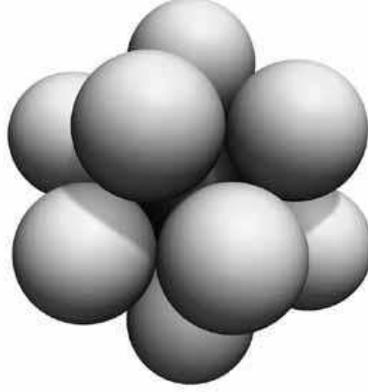


El problema de las 13 esferas. Parte II

Guillermo Javier Flores



Recordemos que el “problema de las 13 esferas”, es un problema de geometría básica y responde a la pregunta, de cuál es el mayor número, posible de acomodar, de esferas del mismo tamaño no superpuestas, en dimensión tres, que estén en contacto con una esfera central fija. La solución del mismo es 12 y está sujeta a la famosa discusión entre los grandes matemáticos Isaac Newton y David Gregory.

En la primera parte, hicimos un breve estudio de la demostración de la solución del número de osculación o Kissing number en tres dimensiones que denotamos por $k(3)$, dada por el matemático ruso Oleg R. Musin, en el año 2004.

Para probar que $k(3) = 12$, consideramos la familia de polinomios de Legendre $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definida de manera recurrente

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = t, \quad f_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \dots$$

$$f_k(t) = \frac{2k-1}{k} t f_{k-1}(t) - \frac{k-1}{k} f_{k-2}(t).$$

Luego tomamos el polinomio de grado 9 dado por

$$f(t) = \frac{2431}{80} t^9 - \frac{1287}{20} t^7 + \frac{18333}{400} t^5 + \frac{343}{40} t^4 - \frac{83}{10} t^3 - \frac{213}{100} t^2 + \frac{1}{10} t - \frac{1}{200}$$

y vimos que podemos escribir a f como

$$f = f_0 + \frac{8}{5}f_1 + \frac{87}{25}f_2 + \frac{33}{20}f_3 + \frac{49}{25}f_4 + \frac{1}{10}f_5 + \frac{8}{25}f_9 \doteq \sum_{k=0}^9 c_k f_k.$$

Usando estas funciones polinómicas, podemos enunciar los siguientes tres lemas:

Lema 1 Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ subconjunto de puntos contenidos en S^2 . Denotamos $\phi_{i,j} = \text{dist}(x_i, x_j)$ la distancia angular entre x_i y x_j , entonces

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_k(\cos(\phi_{i,j})) \geq 0 \quad \text{para todo } k \geq 0.$$

Lema 2 Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S^2$, entonces

$$s(X) \doteq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\cos(\phi_{i,j})) \geq n^2.$$

Lema 3 Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S^2$ tal que $\phi_{i,j} \geq 60^\circ$, para todo i, j , entonces

$$s(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\cos(\phi_{i,j})) < 13n.$$

Por último, a partir de estos resultados, escribimos el teorema del número de osculación $k(3)$ y repasamos la demostración.

Teorema $k(3) = 12$.

Demostración: Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S^2$, y supongamos que $k(3) = n$, donde x_j es el punto de contacto sobre S^2 al apoyar la esfera j -ésima sobre la esfera fija. Así, X está bajo las codiciones del Lema 2 y del Lema 3, esto implica

$$n^2 \leq s(X) < 13n,$$

entonces tenemos que $n < 13$, o bien $n \leq 12$.

Por otro lado, sabemos que $k(3) \geq 12$.

□

En la edición anterior, analizamos los puntos más importantes de las demostraciones de los lemas 1 y 2. En esta segunda parte, después de algunos comentarios, daremos un análisis similar para el Lema 3; en donde vamos a necesitar una propiedad importante sobre triángulos esféricos, la ley de los cosenos:

$$\cos(\phi) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\varphi)$$

para un triángulo esférico con vértices ABC , con lados angulares θ_1, θ_2, ϕ y φ es el ángulo formado por los arcos θ_1, θ_2 .

Introducción a Lattices

En la Parte I, hicimos mención del número de osculación o kissing number para cualquier dimensión en general, lo denotamos por $k(d)$, y se interpreta como el número máximo de esferas en \mathbb{R}^d de igual radio, no superpuestas que pueden estar en contacto simultáneamente con otra esfera del mismo tamaño fija.

Una manera apropiada de estudiar el kissing number $k(d)$ para una dimensión arbitraria, es usando la teoría de “Lattices” o Retículos en espacios euclideos. Para continuar, solo haremos una introducción a los Lattices, dando algunos ejemplos importantes y como se relacionan con problemas como el kissing number.

Un Retículo L en \mathbb{R}^d , está formado por el conjunto de combinaciones lineales enteras de n -vectores linealmente independientes, es decir, dados los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ linealmente independientes, el retículo o lattice L es

$$L := \left\{ \sum_{i=1}^n m_i v_i = m_1 v_1 + \dots + m_n v_n \mid m_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

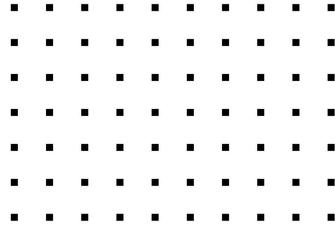
y decimos que la dimensión de L es n . Además se puede observar fácilmente que L es un grupo con la operación suma.

Un primer y sencillo ejemplo que podemos tomar, es el retículo $L = \mathbb{Z}^n$ en \mathbb{R}^n , llamado lattice canónico, o estándar, dado por

$$\mathbb{Z}^n = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i e_i \mid m_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

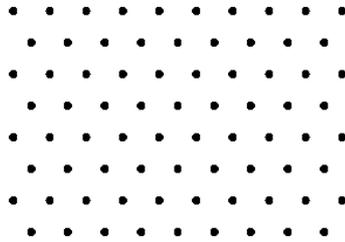
donde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n .

En dimensión $n = 2$, tenemos $\mathbb{Z}^2 = \{m_1(1, 0) + m_2(0, 1) \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$,



Otro ejemplo importante de lattice en \mathbb{R}^2 , es el lattice hexagonal que denotamos por H , y se define como

$$H = \left\{ m_1(1, 0) + m_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \right\},$$



En general, dado un lattice L de dimensión n en \mathbb{R}^d , diremos que $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de L , si U genera L como combinaciones lineales enteras,

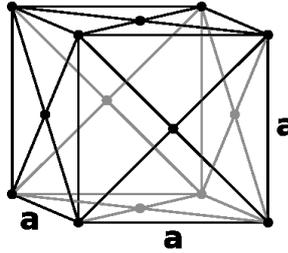
y denotamos

$$L = \langle \{u_1, \dots, u_n\} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Como ejemplos de retículos en \mathbb{R}^3 , distintos de \mathbb{Z}^3 , tenemos:

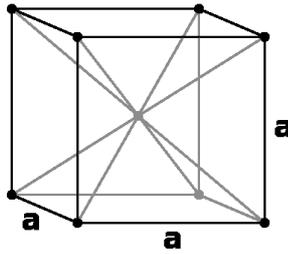
- “face centered cubic lattice” que denotamos por fcc , definido como

$$fcc = \langle \left\{ (1, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \right\} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$



- “body centered cubic lattice” que denotamos bcc , dado por

$$bcc = \langle \left\{ (0, 0, 1), (0, 1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$



Para dimensión $n \geq 3$, podemos definir los dos siguientes retículos de dimensión n , “distintos” del canónico

$$A_n = \left\{ v \in \mathbb{Z}^{n+1} / \sum \text{coord}(v) = 0 \right\} = \langle \{(1, -1, 0, \dots, 0), (0, 1, -1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, -1)\} \rangle_{\mathbb{Z}},$$

y también

$$D_n = \left\{ v \in \mathbb{Z}^n / \sum coord(v) \text{ es par} \right\} = \\ < \{(1, 1, 0, \dots, 0), (0, 1, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 1), (2, 0, \dots, 0)\} >_{\mathbb{Z}} .$$

Donde lattices distintos, se interpreta como: dados dos retículos L_1 y L_2 , se dice que son congruentes o iguales, si existe una isometría que aplica uno de los lattices en el otro. Y se dice que son semejantes o similares, si uno de ellos se obtiene del otro por una dilatación compuesto con una transformación ortogonal. Existen propiedades que caracterizan a los lattices.

En los espacios euclideos, una de las preguntas matemáticas asociada a las esferas, es si existe alguna manera de acomodar bolas del mismo tamaño de la manera más densa posible en el espacio, sin que estén superpuestas, y se conoce como “sphere packings problem”. En dimensión tres, esta pregunta tiene alguna relación con el problema de las trece esferas.

Un problema similar, se considera para los retículos y se conoce como “lattice packing problem”, y se refiere a lo siguiente, encontrar un lattice L , de modo que si acomodamos esferas con centro en cada uno de los puntos de L , y de radio, el máximo posible para que las bolas no se superpongan, entonces la densidad sea máxima.

Si queremos mencionar algunos de los resultados conocidos, con respecto a estos problemas, conviene definir algunos conceptos básicos de lattices.

Sea L un lattice generado por $\{v_1, \dots, v_n\}$ en \mathbb{R}^n , consideramos el conjunto

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=1}^n t_i v_i \text{ con } t_i \in [0, 1] \right\},$$

(en dimensión $n = 3$, P es un paralelepípedo). Entonces definimos:

- el volumen de L como $vol(L) := vol(P)$, (se puede mostrar que es independiente de la base que elijamos para L),
- el packing radius de L , como

$$\vartheta(L) = \frac{\sqrt{\mu}}{2}, \text{ donde } \mu = \min\{\|v\|^2 / v \in L\},$$

- el empaquetamiento por esferas asociado a L

$$\mathbb{P} = \bigcup_{v \in L} B(v, \vartheta(L)),$$

donde $B(v, \vartheta(L))$ denota la bola de centro v y radio $\vartheta(L)$;

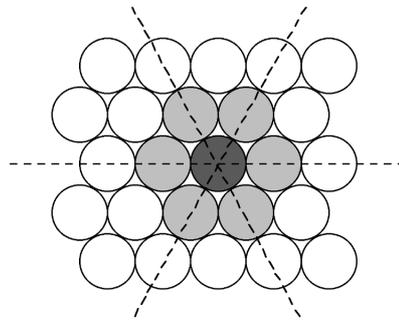
- la densidad de L por

$$\Delta(L) = \frac{\text{vol}(B(v, \vartheta(L)))}{\text{vol}(L)}.$$

Observación: en general, es difícil encontrar el valor de μ para un lattice dado, sobre todo cuando pensamos en dimensiones grandes. Una pregunta natural que surge de la definición de μ , es cuántos vectores mínimos, o sea, de norma $\sqrt{\mu}$, tiene un lattice. Y podemos deducir, que la cantidad de vectores mínimos de un retículo en dimensión d , es menor o igual que $k(d)$.

Carl Friedrich Gauss demostró, que el lattice hexagonal H , resuelve el problema de lattice packing, para dimensión dos, y que la densidad del mismo es

$$\Delta(H) = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0,9096.$$



Pero, más aún, en el año 1940, el matemático húngaro László Fejes Tóth, probó que el lattice hexagonal es solución del sphere packings problem, en la respectiva dimensión.

En el año 1611, Johannes Kepler afirmó que no existe un arreglo de esferas sólidas del mismo tamaño, en dimensión tres, con densidad promedio mayor a la del lattice face centered cubic, esta afirmación, se conoce como conjetura de Kepler. Y se puede calcular

$$\Delta(fcc) = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0,74048.$$

La manera de acomodar las esferas en el espacio como conjeturó Kepler, es la forma en que se acomodan naranjas en un cajón en una frutería, podemos apreciarlo en la siguiente figura



Puede observarse del gráfico, que el lattice fcc brinda la configuración para el problema de las trece esferas, que se conoce como la configuración de Kepler, la cual fue presentada en la edición anterior. En cierto modo, estamos diciendo también, que el fcc lattice tiene doce vectores de norma mínima y que éste coincide con $k(3)$.

Recientemente, en 1998, el matemático Thomas Hales, demostró numéricamente la conjetura de Kepler, considerando muchos casos individuales, mediante la ayuda de complejos cálculos computacionales.

Para las dimensiones 8 y 24, el kissing number fue probado en 1979, usando los lattices E_8 y el Leech lattice respectivamente. Esta prueba, está basada en un elegante método iniciado por Philippe Delsarte. En el año 2003, Oleg R. Musin, anunció una solución para el kissing number en dimensión 4, haciendo una modificación en el método de Delsarte. En ese mismo año, independientemente de Musin y del clásico método, Henry Cohn y Noam Elkies, probaron numéricamente que E_8 y Leech lattice son óptimos para el sphere packing problem.

Enunciemos el resultado que Philippe Delsarte demostró, y que sirve como aplicación para el problema de número de osculación.

Teorema (Delsarte, Goethals y Seidel).

Si $f(t)$ es una combinación no negativa de polinomios de Gegenbauer

$$f(t) = \sum_{k=0}^d c_k G_k^{(n)}(t),$$

con $c_0 > 0$ y $c_k \geq 0$, y si $f(t) \leq 0$ para todo $t \in [-1, \frac{1}{2}]$, entonces, el kissing number en \mathbb{R}^n está acotado por

$$k(n) \leq \frac{f(1)}{c_0}.$$

Donde la familia de polinomios de Gegenbauer $\{G_k^{(n)}\}$ se puede definir como: para $n \geq 2$ y $k \geq 0$, $G_k^{(n)}(t)$ es un polinomio de grado k normalizado de tal manera que $G_k^{(n)}(1) = 1$ y

$$G_0^{(n)}(t) = 1, \quad G_1^{(n)}(t) = t, \quad G_2^{(n)}(t) = \frac{nt^2 - 1}{n - 1}, \dots$$

Esta familia de polinomios es ortogonal respecto del producto escalar dado por

$$\langle g(t), h(t) \rangle = \int_{-1}^1 g(t)h(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt$$

sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}[t]$.

La familia de polinomios de Gegenbauer o también llamados ultraesféricos, son una generalización de la familia de polinomios de Legendre y de los polinomios de Chebyshev, y son un caso especial de la familia de polinomios de Jacobi.

Si en la familia de Gegenbauer tomamos $n = 3$ obtenemos la familia de Legendre, y del mismo modo, si tomamos $n = 4$, obtenemos la familia de Chebyshev.

En las dimensiones 8 y 24, sucede que se toman ciertos polinomios asociados a ciertos lattices, y se prueba que la cantidad de vectores mínimos del lattice, coincide con la cota superior que nos dá el teorema de Delsarte.

Musin aprovecha el resultado de Delsarte, y haciendo una modificación obtiene una cota óptima para dimensión 4, usando el lattice D_4 y un polinomio

asociado a éste, ya que el mismo método que se usó en dimensión 8 y 24, no proporcionaba una cota que coincidiera con la cantidad de vectores mínimos del lattice D_4 .

Para $n = 4$, se toma el lattice D_4 y el polinomio asociado es

$$f_4(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)t^2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2(t + 1),$$

si $n = 8$ se elige el lattice E_8 y el polinomio asociado resulta $f_8(t) = f_4(t)$, por último, si $n = 24$, elegimos el Leech lattice, y el polinomio asociado es

$$f_{24}(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{1}{4}\right)^2t^2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2(t + 1),$$

obteniendo $k(4) = 24$, $k(8) = 240$ y $k(24) = 196560$.

Para terminar con esta sección, dejamos algunos comentarios y unos de los teoremas destacados sobre la densidad de lattices.

Los problemas de empaquetamiento de esferas, número de osculación y de empaquetamiento por retículos de esferas, siguen abiertos, y se trata de encontrar la solución de los mismos como función de la dimensión. Algo que sorprende de estos clásicos problemas, es que solo se han encontrado soluciones en un conjunto finito particular de dimensiones y no un resultado un poco más general. Además, cabe destacar, que la forma de resolver, estos planteos, hasta el momento, difiere en gran medida cuando pasamos de una dimensión a otra.

La teoría de lattices se extiende de manera más general y estudia problemas distintos a los mencionados. Retículos cuantizadores, formas cuadráticas, isospectralidad de lattices, relaciones de códigos y lattices, poliedros y empaquetamiento, son temas que abarca la amplia teoría de lattices.

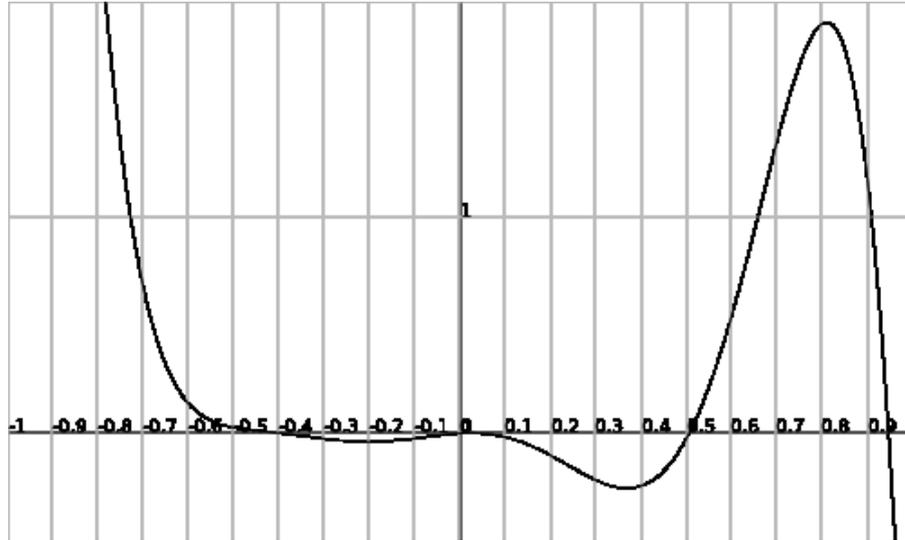
Para concluir, enunciamos uno de los resultados más importantes, para el problemas de empaquetamiento de esferas de retículos, “la desigualdad de Mordell”.

Teorema Sea δ_n la densidad máxima de lattice packing en \mathbb{R}^n . Entonces

$$2\delta_{n-1} \geq \delta_n^{\frac{n-2}{n}}.$$

Demostración del Lema 3

1. Sea $t_0 \approx 0,5907$, entonces el polinomio $f(t)$ satisface: (i) $f(-t_0) \approx 0$.
(ii) $f(t)$ es monótona decreciente en el intervalo $[-1, -t_0]$.
(iii) $f(t) < 0$ en el intervalo $(-t_0, \frac{1}{2}]$, $f(t)$ solo tiene una raíz en $[-1, \frac{1}{2}]$ que es t_0 y $f'(t)$ no tiene ceros en $[-1, t_0]$.



aproximación gráfica de $f(t)$

Ahora definimos

$$s_i(X) = \sum_{j=1}^n f(\cos(\phi_{i,j})),$$

entonces

$$s(X) = \sum_{i=1}^n s_i(X).$$

Luego, si podemos probar que $s_i(X) < 13$ para $i = 1, \dots, n$, tendríamos que $s(X) < 13n$.

Notemos que $\phi_{i,i} = 0$ y entonces $f(\cos(\phi_{i,i})) = f(1)$. Para $i \neq j$, $\phi_{i,j} \geq 60^\circ$, entonces $\cos(\phi_{i,j}) \in [-1, -\frac{1}{2}]$. Y en los casos que $\cos(\phi_{i,j}) \in [-t_0, -\frac{1}{2}]$, usando (iii) tenemos $f(\cos(\phi_{i,j})) \leq 0$. Sea $J(i) = \{j / \cos(\phi_{i,j}) \in [-1, -t_0]\}$, entonces

$$s_i(X) \leq f(1) + \sum_{j \in J(i)} f(\cos(\phi_{i,j})) := T_i(X).$$

Llamamos $\theta_0 = \arccos(t_0) \approx 53,794^\circ$ y como $\arccos(-1) = 180^\circ$, luego $j \in J(i)$ si $\phi_{i,j} > 180^\circ - \theta_0$ es decir $\theta_j := 180^\circ - \phi_{i,j} < \theta_0$. Esto nos dice que x_j con $j \in J(i)$, pertenece al casco esférico con centro $e_0 := -x_i$ dado por $\{y \in S^2 / \text{distancia angular}(y, -x_i) < \theta_0\}$.

2. Consideramos los puntos e_0, y_1, \dots, y_m sobre la esfera S^2 tales que $\phi_{i,j} := \text{dist}(y_i, y_j) \geq 60^\circ$ para todo $i \neq j$ y $\theta_i := \text{dist}(e_0, y_i) < \theta_0$ con $1 \leq i \leq m$. Donde $\text{dist}(y_i, y_j)$ denota la distancia angular entre los puntos dados.

Denotamos por μ el máximo valor de m tal que se satisfaga la condición anterior para un conjunto no vacío $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$.

Supongamos que un conjunto Y , con $1 \leq m \leq \mu$ satisface la condición de **2.**, entonces definimos

$$H(Y) = H(y_1, \dots, y_m) := f(1) + f(-\cos(\theta_1)) + \dots + f(-\cos(\theta_m)),$$

recordar que $f(-\cos(\theta_i)) \geq 0$, para $1 \leq i \leq m$.

$$h_m := \sup_Y \{H(Y)\}, \quad h_{\text{máx}} := \{h_0, h_1, \dots, h_m\}.$$

Luego tenemos que, si $m = |J(i)|$ y $e_0 = x_i$ entonces $T_i(X) \leq h_m$ y por lo tanto $s_i(X) \leq h_m$. Esto nos dice que si probamos que $h_{\text{máx}} < 13$, entonces demostraremos el Lema 3.

3. Afirmación: $\mu \leq 4$.

En efecto, sea $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \subset S^2$ que satisface la condición de **2.**. Asumimos que $e_0 = (0, 0, 1)$ es el “polo norte” de la esfera y que y_i tiene coordenadas esféricas (θ_i, φ_i) . Usando la ley de los cosenos, resulta

$$\cos(\phi_{i,j}) = \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) + \sin(\theta_i) \sin(\theta_j) \cos(\varphi_i - \varphi_j).$$

Notar que si $m \geq 2$, luego $\theta_i > 0$ para $1 \leq i \leq m$, es decir, si tenemos más de tres puntos en el conjunto Y , la distancia angular entre el polo norte

e_0 y un punto y_i no puede ser nula y satisfacer la condición de **2.** al mismo tiempo (pues si suponemos que $dist(e_0, y_i) = 0$ entonces $e_0 = y_i$ esto implica $\theta_j = \phi_{i,j} \geq 60^\circ > \theta_0$, pero por la condición de **2.** $\theta_j < \theta_0$, contradicción).

Como nosotros tenemos que $\cos(\phi_{i,j}) \in [-1, \frac{1}{2}]$ y $\sin(\theta_i) > 0$, entonces

$$\cos(\varphi_i - \varphi_j) \leq \frac{\frac{1}{2} - \cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{\sin(\theta_i) \sin(\theta_j)} .$$

Llamamos

$$g(x, y) = \frac{\frac{1}{2} - \cos(x) \cos(y)}{\sin(x) \sin(y)} = g(y, x),$$

y calculamos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2 \cos(y) - \cos(x)}{2 \sin^2(x) \sin(y)} .$$

Para $0 < x, y \leq \theta_0 < 60^\circ$ resulta que $\cos(y) > \frac{1}{2}$, $\sin(x) > 0$, $\sin(y) > 0$, lo cual implica

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) > 0,$$

Por lo tanto la función g es estrictamente creciente en la variable x (en el intervalo correspondiente).

Luego

$$g(x, y) \leq g(\theta_0, y) = g(y, \theta_0) \leq g(\theta_0, \theta_0),$$

recordemos que $\theta_0 = \arccos(t_0)$, entonces

$$\frac{\frac{1}{2} - \cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{\sin(\theta_i) \sin(\theta_j)} \leq \frac{\frac{1}{2} - \cos^2(\theta_0)}{\sin^2(\theta_0)} = \frac{\frac{1}{2} - t_0^2}{1 - t_0^2} ,$$

y obtenemos

$$\cos(\varphi_i - \varphi_j) \leq \frac{\frac{1}{2} - t_0^2}{1 - t_0^2} .$$

Podemos calcular

$$\arccos\left(\frac{\frac{1}{2} - t_0^2}{1 - t_0^2}\right) \approx 76,582^\circ > 72^\circ ,$$

esto nos implica $m \leq 4$. Pues notar que, $5 \times 72^\circ = 360^\circ$, y si $|\varphi_i - \varphi_j| > 72^\circ$ entonces solo podemos colocar a lo sumo 4 puntos que pertenezcan a un círculo

con una separación angular entre cualesquiera dos de ellos, mayor a 72° .

Ahora probemos que $h_{\text{máx}} := \{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4\} < 13$.

4. Para $m = 0$, es fácil de ver, pues $h_0 = f(1) = 10, 11 < 13$.

Si $m = 1$, para $0 \leq \theta \leq \theta_0$, se sigue de (ii) que $f(-\cos(\theta))$ es una función decreciente, luego

$$H(y_1) = f(1) + f(-\cos(\theta_1)) \leq h_1 = f(1) + f(-1) = 12, 88 < 13.$$

5. En los casos $m = 2, 3, 4$, usaremos los siguientes hechos: supongamos que tenemos una colección de puntos $\{e_0, y_1, \dots, y_m\}$ en S^2 tales que $H(Y) = h_m$. Con el mismo argumento que vimos en **3.**, sucede que $y_i \neq e_0$. En esta colección $\{e_0, y_1, \dots, y_m\}$, los puntos y_k no pueden ser cambiados por otros puntos $x \in S^2$ que estén más cerca de e_0 , pues en ese caso $H(Y)$ aumentaría (y h_m es supremo).

Con una justificación del mismo tipo, que en el párrafo anterior, podemos obtener:

- para $m = 2$, $e_0 \in \text{arco}(y_1, y_2)$ y $\text{dist}(y_1, y_2) = 60^\circ$.
- para $m = 3$, $\Delta_3 := y_1 y_2 y_3$ es un triángulo esférico regular con longitud de cada arista igual a 60° , y $e_0 \in \Delta_3$.
- para $m = 4$, $\Delta_4 := y_1 y_2 y_3 y_4$ es un rombo esférico equilátero, con cada arista igual a 60° , y $e_0 \in \Delta_4$.

6. Sea $60^\circ \leq \psi \leq 2\theta_0$, introducimos la siguiente función

$$F_1(\psi) = \max_{\frac{1}{2}\psi \leq \theta \leq \theta_0} \{\tilde{F}_1(\theta, \psi)\}$$

donde $\tilde{F}_1(\theta, \psi) = f(-\cos(\theta)) + f(-\cos(\psi - \theta))$. Entonces para $\text{dist}(y_1, y_2) = \psi$, resulta

$$f(-\cos(\theta_i)) + f(-\cos(\theta_j)) \leq F_1(\psi),$$

con lo cual

$$H(y_1, y_2) \leq h_2 = f(1) + F_1(60^\circ) \approx 12, 8749 < 13.$$

7. Sea ahora $m = 4$, $d_1 = \text{dist}(y_1, y_3)$, $d_2 = \text{dist}(y_2, y_4)$, como Δ_4 es un rombo esférico, pensamos en que las diagonales $y_1 y_3$, $y_2 y_4$ de Δ_4 son ortogonales (ver **4.**), entonces, usando la ley de los cosenos para triángulos esféricos, tenemos

$$\cos(60^\circ) = \cos\left(\frac{d_1}{2}\right) \cos\left(\frac{d_2}{2}\right) + \sin\left(\frac{d_1}{2}\right) \sin\left(\frac{d_2}{2}\right) \cos(90^\circ),$$

o es lo mismo

$$\cos\left(\frac{d_1}{2}\right) \cos\left(\frac{d_2}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

y la ésta última igualdad, nos induce a definir

$$\rho(t) := 2 \arccos\left(\frac{1}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}\right),$$

obteniendo

$$\rho(d_1) = d_2, \quad \rho(d_2) = d_1, \quad \rho(90^\circ) = 90^\circ, \quad \rho(\rho(t)) = t.$$

Podemos suponer que $d_1 \leq d_2$, y como $\theta_i \leq \theta_0$, implica $d_2 \leq 2\theta_0$. Luego

$$\rho(2\theta_0) \leq d_1 \leq 90^\circ \leq d_2 \leq 2\theta_0.$$

Ahora, consideremos dos casos, primero supongamos que $\rho(2\theta_0) \leq d_1 \leq 77^\circ$. Como $F_1(\psi)$ es una función decreciente para $\psi \in [60^\circ, 2\theta_0]$, y sabemos que

$$f(-\cos(\theta_i)) + f(-\cos(\theta_j)) \leq F_1(\psi),$$

entonces

$$f(-\cos(\theta_1)) + f(-\cos(\theta_3)) \leq F_1(d_1) \leq F_1(\rho(2\theta_0)),$$

$$f(-\cos(\theta_2)) + f(-\cos(\theta_4)) \leq F_1(d_2) \leq F_1(\rho(d_1)) \leq F_1(\rho(77^\circ)),$$

por lo tanto, calculamos

$$H(Y) = H(y_1, y_2, y_3, y_4) < f(1) + F_1(\rho(2\theta_0)) + F_1(\rho(77^\circ)) \approx 12,9171 < 13.$$

Como segundo caso, supongamos $77^\circ \leq d_1 \leq 90^\circ$, entonces

$$H(Y) < f(1) + F_1(77^\circ) + F_1(90^\circ) \approx 12,9182 < 13.$$

De esta manera, obtenemos $h_4 < 13$.

8. Como último paso, solo nos resta probar que $h_3 < 13$.

Sabemos de **5.**, que Δ_3 es un triángulo regular esférico, por consiguiente,

$H(Y) = f(1) + f(-\cos(\theta_1)) + f(-\cos(\theta_2)) + f(-\cos(\theta_3))$ es una función simétrica respecto de los θ_j , y luego, podemos suponer que $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 \leq \theta_0$. Además, sea $\alpha := y_2 \widehat{y_1} y_3$ el ángulo de vértice y_1 formado por los arcos $y_1 y_2$ e $y_1 y_3$, entonces, usando la ley de los cosenos para triángulos esféricos, y sabiendo que cada arco del triángulo mide 60° , obtenemos que $\alpha \approx 70,5288^\circ$.

Sea y_c el centro de Δ_3 , y sea $\gamma := y_c \widehat{y_1} y_3 = \frac{\alpha}{2} \approx 35,2644^\circ$ (notar que $\gamma \leq \theta_3$). Denotemos $u := y_c \widehat{e_0} y_3$, entonces

$$\cos(\theta_1) = \cos(60^\circ) \cos(\theta_3) + \sin(60^\circ) \sin(\theta_3) \cos(\gamma - u),$$

$$\cos(\theta_2) = \cos(60^\circ) \cos(\theta_3) + \sin(60^\circ) \sin(\theta_3) \cos(\gamma + u),$$

donde, además

$$0 \leq u \leq u_0 := \arccos\left(\frac{\cos(\theta_3)}{\sin(\theta_3)\sqrt{3}}\right) - \gamma.$$

Podemos observar que si $u = u_0$, luego $\theta_2 = \theta_3$ y esto nos dá $\theta_1 = \theta_2$; y si $u < u_0$, luego $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$.

Para $\theta_3 = \psi$ fijo, $H(y_1, y_2)$ es un polinomio de grado 9 en $t = \cos(u)$, y como antes, sea $F_2(\psi)$ el máximo de este polinomio en el intervalo $[\cos(u_0), 1]$.

Tomamos el siguiente conjunto $\{\psi_1, \dots, \psi_6\} := \{\gamma, 38^\circ, 41^\circ, 44^\circ, 48^\circ, \theta_0\}$, obteniendo que $F_2(\psi)$ es una función creciente en $[\gamma, \theta_0]$. Por otro lado, $f(-\cos(\psi))$ es decreciente como función de ψ .

Ahora, si consideramos $\theta_3 \in [\psi_k, \psi_{k+1}]$, resulta

$$H(Y) = H(y_1, y_2) + f(-\cos(\theta_3)) < z_k := F_2(\psi_{k+1}) + f(-\cos(\psi_k)),$$

y calculando

$$\{z_1, \dots, z_5\} \approx \{12,9425; 12,9648; 12,9508; 12,9606; 12,9519\},$$

concluimos $h_3 < \max z_k < 13$.

Esto nos demuestra que $h_m < 13$ para m que necesitamos.

□

Un descubrimiento favorito

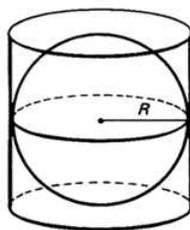
En la primera parte del problema de las trece esferas, calculamos el área de un conjunto en forma de “casco” H sobre la esfera, definido por

$$H = \left\{ (x, y, z) \in S^2 : \frac{\sqrt{3}}{2} \leq z \leq 1 \right\},$$

y dijimos que $\text{área}(H) = \text{área}(C_0) = 2\pi h_0$, donde C_0 es el cilindro de altura $h_0 = (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ y radio 1.

Pero la relación de áreas de subconjuntos de la esfera S^2 de radio uno con subconjuntos del cilindro C de altura dos y radio uno, es más fuerte, y a continuación haremos una breve presentación de éste hecho.

Supongamos que tenemos la esfera S^2 en el espacio euclideo con centro en el origen, y el cilindro C que se eleva sobre la circunferencia unitaria del plano xy , como se muestra en la figura,



radio $R=1$

podemos notar que el cilindro y la esfera están en contacto sobre uno de los círculos máximos de la esfera, y justamente es el ecuador de la misma.

Sabemos que el volumen del cilindro y de la esfera son, respectivamente

$$\text{vol}(C) = 2\pi, \quad \text{vol}(S^2) = \frac{4}{3}\pi = \frac{2}{3}\text{vol}(C),$$

en otras palabras, el volumen de la esfera es dos tercios el volumen del cilindro.

Ahora, si consideramos $C' = C \cup T$, donde $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1 \text{ ó } z = -1\}$, y comparamos las áreas de S^2 con C' , obtenemos

$$\text{área}(C') = 6\pi, \quad \text{área}(S^2) = 4\pi = \frac{2}{3}\text{área}(C'),$$

y como antes, el área de la esfera es dos tercios es área del cilindro “con sus tapas”. Notemos que $vol(C) = vol(C')$.

Esta hermosa proporción de área y volumen entre clásicas figuras geométricas, como lo son la esfera y el cilindro, fue escrita por primera vez, en el siglo II antes de Cristo por Arquímedes, uno de los más grandes matemáticos de la historia.

Arquímedes de Siracusa, se considera uno de los más importantes científicos griegos de la antigüedad clásica, realizó sus estudios en la escuela de Alejandría, Egipto y es reconocido como matemático, físico, astrónomo, ingeniero e inventor. Entre sus grandes aportes en todas estas materias, Arquímedes eligió como su descubrimiento favorito a la esfera inscrita en el cilindro, con sus respectivas proporciones de área y volumen, como mencionamos antes. Más aún, se sentiría tan orgulloso de esta obra geométrica, que es uno de los siete tratados del *Palimpsesto de Arquímedes*, y a pedido de él mismo, se colocaron sobre su tumba las esculturas de estas figuras. Un dato más para destacar, es que la medalla Fields, “Medalla Internacional para Descubrimientos Sobresalientes en Matemática”, lleva en una de sus caras un retrato del matemático griego Arquímedes, y en el reverso, una figura de la esfera inscrita en el cilindro.

Siguiendo con nuestro análisis de áreas de superficies para S^2 y C , consideramos lo siguiente, sea Σ la esfera unitaria, salvo que retiramos de ella los polos norte y sur, es decir

$$\Sigma = \{\mathbf{u} \in S^2 : \mathbf{u} \neq (0, 0, 1) \text{ y } \mathbf{u} \neq (0, 0, -1)\}.$$

Suponemos Σ y C puestos en el espacio euclideo, como hicimos anteriormente para S^2 y C . Definimos la siguiente función $F_A : \Sigma \rightarrow C$ como, si \mathbf{u} es un punto de Σ , trácese ortogonalmente la recta que parte desde el eje de las z y pasa por \mathbf{u} , y sea $F_A(\mathbf{u})$ el punto que esta recta corta a C . Entonces, se puede mostrar que la función así definida, preserva áreas, es decir, si tomamos algún subconjunto $U \subset \Sigma$ y aplicamos $F_A(U) \subset C$, obtenemos que $\text{área}(U) = \text{área}(F_A(U))$. Por lo tanto, podemos afirmar que $\text{área}(H) = C_0$.

Observar que efectivamente $\text{área}(\Sigma) = \text{área}(F_A(\Sigma)) = \text{área}(C) = 4\pi$.

Nota: en general, se llama función de Arquímedes a F_A .

Highest kissing number

Para finalizar el artículo, presentamos una tabla del problema de kissing number, con las mejores aproximaciones encontradas hasta el momento, en algunos casos por lattices y en otros por métodos computacionales (no lattices).

Dim	Kissing number for a lattice (nonlattice)	Lattice (resp. nonlattice)
1	2	$\Lambda_1 = Z_1$
2	6	$\Lambda_2 = A_2$
3	12	$\Lambda_3 = A_3 = D_3$
4	24	$\Lambda_4 = D_4$
5	40	$\Lambda_5 = D_5$
6	72	$\Lambda_6 = E_6$
7	126	$\Lambda_7 = E_7$
8	240	$\Lambda_8 = E_8$
9	272(306)*	$\Lambda_9(P_{9a})^*$
10	336(500)*	$\Lambda_{10}(P_{10b})^*$
11	438(582)*	$\Lambda_{11}(P_{11c})^*$
12	756(840)*	$\kappa_{12}(P_{12a})^*$
13	918(1130)*	$\kappa_{13}(P_{13a})^*$
14	1422(1582)*	$\Lambda_{14}(P_{14b})^*$
15	2340(2564)*	$\Lambda_{15}(P_{15a})^*$
16	4320	Λ_{16}
17	5346	Λ_{17}
18	7398	Λ_{18}
19	10668	Λ_{19}
20	17400	Λ_{20}
21	27720	Λ_{21}
22	49896	Λ_{22}
23	93150	Λ_{23}
24	196560	Λ_{24} Leech lattice
25	196656	Λ_{25}
26	196848	Λ_{26}
27	197142	Λ_{27}
28	197736	Λ_{28}
29	198506	Λ_{29}

Dim	Kissing number for a lattice (nonlattice)	Lattice (resp. nonlattice)
30	200046	Λ_{30}
31	202692	Λ_{31}
32	261120(276032)*	$Q_{32}(EdRS98)^*$
33	262272(294592)*	$Q_{33}(EdRS98)^*$
34	264576(318020)*	$Q_{34}(EdRS98)^*$
35	268032(370892)*	$Q_{35}(EdRS98)^*$
36	274944(438872)*	$Q_{36}(EdRS98)^*$
37	284160(439016)*	$Q_{37}(EdRS98)^*$
38	302592(566652)*	$Q_{38}(EdRS98)^*$
39	333696(714184)*	$Q_{39}(EdRS98)^*$
40	399360(991792)*	$Q_{40}(EdRS98)^*$
42	(1196788)*	$(EdRS98)^*$
44	2708112(2948552)*	$MW_{44}(EdRS98)^*$
48	52416000	$P_{48n}, P_{48p}, P_{48q}$
64	138458880(331737984)*	$Ne_{64}(EdRS98)^*$
80	1250172000(331737984)*	$L_{80}(EdRS98)^*$
128	218044170240(8863556495104)*	$MW_{128}(EdRS98)^*$

Referencias

- [1] Conway, J.H.; Sloane, N.J.A. *Sphere packings, lattices and groups*. Third edition. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [2] J.Leech, *The problem of the thirteen spheres*, Math. Gazette 41 (1956), 22-23.
- [3] O. R. Musin, *The Kissing problem in three dimensions*. Discrete Comput. Geom. 35 (2006), no. 3, 375-384.
- [4] O. R. Musin, *The kissing number in four dimensions*, Ann. of Math. (2) 168 (2008), no. 1, 1-32.
- [5] Barrett O'Neill. *Elementos de Geometría Diferencial*. Segunda reimpresión. Editorial Limusa, México, 1990.
- [6] G. G. Szpiro, *Newton and the kissing problem*, <http://plus.maths.org/issue23/features/kissing/>.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física. FaMAF.
Universidad Nacional de Córdoba.
guillexeneize@gmail.com