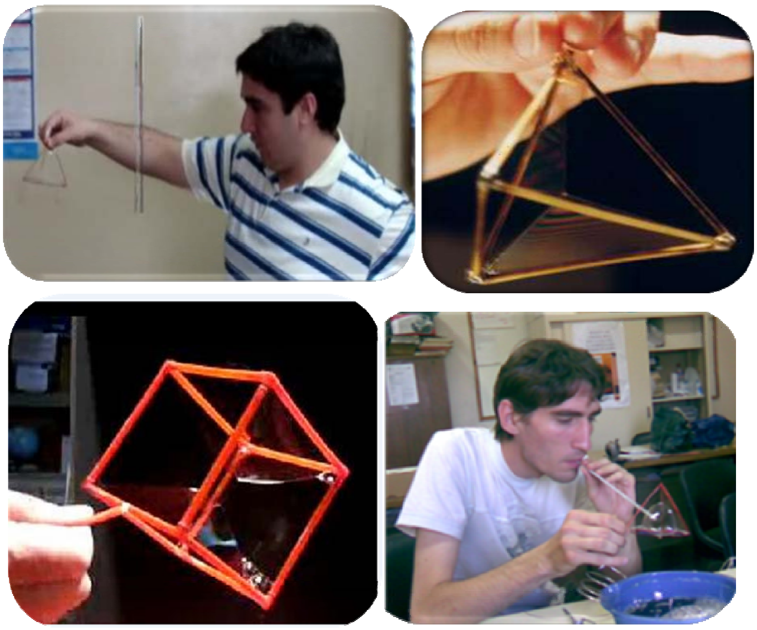




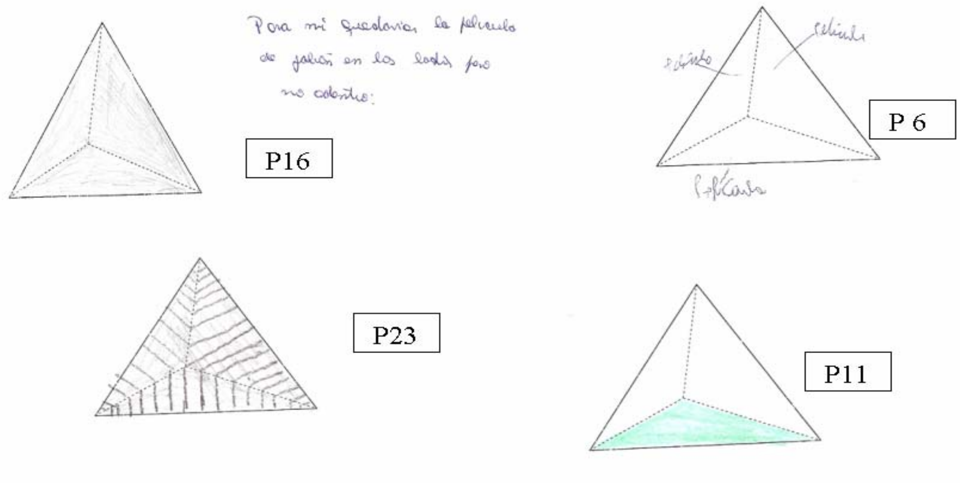
Sabemos además que, si los puntos A_1, A_2, A_3 y A_4 son los vértices de una poligonal simple con ángulos mayores de 120º, la red de longitud total mínima estará dada por la misma poligonal, cuestión que no alcanzamos a sistematizar con los alumnos.
Se nos hace necesario pensar nuevas estrategias que nos ayuden a seguir reflexionando.
Por otra parte, y simultáneamente, está presente la posibilidad de ir generalizando algunas regularidades que orienten a pensar que en esta redes de longitud mínima, de ser *n* los puntos considerados, existirán por lo menos *n-2* intersecciones múltiples, en cada una de las cuales tres segmentos formarán ángulos de 120º.

- ¿Porqué cambiar la carpa canadiense por una carpa iglú? (Superficies mínimas en otras estructuras)

Un intento más: el de mostrar una “solución” al problema de Plateau. Fue organizado a partir de considerar los contornos cerrados dados por estructuras de tetraedros y cubos, entre otros, y analizar cómo quedan determinados por las películas de jabón los sistemas de superficies mínimas entre las aristas.



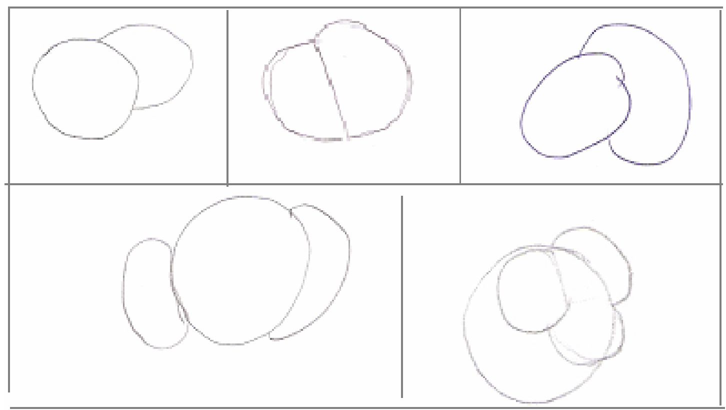
El contraste entre los dibujos de los estudiantes que, como ejercicio de anticipación, apuestan a las caras del tetraedro y lo ratifican desde la escritura – “para mi quedaría la película de jabón en los lados pero no adentro” (protocolo de un alumno) - con el resultado de sumergir en jabón la estructura de varillas y ver como quedan determinadas las películas que ocupan superficies mínimas, nos vuelve a interpelar acerca de las relaciones entre mundos físicos, campos geométricos, conceptualizaciones y posibilidades de construir anticipaciones.



(**)

- Un elemento más para el análisis surge a partir de la consigna de dibujar dos burbujas que se encuentran en el espacio. Los planteos acerca de si se chocan, cómo, si una subsume a la otra, o qué pasa si son tres burbujas, se desarrollaban mientras los estudiantes venían observando y realizando burbujas desde el inicio de esta experiencia.

Algunos protocolos ayudan a pensar que el problema planteado por Plateau, se encuentra lejos de resultar sencillo, para la mayoría de los estudiantes en estos contextos (chicos de secundarios céntricos en nuestra ciudad, con escolaridades previas que dan cuenta de haber promovido el registro de regularidades, acostumbrados a participar e intervenir en la construcción de saberes, algunos – los de 2º año – que manifiestan haber tenido experiencias escolares anteriores vinculadas a laboratorios, relacionados con comportamientos hidrófóbicos/ hidrofílicos de sustancias, por ejemplo, que permitirían pensar en efectos de la tensión superficial, otros – los de 1º año – que habían trabajado en el análisis de situaciones con isoperimétricos, como situaciones que pudieran aportar a las lógicas de minimización de recorridos y/o de áreas). Con todo, no surge como posible anticipar tan inmediatamente aún cuando podíamos tener elementos para confiar en que los estudiantes participaban con sus marcos interpretativos dispuestos para la comprensión.



(**)[5]

(*)[6]

[5] Todos los protocolos que figuran con (**)han sido recogidos en las experiencias con alumnos de, entre 15 y 17 años, presentadas en: 2º año del secundario del Colegio de la UNLPam - nov de 2009- y 1ºaño Polimodal Colegio Normal – abril 2010.

Algunas consideraciones provisionales





Un elemento de reflexión que profundizó su importancia en la experiencia hasta aquí desarrollada por este grupo de estudio, es que utilizando materiales accesibles pudimos fomentar desde una propuesta exploratoria un trabajo reflexivo, que se tradujo en una posibilidad de que los alumnos y alumnas con los que realizamos la experiencia puedan construir sus propias ideas matemáticas, acepten asumir la responsabilidad de esas producciones, en una participación en equipo, una instancia donde la creatividad y las actitudes positivas hacia la innovación parecían tener todas sus oportunidades. Todo esto queda sintetizado en la expresión que recuperamos de Carmen Sessa (1998) que refiere a cuándo una situación puede resultar un problema geométrico para los estudiantes. Para ello, expresa la autora, es importante que[7]:

- Implique un cierto nivel de dificultad, presente un desafío, tenga algo de novedad para los alumnos.
- Exija usar los conocimientos, pero estos no sean totalmente suficientes.
- Para resolverlo se deban poner en juego las propiedades de los objetos geométricos.
- El problema ponga en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico, sino a un espacio conceptualizado representado por las figuras – cuerpos.
- En la resolución del problema, los dibujos no permitan arribar a la respuesta por simple constatación sensorial.
- La validación de la respuesta dada al problema – es decir la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o falsedad de la respuesta- no se establezca empíricamente, sino que se apoye en las propiedades de los objetos geométricos; aunque en algunas instancias exploratorias se puedan aceptar otros modos de corroborar.
- Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras produzcan nuevo conocimiento acerca de los mismos.

Todas estas consideraciones nos han cargado de nuevas significaciones al interior del grupo tanto como en el trabajo con alumnos de los ámbitos educativos mencionados.

Otro planteo que se sostuvo desafiante y que puede movilizar mucha intencionalidad didáctica y curricular en la formación de profesores de matemática, es el de intentar orientar desde la geometría que estudia el espacio real, físico, hacia una geometría que se construye para

---

[6] Las fotos de los (*) han sido recuperadas de las experiencias citadas anteriormente.

[7] Sessa C. 1998. Acerca de la Enseñanza de la Geometría, en Matemática, Temas de su didáctica. Bs. As.: CONICET. Programa Prociencia.

conceptualizar el espacio. Unas relaciones y unas propiedades en un espacio matematizado, como expresa Itzcovich (2004) – mas aún cuando lo hace para la escolaridad primaria - , que queda en esta primeras aproximaciones alertándonos de complejidades sobre las cuales necesitamos desarrollar mucho análisis.

Cuando el objeto de estudio puede desprenderse de lo físico y se va conceptualizando, en una construcción argumentativa, que trasciende la verificación empírica, que no depende de la precisión de unas mediciones y que se queda con los rasgos identitarios de esa caracterización, se lo podría referenciar como esas verdades geométricas que Grecia Gálvez (1994) describe como "anexactas, abstractas, necesarias, y sin referencia a la realidad".

En este marco el cuestionamiento que nos interpela y nos implica en constantes planteos es el relacionado con el poder anticipador de las construcciones geométricas, tanto las físicas como las teorizadas. Nosotros consideramos que anticipar es hacer una conjetura para la cual no resulta necesario tener el objeto, ni sus medidas, ni plegar, ni doblar o tocar. Y entendemos que las anticipaciones no son espontáneas, se apoyan en saberes y en procesos, recorren caminos que van de lo ostensivo a lo argumental. Aún así, esta experiencia nos señala dificultades persistentes en cuanto a las posibilidades de hacer anticipaciones por parte de los estudiantes.

Nos preguntamos entonces, esas conceptualizaciones, modelizadas, abstractas, ¿trascienden los saberes intuitivos? ¿Se remontan a partir de ellos? Y en tal caso, ¿se modifican con las nuevas conceptualizaciones en su potencia anticipadora? Los estudiantes con más posibilidades de interactuar con el objeto de estudio, ¿modificarían espontáneamente sus concepciones? Entonces, ¿hablamos de saberes experienciales que son construcciones culturales?

Por último, unas reflexiones que queremos incorporar porque reflejan muchas de las preocupaciones de este grupo relacionadas con las complejidades de las relaciones entre física y matemática, entre mostrar y demostrar, entre los espacios físicos y los espacios geométricos, entre las experimentaciones y las conceptualizaciones:

> "Generalmente es muy difícil, y a veces imposible, resolver explícitamente los problemas variacionales mediante fórmulas o construcciones geométricas en función de elementos simples ya conocidos. En lugar de ello, debemos conformarnos muchas veces con demostrar la existencia de una solución bajo determinadas condiciones e investigar después sus propiedades. En múltiples casos, cuando dicha demostración de existencia resulta ser más o menos dificultosa, es interesante estudiar las condiciones matemáticas del problema mediante ciertos artificios físicos o, mejor dicho, considerar el problema matemático como una interpretación de un fenómeno físico. La existencia de este último representará entonces la solución del problema matemático. Naturalmente, esto sólo constituye una justificación plausible sin llegar a ser una demostración matemática, pues queda todavía una cuestión por dilucidar, a saber: si la interpretación matemática del hecho físico es adecuada en el sentido estricto, o si proporciona sólo una imagen poco apropiada de la realidad física. Algunas veces tales experimentos, aunque efectuados en la imaginación, son convincentes incluso para los matemáticos." (Courant y Robbins, 1979: 395)

Referencias Bibliográficas

Centro IES San Fernando. 2006/2007. De las superficies mínimas, las pompas de jabón y otras construcciones óptimas. Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.

Courant, R y H. Robbins. 1979. ¿Qué es la matemática? Madrid: Aguilar

Damiani, A.M. y Otros. 2000. El Uso De Modelos Dinámicos En La Didáctica De La Matemática en Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas: Aprendizaje de las matemáticas para el siglo XXI. Barcelona: Graó.

Díaz Díaz, J. 2000. De la pompa de jabón al satélite artificial: lo óptimo como estrategia, en Horizontes culturales. Las Fronteras de la Ciencia. 2000: Año Mundial de las Matemáticas. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Espasa. ISBN 84-670-0137-2. (159 – 171)

Ferreyra, N., Rechimont, E., Pedro, I., Scarímbolo, M. (2002). Perspectiva didáctica para un problema de longitud mínima. X Nacional II Internacional EMCI. Universidad Nacional del Nordeste. Resistencia, Chaco

Gálvez, G. 1994. La geometría, la psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela elemental, en Parra, C. e I. Saiz (comps), Didáctica de matemáticas. Buenos Aires: Paidós.

Garza Hume, C. 2001. Caminos mínimos y burbujas de jabón, en Ciencia Ergo Sum, nov, vol 8. Toluca: Universidad Autónoma de México. (375 – 378)

Guémez, J. 2003. Tensión superficial y superficies minimales. Laboratorio de Termodinámica. Demostraciones. Departamento de Física Aplicada. Universidad de Cantabria

Hildebrandt S. y A. Tromba. 1990. Matemáticas y Formas Óptimas. Barcelona : Prensa Científica.

Itzcovich, H y C. Broitman. 2004. Geometría En Los Primeros Años De La EGB: Problemas De Su Enseñanza, Problemas Para Su Enseñanza. Buenos Aires: Paidos.

Itzcovich, H. 2005. Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones. Buenos Aires: libros del Zorzal.

- 2007. La Matemática escolar. Acerca de la enseñanza de la geometría. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Rodríguez Perez, M.2005. Introducción a la Teoría de Superficies Minimales.

Sessa C. (1998): “Acerca de la Enseñanza de la Geometría”, en Matemática, Temas de su didáctica. Bs. As.: CONICET. Programa Prociencia.