

CAPÍTULO 4

ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

ARGENI SERRANO, ENNY MORENO, SUGEY SANTOYO,
YOLANDA HERNÁNDEZ, YOBANA GUTIÉRREZ, JOSÉ LUIS LUPIÁÑEZ

1. Introducción y formulación del problema

En este capítulo presentamos el diseño e implementación de la unidad didáctica de ecuaciones lineales con una incógnita. En su diseño tuvimos en cuenta los lineamientos y estándares curriculares establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006) y el Decreto 1290 de 2009. El diseño de la unidad didáctica comienza con la prueba inicial diagnóstica. Esta prueba nos permite evidenciar los conocimientos previos de los estudiantes para abordar el tema. Así mismo, planteamos unos objetivos secuenciales con tareas específicas que los caracterizan y contribuyen a su alcance. Esas tareas se desarrollan en 10 sesiones de clase. Durante la realización de las tareas propusimos ejercicios no rutinarios y de mecanización. Estas tareas fueron apoyadas con el uso de algunos recursos y materiales didácticos, y con diferentes formas de agrupación de los escolares.

En el transcurso de la implementación de la unidad didáctica, utilizamos diversos instrumentos diseñados para recoger datos. Estos instrumentos nos permitieron analizar y evaluar el proceso de planificación e implementación de la unidad didáctica. Por último, realizamos el examen final, cuyo propósito era establecer el grado de consecución de las expectativas de aprendizaje por parte de los estudiantes. De igual manera, para la evaluación de la unidad didáctica recurrimos al análisis DAFO, con el que identificamos debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades. Este análisis nos permitió reconsiderar la planificación inicial y presentar un diseño mejorado.

Entre los resultados obtenidos de la implementación de la unidad didáctica encontramos que los estudiantes identificaron datos conocidos y desconocidos

al traducir enunciados en lenguaje natural y simbólico, y representar simbólicamente ecuaciones lineales a partir de enunciados verbales. Sin embargo, cuando los enunciados incluyen números fraccionarios para el planteamiento de las ecuaciones lineales, no se aprecia coherencia entre el enunciado y el planteamiento. Además, algunos estudiantes no establecieron claramente las relaciones aritméticas entre los diferentes datos del enunciado.

Los maestros nos enfrentamos cotidianamente en las aulas de clase con el dilema de cómo enseñar álgebra de tal forma que sea contextualizada y coherente con los contenidos mínimos establecidos en los estándares del MEN. Además, esperamos que los estudiantes la comprendan y la encuentren significativa para que realmente lleguen a desarrollar las competencias matemáticas que miden las evaluaciones internas y externas. Con base en lo anterior, y a través de la experiencia como profesores, identificamos algunos problemas que presentan los estudiantes de grado octavo cuando abordan el tema de ecuaciones lineales con una incógnita. Por ejemplo, observamos que los estudiantes tienen dificultades para usar adecuadamente la simbología matemática en el planteamiento de ecuaciones (utilización de cualquier letra del alfabeto como incógnita); realizar algunos procedimientos matemáticos necesarios para la resolución de ecuaciones (operaciones con términos semejantes y operaciones que impliquen transposición de términos); comprender lo que dice el enunciado de un problema e identificar los datos que hay en él, entre otros. Consideramos que los problemas son importantes para el estudio del álgebra y otros temas de matemática en el bachillerato y en la universidad. A partir de esta problemática, decidimos hacer una propuesta didáctica fundamentada y coherente que contribuya a la superación de estas dificultades.

Este documento se organiza en ocho apartados. El primero lo dedicamos a la descripción y formulación del problema. En el segundo presentamos la fundamentación del diseño y lo organizamos en dos partes: una, relacionada con el contexto curricular y la otra con el contexto socioeconómico y académico. El tercero comprende todo el análisis didáctico del tema. Destinamos el cuarto apartado a la justificación del diseño de la unidad didáctica y el quinto apartado a la descripción de la implementación, teniendo en cuenta sus modificaciones, con su respectivo balance. En el sexto apartado evaluamos la implementación a partir de los logros obtenidos, del diseño y de la actuación del profesor. En el séptimo apartado hacemos el balance de la experiencia con base en el análisis DAFO y proponemos el nuevo diseño. Finalmente, en el último apartado de conclusiones, destacamos los aspectos más relevantes del diseño y la implementación, y exponemos algunas reflexiones finales.

2. Fundamentación del diseño. Contextos

Realizamos la fundamentación del diseño desde dos perspectivas. La primera perspectiva está relacionada con el contexto curricular de la unidad didáctica. Para ello justificamos la pertinencia del diseño con la realidad colombiana, desde un punto de vista curricular. La segunda perspectiva tiene que ver con el contexto socioeconómico y académico, el cual hace referencia al nivel académico de los estudiantes y el contexto en el que se ubica la comunidad educativa.

1. Contexto curricular

Para el diseño de la unidad didáctica tuvimos en cuenta el análisis de los estándares curriculares. Seleccionamos el estándar “Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones”. Este estándar se ubica en los grados sexto y séptimo. No obstante, por circunstancias históricas, la mayoría de maestros lo incluimos en la planeación del grado octavo. Esto se debe a que, en este grado, desarrollamos con mayor profundidad el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

También consideramos los lineamientos curriculares del MEN (2006), con el propósito de tener en cuenta las competencias matemáticas que deben desarrollar los escolares. Destacaremos estas competencias en el análisis de las tareas que se van a abordar en el tema de ecuaciones lineales con una incógnita.

Para finalizar el estudio del contexto curricular, consideramos la evaluación regida por el Decreto 1290 de 2009. De este decreto, tuvimos en cuenta los ritmos de aprendizaje y la valoración de los desempeños de los estudiantes, para diseñar la evaluación de los aprendizajes durante la implementación de la unidad didáctica.

2. Contexto socioeconómico y académico

La unidad didáctica fue implementada en la Institución Educativa Departamental Pompilio Martínez. Esta institución tiene modalidad académica en gestión ambiental. Pertenece al sector urbano del municipio de Cajicá, es de fácil acceso y cuenta con un gran número de alumnos en cada curso. Por otra parte, presta servicios adicionales, como restaurante escolar, sala de informática con conexión a internet (un computador por cada tres estudiantes), sala con *video beam* y un *bibliobanco* en cada salón con libros de diferentes asignaturas.

De los tres cursos de grado octavo de esta institución, tomamos como referencia para la implementación de la unidad didáctica a los estudiantes de un solo curso (803). Las edades de los estudiantes oscilan entre los 11 y 16 años. Ellos provienen de familias de nivel socioeconómico bajo (1 y 2 del Sisbén). Estas familias acceden a trabajos relacionados con la construcción, servicio doméstico, comercio, empresas regionales (lácteos y flores), y al sector educativo en menor proporción. La mayoría de los padres de familia tienen primaria completa; un número menor logró terminar el bachillerato, y unos pocos cursaron y aprobaron estudios universitarios. Esta situación se refleja en la calidad y el tiempo que dedican a los jóvenes en el desarrollo de sus tareas.

En relación con el contexto académico de los estudiantes, nos referimos a sus conocimientos previos. Ellos tienen algunos vacíos conceptuales y procedimentales respecto a los números enteros, porque se confunden en el manejo de los signos y no pueden discernir entre las propiedades de la adición y la multiplicación. También, se les dificulta aplicar los algoritmos correspondientes a las operaciones con números fraccionarios y tienden a combinarlas (aplican el algoritmo de la multiplicación en la adición y viceversa). Por otra parte, se confunden en el manejo de los paréntesis, aunque la mayoría identifican los inversos aditivos y multiplicativos.

3. Análisis didáctico

El análisis didáctico le permite al docente planificar, implementar y evaluar unidades didácticas. Presentaremos en este apartado la planificación realizada para el tema ecuaciones lineales con una incógnita para el grado octavo. En el análisis didáctico tuvimos en cuenta sus cuatro análisis: el de contenido, el cognitivo, el de instrucción y el de actuación.

1. Análisis de contenido

El análisis de contenido es el punto de partida del análisis didáctico y establece criterios para identificar y organizar los múltiples significados de un tema. En este apartado, presentamos la estructura conceptual del tema ecuaciones lineales con una incógnita. Dicha estructura resulta de los conceptos y procedimientos que provienen del tema. Además, abordamos el foco de contenido, los diferentes sistemas de representación y la fenomenología.

1. Estructura conceptual

Para construir la estructura conceptual iniciamos con la selección de un tema matemático. Después de tener definido el tema, seleccionamos los conceptos y procedimientos que forman parte del tema y las relaciones que se establecen entre ellos. Representamos la estructura conceptual del tema variable, en un mapa conceptual donde consideramos un número notable de términos y conceptos que se relacionan entre sí y dan sentido al tema matemático. En el mapa conceptual destacamos cinco facetas principales: la primera tiene que ver con tipos y características de variable; relacionamos la segunda con los símbolos que se emplean para caracterizar las variables; en la tercera incluimos un estudio histórico del uso de la letra; en la cuarta introducimos la noción de incógnita y ecuación; y, en la última, enfatizamos en el lenguaje algebraico. La figura 1 presenta la organización de la estructura conceptual.

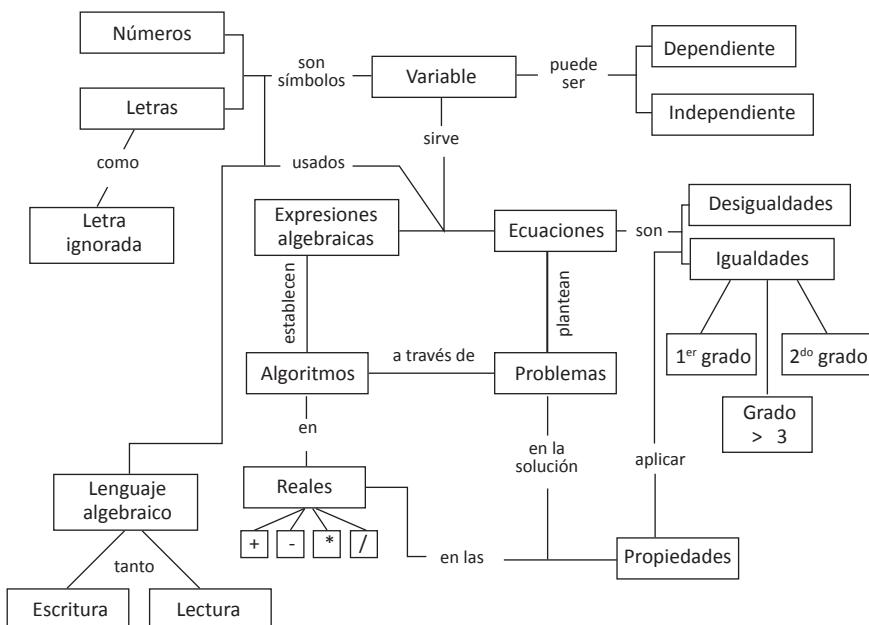


Figura 1. Mapa conceptual del tema variable

2. Foco de contenido

El foco de contenido es una parte de la estructura conceptual y lo concebimos como una agrupación concreta de conceptos, procedimientos, representaciones,

fenómenos y las relaciones que se establecen entre ellos. El foco de contenido que seleccionamos se refiere a ecuaciones lineales con una incógnita.

Para construir el foco de contenido tuvimos en cuenta su campo conceptual, que comprende cuatro elementos: términos, notaciones, convenios y resultados. Detallamos estos elementos en la tabla 1.

Tabla 1
Campo conceptual del tema ecuaciones lineales con una incógnita

Términos	Notaciones	Convenios	Resultados
-Términos	a, b, c...x, y, z	Las ecuaciones son igualdades entre expresiones algebraicas.	Solucionar una ecuación es encontrar el valor o valores de las incógnitas
- Letras	1, 2, 3, -3, -4, -5		
- Números	=, +, -, ×, /		
- Símbolos	(), [], { }	Siempre hay que hallar el valor de la incógnita.	que transforman la ecuación en una identidad.
- Signos			
- Grado			
- Datos conocidos		El dato desconocido se llama incógnita.	
- Datos desconocidos			Se debe encontrar el valor de la incógnita.
- Dependiente		Se llaman de primer grado cuando el exponente de la variable es uno.	
- Independiente			Si en una ecuación sumamos o restamos el mismo número a los dos miembros la ecuación no se altera.
- Miembros			
- Incógnita		Las incógnitas se representan con letras, generalmente las últimas del alfabeto.	
- Despejar			
- Igual			Si en una ecuación multiplicamos o dividimos por el mismo número distinto de cero la ecuación resultante es equivalente a la original.
- Multiplicativas			
- Aditivas			
- Identidad		Se excluye el símbolo de la multiplicación (×), por ejemplo,	
- Equivalencia		$a \times b = ab$	
- Transposición		$2 \text{ por } x = 2x,$	
		para no confundir la letra x con el signo \times .	

Consideramos diferentes aspectos para la elaboración del foco de contenido de nuestro tema. Entre estos aspectos tenemos hechos, conceptos y estructuras (campo conceptual) y destrezas, razonamientos y estrategias (campo procedimental). Destacamos estos aspectos en la tabla 2.

Tabla 2
Campo procedural del tema ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita

Conceptos	Estructuras	Destrezas	Razonamiento	Estrategias
Noción de:		Escritura y lectura de ecuaciones	Argumentos para desarrollar una ecuación	Calculo mental
- Igualdad	<i>Estructuras numéricas en los reales</i>			
- Incógnita		Generar ecuaciones equivalentes	Inductivo	Estimación de los resultados
- Primer miembro	- Suma - Resta		Deductivo	
- Segundo miembro	- Multiplicación - Cociente	Uso de las operaciones aritméticas en desarrollo de las ecuaciones		Agilidad para ordenar expresiones
- Ecuación				
- Propiedades de las igualdades	<i>Estructuras algebraicas</i>			
- Identidad				
- Polinomios	- Suma	Plantear ecuaciones,		
- Términos semejantes	- Símbolos algebraicos	teniendo en cuenta, un gráfico		
- Expresiones algebraicas		Resolver ecuaciones a partir de un planteamiento		
- Simetría de la Igualdad			Resolución de problemas que involucren ecuaciones	

La figura 2 presenta el mapa conceptual de este foco de contenido. En el mapa conceptual explicamos qué son las ecuaciones, cómo están compuestas, cuáles son sus términos, qué función cumplen las letras en una ecuación, qué es una ecuación de primer grado, las operaciones que se involucran en el desarrollo de estas y, finalmente, la resolución de problemas. Además, presentamos las relaciones que se establecen entre cada una de ellas.

3. Sistemas de representación

Los sistemas de representación son las diferentes maneras como podemos representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos. Por tanto, en la planificación de nuestro foco de contenido tuvimos en cuenta los campos conceptual y procedural, y a partir de ello, identificamos cuatro sistemas de representación: simbólico, manipulativo, verbal y gráfico. Utilizamos el sistema

de representación simbólico para referirnos al uso de letras y signos que empleamos en el desarrollo de las ecuaciones lineales, como las letras del alfabeto ($a, b, c \dots x, y, z$), los signos tanto de operación como de relación ($+, -, \times, /, =, (), [], \{ \}$) entre otros, al igual que los números reales ($1, 2, 3/2, -6 \dots -4/5$) y los términos de una ecuación —como $x-3=8$, $2m+3m=10$ —.

Expusimos en el sistema de representación manipulativo algunos recursos que podíamos utilizar al trabajar las ecuaciones lineales. Incluimos una gran variedad de recursos tecnológicos, como Derive, Geogebra, Cabri y Clic 3.0. Hicimos hincapié en el sistema de representación verbal de las ecuaciones lineales en las distintas definiciones y conceptos relacionados con el tema. En este sistema de representación tuvimos en cuenta la terminología propia del tema (i. e., incógnita, ecuación, solución, identidad), y el uso de expresiones como “el doble de un número más el triple del número es igual a 10”. Por otra parte, consideramos la recta numérica y la balanza para el sistema de representación gráfico. Presentamos estos sistemas de representación en el mapa conceptual expuesto en la figura 3.

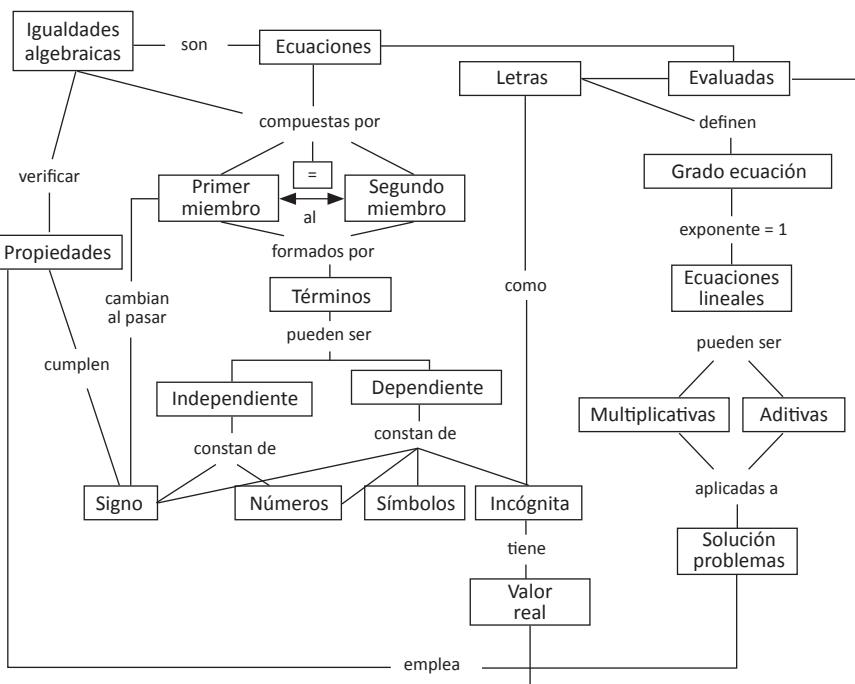


Figura 2. Mapa conceptual del foco de contenido

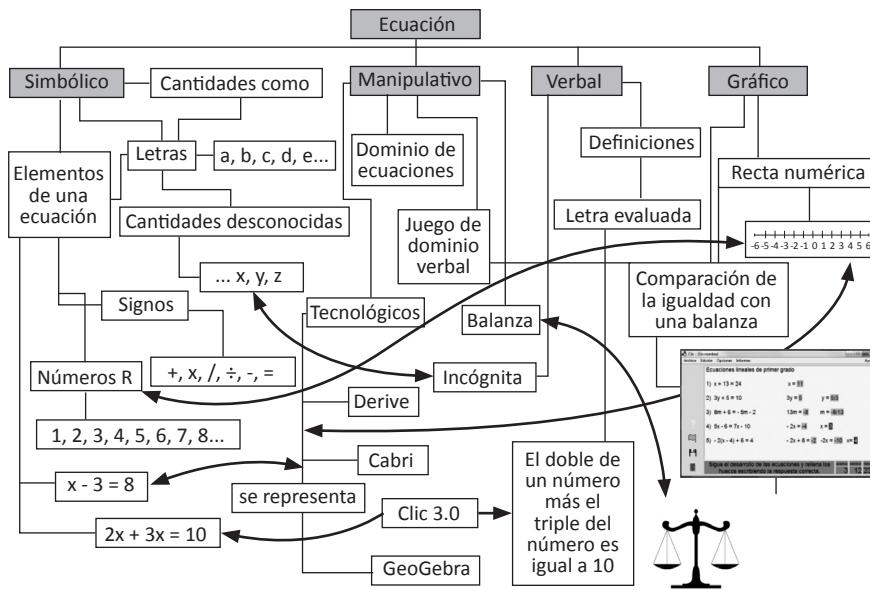


Figura 3. Sistemas de representación de las ecuaciones lineales

En la planificación de nuestro tema matemático resaltamos las múltiples relaciones entre los distintos sistemas de representación (flechas curvas de color negro). Por ejemplo, el sistema de representación simbólico se relaciona con el sistema de representación gráfico al notar que la solución de una ecuación tiene cabida en los números reales y que a estos les corresponde un punto en la recta numérica. Otra de las relaciones se da entre el sistema verbal y el simbólico, cuando se destaca la traducción que se hace entre un enunciado y su forma simbólica, y viceversa.

4. Análisis fenomenológico

La fenomenología es una herramienta eficaz y eficiente para establecer fenómenos y contextos en los que se puedan formular los problemas que se espera que aborden los escolares (Gómez, 2007, p. 50). Este análisis permite evidenciar su aplicación por medio de la realización de distintas tareas escolares.

La fenomenología de un concepto matemático la componen los fenómenos para los cuales dicho concepto constituye un medio de representación y organización.... Un análisis fenomenológico consiste en describir fenómenos asociados a los conceptos matemáticos así como la relación que existe entre ellos. (Segovia y Rico, 2001, p.89)

Una vez realizada la estructura conceptual, buscamos los fenómenos que dieran sentido al tema. Para ello, analizamos las posibles subestructuras, identificándolas como una “porción” de la estructura conceptual que delimita y modeliza grupos de fenómenos. En el caso de las ecuaciones lineales, escogimos dos subestructuras: la resolución de ecuaciones lineales y el lenguaje algebraico. Partiendo de estas subestructuras, nos centramos en los contextos matemáticos. Siguiendo la propuesta de Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez consideramos:

Un contexto matemático es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimientos. Los contextos de una determinada estructura se reconocen porque muestran posibles respuestas a la pregunta ¿para qué se utilizan estas nociones? El contexto refiere el modo en que se usan los conceptos, en una o varias situaciones. (Rico *et al.*, 2008, p. 11)

Consideramos dos contextos que corresponden a las dos subestructuras: resolver y traducir. Con el primero, organizamos los fenómenos para los que es necesario plantear y resolver ecuaciones. Con el segundo, recogemos los fenómenos que requieren utilizar las operaciones apropiadas al momento de resolver dichas ecuaciones y/o problemas.

Otro aspecto que hace parte del análisis fenomenológico son las situaciones. De esta manera, estudiamos para la planificación cuatro situaciones en las que el tema matemático ecuaciones lineales tiene aplicabilidad. Mencionamos estas situaciones a continuación.

Personal. Incluimos fenómenos que involucran problemas de compras, gastos y descuentos, depreciación de bienes (automóviles, vivienda), y de reparto no proporcional.

Pública. Consideramos fenómenos como asignación y reparto de votos en elecciones, y estudios de variaciones temporales (economía, desempleo, inmigración, precio de vivienda, esperanza de vida).

Educativa o laboral. Se refieren a fenómenos que incluyen cálculo de magnitudes (superficie, volumen, capacidad, amplitud, peso), problemas de cálculo de edades y resolución de ecuaciones matemáticas (en el contexto de aprendizaje escolar, sin vínculo con la realidad).

Científica. Incluimos problemas de movimientos (cinemática) y cálculo de distancias o medidas inaccesibles.

Existe una estrecha relación entre las subestructuras, los contextos y las situaciones, puesto que son formas de organizar los fenómenos. Es así como los

estudiantes en una situación personal podrían resolver problemas de compras, gastos y descuentos en el contexto resolver, destacando de esta manera la evidencia de resolución de ecuaciones perteneciente a la subestructura del tema matemático. En la tabla 3 mostramos estas relaciones, con ejemplos de fenómenos organizados por las cuatro situaciones para las dos parejas de subestructuras y contextos.

Tabla 3

Ejemplos de fenómenos organizados por situaciones para las dos subestructuras y contextos

Personal	Pública	Educativa	Científica
Lenguaje algebraico • Traducir			
Encuentra una fórmula para determinar el interés simple o compuesto (préstamos, ahorros)	Escribe la fórmula general para denotar el costo de (pasajes, copias)	Encontrar una expresión para hallar el perímetro de una caja	Un avestruz puede correr a la mitad de la velocidad con la que vuela un pato lombo blanco. Expresa esta relación con expresiones algebraicas
Representa matemáticamente el gasto de pasajes en un mes de una persona	X representa el valor de una fotocopia. Representa en términos de x , el valor de 23 fotocopias	Escribe una fórmula ecuación que exprese: un número desconocido sumado a cinco igual a ocho	
José tiene m pesos y Carlos tiene un quinto de la misma cantidad. Representa la cantidad de dinero, que tiene Carlos		Representa la ecuación correspondiente a: el perímetro de un cuadrado es 12 m	
Resolución de ecuaciones lineales • Resolver			
Problemas de compras, gastos y descuentos	Crecimientos de poblaciones	Cálculo de magnitudes (superficie, volumen, capacidad, amplitud, peso)	Problemas de movimientos (cinemática)
Problemas de reparto no proporcional	Previsión y avance de fenómenos meteorológicos	Estudio del interés simple o compuesto (hipotecas, préstamos)	Cálculo de distancias o medidas inaccesibles
Si un cuaderno cuesta \$350, ¿cuánto cuestan 12 cuadernos?	Depreciación de bienes (automóviles, vivienda)	Problemas de cálculo de edades	
	Si un automóvil puede viajar 192 km con 32 litros de gasolina, ¿qué distancia puede recorrer con 60 litros?	El triple de un número aumentado en 33 es cero. Hallar el número	

2. Análisis cognitivo

En el análisis cognitivo establecimos los objetivos de aprendizaje, las tareas que contribuyen a su desarrollo, las capacidades asociadas y las competencias a las que contribuyen. Luego, establecimos los caminos de aprendizaje de cada tarea y consideramos las posibles dificultades y errores en los que pueden incurrir los estudiantes (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009).

1. *Objetivos*

Un objetivo de aprendizaje se caracteriza por estar vinculado con un nivel educativo asociado con un contenido matemático concreto. Además, expresa una expectativa de aprendizaje que debe incluir conexiones entre los conceptos y procedimientos involucrados en la estructura conceptual, los sistemas de representación en los que el tema se puede representar y los fenómenos que el tema organiza. De acuerdo con estas condiciones, determinamos tres objetivos para la unidad didáctica. De ahí que consideramos iniciar con un objetivo relacionado con el uso del lenguaje natural y algebraico, para que los escolares se adapten al vocabulario propio del tema. Continuamos con otro relacionado con la solución de las ecuaciones lineales por el método algebraico, para afianzar los procedimientos matemáticos propios de la solución de dichas ecuaciones. Y terminamos con uno relacionado con la aplicación de los dos anteriores, que posibilita la resolución de problemas. Nuestros objetivos fueron los siguientes:

Objetivo 1. Plantear ecuaciones lineales traduciendo del lenguaje natural al algebraico, y viceversa.

Objetivo 2. Utilizar el método algebraico en la solución de ecuaciones lineales.

Objetivo 3. Reconocer y usar las ecuaciones lineales en la solución de problemas por medio del método algebraico.

2. *Tareas que caracterizan los objetivos*

Las tareas que seleccionamos están distribuidas de acuerdo con cada uno de los objetivos de la unidad didáctica. Para su selección tuvimos en cuenta el contexto de los escolares, la experiencia como docentes y los libros de texto.

Para el primer objetivo seleccionamos tres tareas que lo caracterizan. En la tarea El dinero, presentamos algunos enunciados cotidianos a los estudiantes, para que ellos los expresen utilizando simbología matemática. En la tarea Edades antes, ahora y después, proporcionamos enunciados más complejos,

para que los estudiantes establezcan relaciones aditivas y multiplicativas entre ellas, interpretando el lenguaje verbal y algebraico para plantear ecuaciones. En la tarea Traducción, proponemos ecuaciones de diferente tipo para que los estudiantes las traduzcan al lenguaje verbal.

Las tres tareas que seleccionamos para el segundo objetivo hacen énfasis en la ejercitación y aplicación del método algebraico para solucionar ecuaciones lineales de diferentes tipos. Por ejemplo, en la tarea La balanza, presentamos a los estudiantes una ecuación lineal para que, usando el lenguaje gráfico (a través del material tecnológico La balanza), ellos visualicen lo que sucede al realizar transposición de términos y así puedan establecer equivalencias entre las ecuaciones.

Para el tercer objetivo, planteamos cuatro problemas que se resuelven con ecuaciones lineales. Estas tareas están estrechamente relacionadas con los primeros dos objetivos. Por ejemplo, en la tarea Canicas describimos a los estudiantes el juego del Cucunubá y a partir de él, les proponemos una situación problemática con seis apartados. En esta tarea, el estudiante debe traducir del lenguaje verbal al algebraico, plantear ecuaciones lineales con una incógnita y solucionarlas con el método algebraico.

3. Competencias matemáticas

Las competencias matemáticas son expectativas de aprendizaje que permiten orientar la planificación. Se entienden como procesos específicos para formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, formular, comparar y ejercitarse procedimientos y algoritmos, que se pretenden desarrollar durante el proceso de aprendizaje de los escolares. Por tal razón, luego de hacer un análisis detallado de las competencias MEN (2006) y PISA (anexo 1)¹, decidimos utilizar las competencias PISA. Constatamos que los procesos generales propuestos por el MEN (2006) están inmersos en las competencias PISA y que las tareas que seleccionamos apuntaban a desarrollarlas, aunque unas en mayor medida que otras. Por lo tanto, las competencias seleccionadas fueron las siguientes.

- Pensar y razonar (PR)
- Argumentar (A)
- Comunicar (C)
- Modelar (M)
- Plantear y resolver problemas (RP)

¹ Los anexos de este capítulo se encuentran en <http://funes.uniandes.edu.co/1892/>

- Representar (R)
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones (LS)
- Emplear material y herramientas de apoyo (TIC)

Con el conjunto de tareas establecidas para los objetivos, también se puede contribuir al desarrollo de esas competencias, con diferente grado de intensidad. Establecemos el hilo conductor de las tareas, al identificar el énfasis de cada una de ellas; su contribución se muestra en la tabla 4.

Tabla 4
Contribución de las tareas a las competencias PISA

Tareas	Competencias PISA							
	PR	A	C	M	RP	R	LS	TIC
1.1 El dinero (a, b, c)						✓	✓	
1.2 Edades antes, ahora y después						✓	✓	
1.3 Traducción						✓	✓	
2.1 La balanza	✓					✓		
2.2 Resolver							✓	
2.3 Creatividad		✓			✓			
3.1 Jaime					✓		✓	
3.2 Canicas				✓			✓	
3.3 Longitud	✓						✓	
3.4 El depósito					✓		✓	

4. Capacidades

Definimos una capacidad como una expectativa del profesor sobre la actuación de un estudiante respecto a cierto tipo de tarea concreta. Las capacidades están asociadas con las actuaciones de los estudiantes cuando ejecutan los procedimientos rutinarios básicos del tema matemático. Enunciamos estas capacidades de forma que quede clara cuál es la información de partida y cuál es la información que se genera al activar la capacidad. Seleccionamos las capacidades para el tema matemático fijándonos en las destrezas que debían tener los estudiantes para desarrollar cada una de las tareas que caracterizan los objetivos. Estas capacidades provienen, además, de los conceptos y procedimientos rutinarios que necesitan saber hacer los estudiantes al momento de abordar el tema de ecuaciones lineales con una incógnita. De esta forma, previmos el listado de capacidades que presentamos en la tabla 5.

Tabla 5
Capacidades

Capacidad	Descripción
C ₁	Identificar que se puede utilizar cualquier letra como incógnita.
C ₂	Pasar de un enunciado verbal a una expresión simbólica o viceversa, para representar ecuaciones de primer grado.
C ₃	Encontrar la relación que existe entre lenguaje natural y lenguaje algebraico al plantear una ecuación lineal.
C ₄	Hacer operaciones entre números enteros y/o racionales que mantengan la igualdad entre expresiones algebraicas.
C ₅	Reducir términos semejantes para solucionar ecuaciones lineales.
C ₆	Reconocer ecuaciones equivalentes lineales (con una incógnita) cuando se realiza transposición de términos.
C ₇	Realizar cálculos matemáticos mentalmente para resolver una ecuación de primer grado.
C ₈	Identificar cuando existe una equivalencia entre dos expresiones algebraicas
C ₉	Introducir los datos en la ecuación (con una incógnita) para mantener la equivalencia de ecuaciones.
C ₁₀	Identificar datos conocidos y desconocidos en un enunciado.
C ₁₁	Interpretar el resultado obtenido en la solución de ecuaciones lineales (con una incógnita) sustituyendo el valor numérico en la expresión algebraica.
C ₁₂	Describir situaciones que se modelicen mediante ecuaciones lineales (con una incógnita).
C ₁₃	Utilizar, suprimir y/o introducir los signos de agrupación adecuadamente
C ₁₄	Interpretar el enunciado de problemas de ecuaciones lineales (con una incógnita).
C ₁₅	Analizar el procedimiento en la solución de la ecuación lineal (con una incógnita).
C ₁₆	Establecer la relación que existe entre una expresión simbólica y una representación gráfica y viceversa para solucionar ecuaciones lineales.

Estas capacidades se distribuyeron para cada uno de los objetivos y tareas (anexo 2).

5. Caminos de aprendizaje

Un camino de aprendizaje de una tarea es una secuencia de capacidades que los alumnos pueden poner en juego al resolverla. Una misma tarea puede de tener asociados distintos caminos de aprendizaje, dependiendo del nivel educativo o cognitivo de los estudiantes. Los caminos de aprendizaje proporcionan información sobre cómo los estudiantes pueden abordar una tarea y, por consiguiente, sobre la contribución de la tarea a un objetivo de aprendizaje. Establecimos los caminos de aprendizaje a partir de hipótesis que tenemos

acerca del modo en que un estudiante resuelve cada una de las tareas. Luego, organizamos los caminos de aprendizaje en términos de secuencias de capacidades que se pueden activar al resolver las tareas. Además, identificamos vínculos entre capacidades y las relacionamos con las tareas. Por ejemplo, un camino de aprendizaje para la tarea Canicas es: C14 → C10 → C2 → C4 → C6 → C15 → C11. En el anexo 3 presentamos los caminos de aprendizaje de las 10 tareas propuestas para nuestro tema.

6. Dificultades y errores

El aprendizaje de las matemáticas genera muchas dificultades a los alumnos. Estas dificultades son de naturalezas distintas. Podemos abordarlas a partir del desarrollo cognitivo de los alumnos, de la forma como se aborda el currículo de matemáticas y de los métodos de enseñanza. Esas dificultades se manifiestan en forma de errores que son observables directamente en las actuaciones de los escolares, cuando responden a las demandas del profesor. Identificamos cuatro relacionadas con nuestro foco de contenido y con los objetivos de aprendizaje establecidos.

- Uso y significado que se le atribuye a la letra.
- Paso de un lenguaje verbal a un lenguaje algebraico o viceversa.
- Manejo de los signos, operar con números racionales y uso de las propiedades que de ellos se derivan.
- Reducción de términos semejantes y aplicación de la propiedad de los inversos (multiplicativo y aditivo) para evaluar los criterios de equivalencia de ecuaciones lineales.

En total, identificamos 16 errores (anexo 4) que organizamos en torno a estas dificultades. Esos errores se hacen visibles en algunos momentos de los caminos de aprendizaje al desarrollar las tareas, dado que un estudiante que tiene una dificultad incurre en errores durante el proceso de resolución de una tarea. Por ejemplo, en la figura 4 presentamos el camino de aprendizaje de la tarea Canicas e indicamos los errores que previmos que podrían suceder los estudiantes al desarrollar esta tarea.

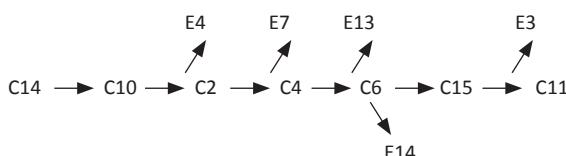


Figura 4. Errores en el camino de aprendizaje de la tarea Canicas

La tabla 6 describe los errores que aparecen en la figura 4.

Tabla 6
Errores en el camino de aprendizaje de la tarea Canicas

Error	Descripción
E_4	La incapacidad para simbolizar matemáticamente una expresión verbal y viceversa (la comprensión de las notaciones para describir verbalmente una situación).
E_{14}	Transponer mal los términos (inverso aditivo).
E_7	Operar los números enteros en la solución de ecuaciones como si fueran números naturales.
E_{13}	Transponer mal los términos (inverso multiplicativo).
E_3	No lograr sustituir todas las incógnitas encontradas en la ecuación, para verificar que son equivalentes.

3. Análisis de instrucción

El análisis de instrucción indaga sobre los recursos y materiales, el agrupamiento de los estudiantes, la inclusión de problemas y los procedimientos por seguir para el desarrollo de las diferentes tareas. La utilización de recursos y materiales actúa como un medio facilitador del aprendizaje. Las actuaciones del docente y estudiantes también desempeñan un papel importante, junto con el tipo de agrupamiento de los estudiantes durante la clase.

1. Descripción de las tareas agrupadas por objetivo

A continuación presentamos las tareas que diseñamos para cada uno de los objetivos. Dichas tareas están encadenadas de lo más simple a lo más complejo. Propusimos tres tareas para el objetivo 1.

Tarea El dinero

Si n representa cierta cantidad de dinero, escriba mediante una expresión algebraica cada uno de los siguientes enunciados:

- \$4000 restado el dinero es igual a \$2300.
- El doble del dinero más el triple del mismo es igual a \$7500.
- La quinta parte de un dinero aumentada en la mitad del mismo es igual a \$7000.

La segunda y tercera tareas nos ayudan a que el estudiante adquiera habilidad en la traducción del lenguaje verbal al algebraico y viceversa.

Tarea Edades antes, ahora y después

Construya una ecuación para completar la tabla A. Si se sabe que Ángel tiene 3 años más que Pedro, Sandra tiene 5 años menos que Pedro y Julián tiene el doble de años que Pedro,

	Ángel	Sandra	Pedro	Julián
Hace dos años				
Actual	$3 + p = a$			
Dentro de cinco años				

Tabla A

Tarea Traducción

Redacte con sus propias palabras un enunciado para cada una de las ecuaciones

Expresión algebraica	Lenguaje verbal
$\frac{1}{3} + 3p = \frac{2}{3}$	
$\frac{m + 1}{2} = 12$	
$m + m + 1 + m + 2 = 50$	

Tabla A

En el desarrollo de estas tareas tenemos en cuenta varios aspectos. Entre ellos, la organización de los estudiantes en el aula de clase. Por ejemplo, presentamos las instrucciones generales en el gran grupo y de forma individual. También, proponemos la interpretación y el desarrollo de las tareas. Este trabajo permite al estudiante equivocarse y confrontarse consigo mismo. Luego, los estudiantes tienen la posibilidad de exponer en el gran grupo lo realizado. Otro aspecto que hemos tenido en cuenta son los recursos que se van a utilizar en el desarrollo de las tareas: tablero, papel, lápiz, borrador y *video beam*. De igual manera, para el segundo objetivo introdujimos tres tareas.

Tarea La balanza

Resuelva la ecuación $3x - 3 = 6$ utilizando las balanzas virtuales que se relacionan a continuación.

- Encuentre el valor de x .
- Exprese verbalmente lo observado.

c) Realice operaciones a partir de la expresión simbólica.
 d) Realice el mismo ejercicio en parejas, utilizando las dos balanzas y explicando por escrito y verbalmente lo observado.

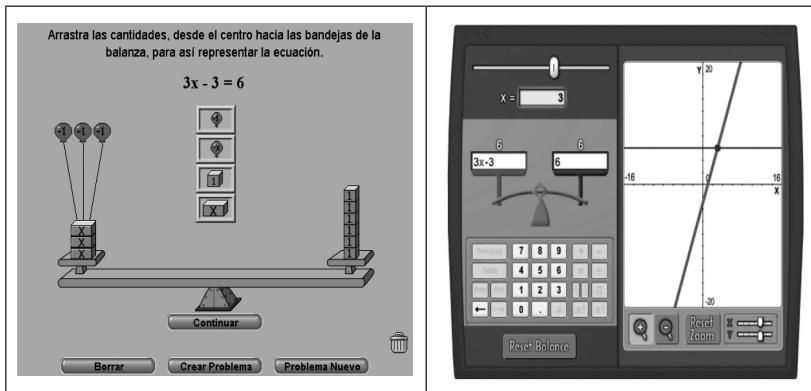


Figura A

Tarea Creatividad

a) Comprueba si $x = 1$ es solución de la ecuación $\frac{x-4}{3} + 7 = \frac{3x+5}{6}$
 b) Si $x = 1$ no es solución del literal a, encuentren la solución por parejas usando Clic 3.0.
 c) Ahora, únanse a otra pareja de compañeros e inventen una ecuación equivalente a la anterior, haciendo uso del material Lo tuyo y lo mío de la figura.

Tengo lo mismo	¡Vaya!, si tienes 4 veces menos que yo
Lo mismo es el doble de lo tuyo	Lo mío es 6 veces lo tuyo
Entre los dos tenemos 47	Si te diera 25, tendríamos lo mismo
Lo mío es el triple de lo tuyo	Té gano por 27
La diferencia entre lo tuyo y lo mío es 23 pero yo tengo más	Tienes la mitad que yo
Si te diera 15, tendríamos lo mismo	No me quites 8, que entonces te quedas con 1 más que yo
Si te consigues 6 más, tendrás el doble que yo	Vamos a buscar 2 más cada uno, así tendré justo el doble que tú
	¡Vaya!, lo tuyo es solo la cuarta parte de lo mío
	¡No me compares! Tres veces lo tuyo solo llega a la mitad de lo mío

Figura A

Tarea Resolver

a) Utilice la pista algebraica para solucionar la ecuación $2(3y + 6) = -4(y - 6)$ siguiendo las instrucciones establecidas.

b) Diseñe un registro o bitácora del método o métodos que haya utilizado para solucionar las ecuaciones que le correspondieron durante el recorrido.

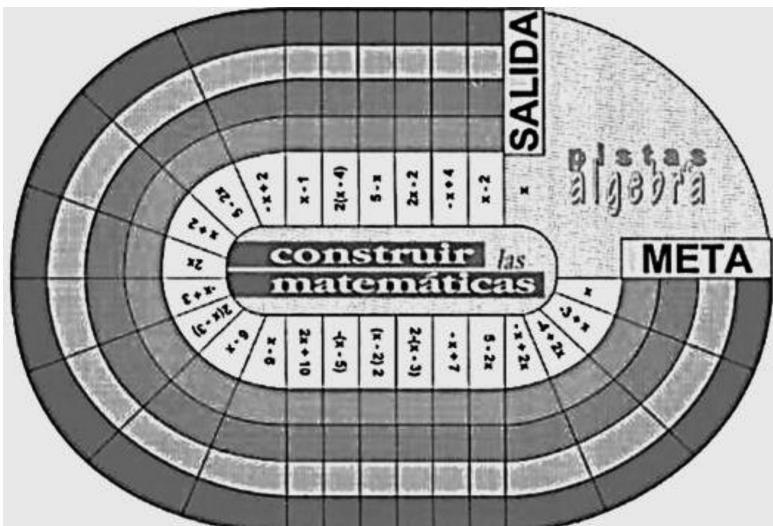


Figura A. Pista algebraica

Estas tareas inducen al estudiante a resolver ecuaciones lineales que requieren la noción de equivalencia de ecuaciones y los algoritmos correspondientes. Por ejemplo, en la tarea La balanza, por medio del material virtual las balanzas, desarrollan ecuaciones en grupos de cuatro estudiantes con los que confrontan sus resultados. Con este mismo agrupamiento, propusimos la tarea Creatividad, en la que, por medio del recurso tecnológico Álgebra con papas, ingresan y realizan diferentes ecuaciones y se ejercitan con el material Lo tuyoo y lo mío. Así mismo, en la tarea Resolver los estudiantes solucionan varias ecuaciones que les presentamos en el material pista algebraica, en la que, para poder avanzar, deben solucionar correctamente las ecuaciones que van apareciendo y poner el resultado en una bitácora. Los estudiantes realizan el trabajo individualmente y confrontan el resultado con el compañero que avanza.

Previmos realizar explicaciones en el gran grupo (espacio justo para expresar dificultades) al iniciar y finalizar estas tareas. También, previmos explicaciones en pequeños grupos e intervenciones por parte de los estudiantes, buscando que su participación fuese activa en la mayor parte de las clases.

Para finalizar, en el tercer objetivo nos centramos en la resolución de problemas. Los estudiantes deben buscar pruebas, criticar argumentos, utilizar el lenguaje matemático fluidamente y reconocer los conceptos matemáticos relacionados con la temática, siendo coherentes con los procedimientos seguidos para su solución. Concebimos la resolución de problemas como una situación que supone alcanzar una meta, ofreciendo elementos a los estudiantes para rea- limentar contenidos de objetivos anteriores. De acuerdo con lo anterior, consideramos cuatro tareas.

Tarea Jaime

Jaime escuchó a la salida del colegio cómo hablaban dos profesores de matemáticas y memorizó lo que uno de ellos le dijo al otro: “ese problema está claro, porque la suma de tres números consecutivos es siempre un múltiplo de 3”. Jaime se quedó intrigado y al llegar a casa, trató de comprobar esa propiedad que encontró curiosa.

- ¿Cómo puede Jaime representar esa relación numérica?
- Ayuda a Jaime a elaborar un argumento que la justifique.
- Jaime encontró que hay tres números consecutivos que al sumarlos se obtiene 39. ¿Los encuentras tú?

Tarea Canicas

En el juego el Cucunubá se usa una caja de cartón que se pone en el piso y que tiene 5 huecos, numerados como se muestra en la figura A.

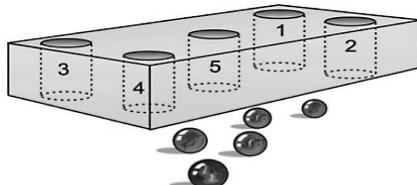


Figura A. Juego Cucunubá

Cada jugador lanza en su turno 5 bolas de cristal (canicas), buscando introducirlas en los huecos. El puntaje de cada jugador se obtiene al sumar los valores correspondientes a los huecos donde introduce las canicas.

- En el primer turno, Juan obtuvo 10 puntos, que corresponden al triple de los puntos de Diana más uno. ¿Cuántos puntos obtuvo Diana?
- En el segundo turno, Diana obtuvo 12 puntos, que corresponden al doble de lo que obtuvo Juan más dos. ¿Cuántos puntos menos obtuvo Juan?
- Si el juego se terminó después de estos dos lanzamientos, ¿cuál fue el ganador y cuál la diferencia de puntajes?

- d) Si se amplía el número de huecos de 1 a 9 y un jugador obtuvo 30 puntos y acertó a tres números consecutivos de tal forma que en el hueco del número mayor insertó dos canicas y en el hueco del número menor, también dos. ¿En cuáles huecos acertó? Justifica tu respuesta y compara si hay otro resultado.
- e) Únete con otro compañero para verificar los resultados obtenidos anteriormente con el material fichas de colores.
- f) Finalmente, organízense en equipos de cuatro estudiantes para jugar y expresen algebraicamente los resultados que obtengan.

Tarea El depósito

Un depósito dispone de dos grifos. Si abrimos solamente el primero, el depósito se llena en 8 horas; y si abrimos los dos grifos, se llena en 3 horas.

- a) ¿Cuánto tardaría en llenarse si abriéramos solo el segundo grifo?
- b) Si sabemos que el primer grifo gasta el doble de lo que gasta el segundo, ¿cuánto gastan los dos?
- c) Si lo que gasta el primer grifo equivale al doble de lo que gasta el segundo, menos dos, ¿cuánto tardaría en llenarse si solamente abrimos el segundo?

Tarea Longitud

Don José decide cercar su finca con alambre, pero antes de comprarlo necesita medir el lote, que tiene el doble de largo que de ancho. Si el largo se disminuye en 6 m y el ancho se aumenta en 4 m, la superficie del terreno no varía. Halle las dimensiones del terreno.

Para las últimas tareas tenemos en cuenta varias cuestiones. En la tarea Jaime, a partir de una situación cotidiana, el estudiante debe encontrar la solución de manera individual y después discutirla en el gran grupo. En la tarea Canicas presentamos una situación relacionada con el recurso el Cucunubá. Para ayudarles a la solución de esta tarea usamos el material fichas de colores. Las tareas Depósito y Longitud permiten que el estudiante utilice estrategias en la solución de problemas mediante la utilización de ecuaciones lineales.

Además, consideramos realizar varios tipos de agrupamiento. Inicialmente proponemos un agrupamiento individual para interpretar enunciados; luego, prevemos que los estudiantes trabajen en parejas con el material; después, sugerimos que trabajen en grupos de cuatro estudiantes para expresar algebraicamente los resultados obtenidos; y, finalmente, esperamos que lleguen a acuerdos en el gran grupo, siendo el profesor un mediador en todo el proceso.

Por otro lado, previmos la incorporación de materiales y recursos (anexo 5) para facilitar a los escolares la resolución de ecuaciones lineales de forma

grupal e individual. Así mismo, cada uno de los recursos aporta de una forma diferente a las tareas planteadas. Las balanzas virtuales permiten afianzar conceptos del desarrollo de ecuaciones lineales; con las fichas de colores, los estudiantes manipulan, representan y solucionan en forma simbólica las ecuaciones planteadas; y el material Lo tuyo y lo mío contribuye a la comprensión de enunciados verbales para facilitar el proceso de traducción del lenguaje verbal al algebraico, y viceversa.

2. Análisis de una tarea

A continuación presentaremos el análisis que realizamos de la tarea La balanza, en el que explicamos en qué medida contribuye a las expectativas de aprendizaje. Con dicha tarea pretendíamos que los estudiantes encontraran la equivalencia entre dos expresiones y solucionaran varias ecuaciones lineales, contribuyendo al alcance del segundo objetivo. Previmos el siguiente camino de aprendizaje: $C_{16} - C_7 - C_9 - C_{11} - C_{10}$. En este camino de aprendizaje se activan algunas capacidades, como reconocer ecuaciones equivalentes lineales (con una incógnita) cuando se realiza transposición de términos; realizar cálculos matemáticos mentalmente para resolver una ecuación de primer grado; e introducir los datos en la ecuación lineal (con una incógnita) para mantener la equivalencia de ecuaciones. Los estudiantes podían tomar otros caminos, pero siempre orientados a desarrollar las expectativas propuestas.

De igual manera, con esta tarea se pretendía contribuir al desarrollo de las competencias de pensar, razonar y representar, en la medida en que los estudiantes plantearan y desarrollaran las ecuaciones que se les presentaban en las balanzas virtuales; decodificaran e interpretaran el lenguaje simbólico para resolver ecuaciones lineales mediante el método algebraico; comprendieran los cálculos; y escogieran y relacionaran diferentes formas de representación. Consideramos que esta tarea corresponde a un ejercicio de respuesta abierta y cerrada, cumpliendo la función de exploración y fomentando la interrogación y el cuestionamiento. Además, con el desarrollo de esta tarea, se busca cubrir algunos aspectos del campo conceptual y procedimental, como ecuaciones lineales, equivalencia de ecuaciones, reducción de términos semejantes, operaciones con números enteros y racionales, y propiedades aditivas y multiplicativas de las ecuaciones (transposición de términos).

Realizamos este tipo de análisis de cada una de las tareas propuestas para el segundo objetivo, permitiéndonos identificar la importancia de cada uno de los momentos de la secuencia didáctica (anexo 6). Establecimos la función

de cada una de las tareas para examinar qué papel podían desempeñar y cómo podíamos organizarlas teniendo en cuenta la secuencia de clases, como se muestra en la tabla 7.

Tabla 7
Función de las tareas en la secuencia didáctica

Tareas	Función en secuencia de la tarea
1.1	<ul style="list-style-type: none"> • Para ayudar a conocer los aprendizajes previos realizados por el alumno
1.2 y 1.3	<ul style="list-style-type: none"> • Para ayudar a la motivación y contextualización con la realidad
2.1	<ul style="list-style-type: none"> • Exploratorias fomentadoras de la interrogación y del cuestionamiento
2.2, 2.3 y 2.4	<ul style="list-style-type: none"> • De ejercitación
Situaciones sencillas	<ul style="list-style-type: none"> • Tareas exploratorias fomentadoras de la interrogación y del cuestionamiento
3.1	<ul style="list-style-type: none"> • Tareas exploratorias fomentadoras de la interrogación y del cuestionamiento
3.2, 3.3 y 3.4	<ul style="list-style-type: none"> • Tareas de síntesis que afianzan los conocimientos para aplicarlos en diversos contextos

3. Secuencia de clases

Después de realizar el análisis de las tareas, entramos a considerar la forma de organizarlas coherentemente. La organización incluye todas las actividades que vamos a desarrollar en las clases. Esta secuencia la explicamos con detalle en el apartado siguiente.

4. Análisis de actuación

El análisis de actuación se ocupa de la planificación y evaluación de la unidad didáctica. Para este análisis diseñamos instrumentos y establecimos los procedimientos para recoger información y analizarla posteriormente. Con base en esta información proponemos reajustes a la unidad didáctica.

1. Criterios de evaluación

Este análisis se centra en la evaluación en el aula. Para este, hemos recurrido a la evaluación cualitativa, cuantitativa y formativa. Buscamos analizar en qué medida el desempeño de los escolares se ha logrado y establecer la medida en que ellos alcanzan los objetivos de aprendizaje, teniendo en cuenta cómo las tareas contribuyen al desarrollo de las capacidades, los objetivos y las competencias propuestas.

2. Instrumentos de recolección de información

Para realizar el seguimiento a los estudiantes diseñamos dos tipos de instrumentos para la evaluación de sus aprendizajes. Los primeros estaban destinados a recoger información de forma cotidiana e informal. Los segundos eran específicos y estaban destinados a recoger información de cada alumno. Entre los primeros proponemos los siguientes.

Actividades de aula

Estas actividades corresponden a las preguntas de discusión para promover la comprensión y la comunicación entre escolares y docente-alumnos. Entre las preguntas que previmos hay unas de orden general, como ¿qué fue lo más difícil en el desarrollo de la tarea?, ¿qué pasos realizó para solucionar dicha tarea?, ¿realmente esos pasos son acertados?, ¿qué otras posibles soluciones encontraron a la tarea?, ¿cuáles de las respuestas pueden ser acertadas y cuáles no?, ¿el material y recursos empleados en la tarea le brindan algún beneficio?, ¿cuál? También, formulamos preguntas de orden específico, como ¿podemos cambiar la n de la primera tarea por otra letra?, ¿es lo mismo escribir $2x$ que x^2 o $\frac{x}{2}$?, ¿por qué? ¿Se puede utilizar el mismo signo para escribir hace dos años y dentro de 5 años?, ¿qué posibles enunciados se pueden plantear?, ¿cómo sabemos que dos ecuaciones son ecuaciones equivalentes?, ¿qué elementos se deben tener en cuenta para construir una ecuación?, ¿qué pasos se necesitan para abordar un problema? y ¿qué se debe tener en cuenta para suprimir términos de lado a lado de la ecuación?

Parrillas de observación de los caminos de aprendizaje

Planificamos las parrillas de observación respecto a los caminos de aprendizaje seguidos por los estudiantes. En estas parrillas buscamos identificar algunas de las actuaciones de los escolares y/o los errores en los que pueden incurrir los estudiantes. A partir de los resultados obtenidos en las parrillas, proponemos acciones que ayuden a mejorar su desempeño.

Diario del alumno

En el diario del alumno, el estudiante manifiesta algunos aspectos sobre el desarrollo de la clase y su aprendizaje. Tomamos estos aspectos como referente para la actuación del docente en las siguientes clases, como estrategia de superación de deficiencias y para el fortalecimiento de aspectos positivos de los estudiantes.

Diario del profesor

El profesor realiza, en el diario del profesor, el análisis de lo acontecido desde la enseñanza y el aprendizaje en cada sesión, con el fin de emprender las acciones pertinentes de cambio para las otras clases. Entre los instrumentos de evaluación específicos, destinados a recoger información de cada alumno, proponemos los siguientes.

Prueba diagnóstica inicial

Con esta prueba buscamos identificar el estado de los estudiantes respecto a los conocimientos previos, para proponer pequeñas modificaciones al comienzo de la unidad didáctica.

Algunas tareas de la secuencia

De las 10 tareas propuestas para la secuencia, escogimos las tareas El dinero, Edades, Traducción y Canicas por su ubicación estratégica en el primer y tercer objetivos de la unidad didáctica. Dicha ubicación nos permite evaluar la evolución en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Además, en la tarea Canicas involucramos la autoevaluación por parte de los escolares por medio de una rúbrica.

3. Examen final

Diseñamos el examen final para concluir la unidad didáctica, porque reúne diferentes aspectos de los tres objetivos estudiados. Además, nos permite terminar el seguimiento de los escolares.

4. Rúbricas de las tareas

Para las tareas Resolver y Canicas diseñamos la rúbrica como estrategia de auto-seguimiento evaluativo del alumno. Hicimos lo mismo con el examen final.

Autoevaluación del aprendizaje

Propusimos la autoevaluación para que los estudiantes la diligenciaran al final de la unidad didáctica. Con este instrumento recopilamos información para confrontarla con la recolectada por medio del diario del alumno.

Evaluación de la enseñanza

Este tipo de evaluación nos brinda información relacionada con el modo de actuación del docente durante la implementación. Además, nos permite planificar futuras modificaciones a la unidad didáctica implementada.

Después de describir los instrumentos que diseñamos para recolectar información, presentamos la rúbrica (tabla 8) que creamos para la tarea Canicas. Esta rúbrica está organizada en cuatro columnas. En la primera de ellas están los cuatro criterios por evaluar (interpretación del problema, terminología matemática y notación —lenguaje algebraico—, conceptos y procedimientos matemáticos, y comunicación) y en las columnas restantes aparecen la escala valorativa empleada en la institución educativa (superior, alto, básico y bajo) para medir el desempeño de cada estudiante. En las filas describimos con detalle los aspectos que el estudiante debe alcanzar para conocer el desempeño obtenido en esa tarea.

Tabla 8
Rúbrica de la tarea Canicas

Superior 90-100%	Alto 80-89%	Básico 60-79%	Bajo 0,0-59%
Interpretación del problema			
Interpreta y traduce fácilmente los enunciados de los apartados de la tarea.	Interpreta y traduce los enunciados de la tarea.	Interpreta y traduce algunos de los enunciados de la tarea.	El estudiante presenta dificultades en la interpretación y traducción de los enunciados de la tarea.
Terminología matemática y notación (lenguaje algebraico)			
Usa correctamente la terminología y notación en la solución de cada uno de los apartados del problema que se resuelve con ecuaciones lineales.	Usa por lo general la terminología y notación en la solución de cada uno de los apartados del problema que se resuelve con ecuaciones lineales.	Usa algunas veces la terminología y notación en la solución de cada uno de los apartados del problema que se resuelve con ecuaciones lineales.	Usa pocas veces la terminología y notación en la solución de cada uno de los apartados del problema que se resuelve con ecuaciones lineales.
Conceptos y procedimientos matemáticos			
Participa activamente, escuchando las sugerencias de sus compañeros y trabajando cooperativamente durante toda la tarea, siguiendo consistentemente las instrucciones y haciendo un buen uso de los materiales según se indique.	Participa en el desarrollo de la tarea escuchando las sugerencias de los otros compañeros y trabajando cooperativamente, siguiendo consistentemente las instrucciones durante la mayor parte de la tarea y usando los materiales según se indique.	Participa poco en el desarrollo de la tarea escuchando las sugerencias de los otros compañeros y trabajando cooperativamente, siguiendo consistentemente las instrucciones durante la mayor parte de la tarea y usando los materiales según se indique.	El estudiante no trabaja efectivamente en el desarrollo de la tarea con sus compañeros, no sigue instrucciones durante la tarea ni usa los materiales según se indica.

Superior 90-100%	Alto 80-89%	Básico 60-79%	Bajo 0,0-59%
Comunicación			
Es hábil para explicar ideas, argumentos, procedimientos y verificar resultados tanto en forma oral como escrita; empleados en la solución de los apartados de la tarea.	Explica ideas, argumentos, procedimientos y verifica resultados tanto en forma oral como escrita; empleados en la solución de la tarea.	Explica ideas, argumentos, procedimientos y verifica resultados medianamente en forma oral o escrita; empleados en la solución de la tarea.	Se le dificulta explicar ideas, argumentos, procedimientos y verificar resultados tanto en forma oral como escrita; empleados en la solución de la tarea.

Los diseños de las rúbricas para la tarea Resolver y el examen final se encuentran en el anexo 7. En ese anexo describimos la forma de usarlas con los estudiantes en el aula de clase.

5. Previsión de modos de actuación

De acuerdo con los caminos de aprendizaje de las tareas, identificamos los posibles errores en los que pueden incurrir los estudiantes. A partir de estos caminos de aprendizaje, proponemos actividades complementarias. Diseñamos estas actividades para ser desarrolladas en forma individual o en pequeño grupo, y, en otras oportunidades, con ayuda del docente. Además, los escolares pueden realizar estas actividades dentro del aula o fuera de ella. En la tabla 9 presentamos algunos ejemplos de modos de actuación planeados para los posibles errores en los que podrían incurrir los estudiantes.

Tabla 9
Ejemplos de modos de actuación para los errores

Error	Modo de actuación
E ₁	Explicación y ejercicios tipo rutinarios guiados por el docente y/o compañeros que entiendan dicho tema, realizando luego sus respectivas correcciones en el tablero y/o cuaderno de apuntes.
E ₃	Guía para el alumno, donde se desarrolla paso a paso la temática (anexo 8).
E ₇	Actividades en línea ² donde el estudiante se apropié de su aprendizaje, a través del enlace para trabajar la adición de los números enteros. En estos enlaces el estudiante puede manipular las fichas positivas y negativas de tal manera que, al sobreponer una encima de la otra, se anule.

Continúa

² Véanse http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_161_g_1_t_1.html?from=topic_t_1.html y <http://www.ematematicas.net/problemaecuacion.php?a=>

Error	Modo de actuación
E_8 y E_{10}	Proyección de video ³ , donde se indican algunos elementos esenciales para operar con números racionales. Después de observar el error, el docente propone algunas preguntas orientadoras, como las siguientes: ¿todas las operaciones con números racionales se realizan de la misma forma?, ¿en qué se diferencian?
E_{13} y E_{14}	Explicación y ejercicios rutinarios ⁴ guiados por el docente y/o compañeros que entiendan dicho tema, a través del enlace.

En el anexo 9 presentamos los modos de actuación con mayor detalle.

6. Organización de la secuencia didáctica

Hicimos de forma general la organización de la unidad didáctica. Presentamos ahora la organización de cada una de las sesiones de clase, de acuerdo con los objetivos propuestos. Para llegar a su consecución, presentamos previamente los tipos de interacción estudiante-estudiante y estudiante-docente que podemos establecer dentro del aula. Hemos considerado las siguientes:

Trabajo por pares. En este trabajo, los estudiantes comparten sus experiencias y conocimientos para abordar una tarea y procurar resolver las dudas entre ellos o con intervención del docente. El profesor propicia la discusión a partir de cuestionamientos.

Trabajo en pequeños grupos. Esta es la forma que hemos establecido para hacer puestas en común de las soluciones a las tareas propuestas dentro de la clase.

Socialización en gran grupo. Esta interacción está orientada por el docente con toda la clase, a través de preguntas orientadoras para solucionar dudas o afianzar conceptos y procedimientos.

Realimentación. El docente hace estratégicamente seguimiento al desarrollo de las tareas en el aula, y generalmente, al finalizarlas, propone acciones que contribuyan a que los estudiantes comprendan sus errores y los superen con su ayuda y la de sus compañeros.

Diligenciamiento del diario del alumno. Este diario nos ofrece el espacio de comunicación directa entre el estudiante y el docente, y nos permite identificar las dificultades y errores durante el desarrollo de las sesiones y proponer ayudas para superarlos.

³Véase <http://www.youtube.com/watch?v=liF9LsL2mBY&feature=fvsr>

⁴Véase <http://www.programasok.com/ejercicios-de-matematicas.html> (matemáticas 1.0).

La duración de cada sesión de clase es de sesenta minutos. Realizamos durante este tiempo algunas actividades generales, bien fuese antes, durante o al finalizar la sesión. Entre estas actividades están las de realimentación, aclaración de dudas, solución de la tarea prevista para la sesión por parte del alumno y diligenciamiento del diario del estudiante. Previmos para las actividades algunos tiempos específicos. Por ejemplo, para el diligenciamiento del diario del alumno, asignamos cinco minutos antes de finalizar la clase; para la realimentación de dudas, 10 minutos al inicio de la clase; y el tiempo restante lo dedicamos a motivación, instrucciones del maestro en el gran grupo, agrupamiento de los escolares, presentación de la tarea, explicación y uso de los materiales, solución y socialización de la actividad. Relacionamos la posible asignación de tiempos para cada actividad en el anexo 10.

La distribución de las tareas y actividades durante las 10 sesiones programadas para la implementación no incluyen la prueba diagnóstica y el examen final. De ahí que les hayamos asignado el nombre de sesión cero y última sesión, respectivamente.

7. Presentación de la secuencia didáctica

En este apartado describimos las sesiones de la secuencia didáctica.

Sesión cero. Aplicamos la prueba diagnóstica inicial a través de un cuestionario escrito compuesto por ocho preguntas relacionadas con conocimientos matemáticos de los grados anteriores.

Sesión uno. Presentamos la secuencia didáctica, el sistema de evaluación y el primer objetivo con los criterios de evaluación y motivación. También, introducimos y desarrollamos las actividades rutinarias (como la de tanteo), y exponemos, planteamos y proponemos la resolución de la tarea El dinero.

Sesión dos. Socializamos la tarea El dinero, y motivamos y presentamos la sesión. Luego hacemos el planteamiento, solución y socialización de la tarea Edades.

Sesión tres. Socializamos los criterios de logro del segundo objetivo; motivamos y explicamos el método algebraico para solucionar ecuaciones lineales, por medio de algunos ejemplos; presentamos y desarrollamos actividades rutinarias para solucionar directamente ecuaciones.

Sesión cuatro. Motivación, planteamiento, solución y socialización de la tarea La balanza.

Sesión cinco. Presentación y socialización de la autoevaluación por medio de la rúbrica de la tarea Resolver.

Sesión seis. Presentación y solución de la tarea Creatividad.

Sesión siete. Presentamos el tercer objetivo con sus criterios de logro, y motivamos y explicamos a los estudiantes cómo solucionar problemas (situaciones problemáticas sencillas). Presentación, planteamiento, solución y socialización de la tarea Jaime.

Sesión ocho. Socializamos los errores, dificultades y dudas relacionados con la tarea Jaime. Luego hacemos la motivación, presentación y socialización de la rúbrica y de la tarea Canicas. Damos las instrucciones en gran grupo para que se organicen en grupos de cuatro estudiantes y procedan a solucionar y socializar entre pares los resultados de esta tarea.

Sesión nueve. Evaluamos la tarea Canicas de acuerdo con la rúbrica. Repasamos y realimentamos la secuencia didáctica y asignamos la tarea El depósito como trabajo extra clase.

Sesión diez. Aclaramos los errores, dificultades y dudas de la tarea El depósito, de la secuencia en general, y explicamos la rúbrica para el examen final.

Última sesión. Para finalizar la secuencia, aplicamos el examen final. Este examen consiste en un cuestionario escrito con cinco preguntas relacionadas con los tres objetivos abordados durante la secuencia didáctica, para determinar los avances en el proceso de aprendizaje de los escolares.

5. Diseño de análisis de datos

Con el propósito de reducir la cantidad de información por analizar, elaboramos plantillas para resumir los datos y recogemos información de un grupo de seis estudiantes. Utilizamos parrillas de registro para hacer el seguimiento a los escolares, de acuerdo con el orden de las tareas dentro de la secuencia. Presentamos estas parrillas en el anexo 11. También, diseñamos una parrilla para recolectar y analizar la evolución de cada uno de los estudiantes durante la realización de las tareas de la secuencia. Esta parrilla permite comparar los caminos de aprendizaje previstos con los caminos de aprendizaje desarrollados por los escolares; registrar las capacidades y competencias que los escolares pueden activar, y la actuación del docente. Pensamos tener en cuenta la información que se recoja y analice para posibles modificaciones al diseño de la unidad didáctica. En la figura 5 mostramos un ejemplo de uso de la parrilla para la recolección de datos sobre capacidades y competencias. Para cada alumno se registran las capacidades que activa en la tarea, su contribución a las competencias y el registro de observaciones generales.

Alumnos	Competencias	Capacidad							Observaciones generales					
		C ₁₄	C ₁₀	C ₂	C ₄	C ₆	C ₁₅	C ₁₁	Errores					
Alumno 1. NB	PR									Se puede inferir que siguió el camino previsto, aunque no hay evidencia de las capacidades C ₁₀ y C ₁₅ , es decir, no aparece identificación de datos conocidos y/o desconocidos, ni del análisis del procedimiento de la solución de la ecuación lineal de primer grado.				
	C													
	LS													
	M													
	R													
Alumno 2. AQ	PR									El estudiante soluciona los dos primeros apartados. Se infiere que él usa la capacidad (C7: Realiza cálculos matemáticos mentalmente), porque no plasma en el papel las operaciones realizadas.				
	C													
	LS													
	M													
	R													
Alumno 6. FJ	PR									En los otros, presenta una respuesta numérica acertada, pero sin procedimientos y argumentos.				
	C													
	LS													
	M													
	R													
Alumno 4. QJ	PR									Aborda la solución de los dos primeros apartados pero al llegar a C ₄ no opera correctamente números enteros.				
	C													
	LS													
	M													
	R													

Figura 5. Parrilla de recolección de datos de capacidades y competencias

4. Justificación del diseño de la unidad didáctica

En este apartado justificamos el diseño de la unidad didáctica teniendo en cuenta diferentes perspectivas. Entre estas perspectivas encontramos la curricular; el contexto institucional; las expectativas de aprendizaje; las limitaciones, dificultades y errores; la finalidad y complejidad de las tareas, los recursos y materiales, y el seguimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Desde la perspectiva curricular, consideramos que la unidad didáctica es coherente con el estándar seleccionado, el tipo de pensamiento variacional, el tema de estudio y el grado para el cual se diseñó. El currículo colombiano es trascendental al momento de seleccionar el foco de contenido. Por lo tanto, para nosotros, como docentes, era fundamental que lográramos establecer la estructura conceptual y procedimental del tema, y a partir de esa estructura conceptual, organizar el análisis fenomenológico. Este análisis nos permitió contextualizar significativamente el tema por medio de algunas tareas específicas. Dichas tareas fueron seleccionadas cuidadosamente para que contribuyeran al logro de los objetivos, las competencias, las capacidades y los caminos de aprendizaje previstos para cada una de ellas.

Teniendo en cuenta la perspectiva del contexto institucional, el análisis que realizamos de la ubicación de la institución, la metodología empleada, los recursos encontrados en él, la organización de las clases y las características de los escolares en relación con sus conocimientos previos ha sido pertinente. Por medio de la unidad didáctica hemos respondido a las necesidades de los estudiantes y al entorno donde estudian. El diseño de las tareas fue pertinente con la realidad, ya que enriquecimos estas tareas con diferentes tipos de agrupamiento y de comunicación entre los escolares, con recursos tecnológicos y manipulativos, y con ejercicios de mecanización.

Consideramos que la secuencia de las tareas contribuye al logro de los tres objetivos planteados. Además, la ubicación de las tareas dentro de la secuencia fue estratégica, porque facilita el aprendizaje progresivo del tema hasta alcanzar las expectativas de aprendizaje propuestas. Si analizamos la unidad didáctica desde la perspectiva de las limitaciones, dificultades y errores, encontramos que se hizo un análisis detallado de las tareas en cuanto a la previsión de los posibles errores y dificultades en los que podrían incurrir los estudiantes al momento de abordarlas. Por ello, planificamos varios modos de actuación que nos permitirían prever diferentes formas de ayudas no rutinarias a los estudiantes, para optimizar su aprendizaje, bien fuera entre pares o con el docente, y de forma individual y colectiva.

Analizamos y tuvimos en cuenta diferentes aspectos relacionados con la finalidad y complejidad de las tareas dentro de la secuencia didáctica. Las tareas planificadas para desarrollar en los diferentes momentos (inicio, intermedio y de finalización) son pertinentes, porque se realimentan entre sí y permiten que el estudiante avance en el estudio del tema. Además, cada tarea tiene una función específica en el proceso de aprendizaje de los escolares. Dichas funciones pueden ser de exploración; apropiación (reglas básicas del lenguaje algebraico); reconocimiento de aprendizajes previos; motivación; exploración; fomento de la interrogación y cuestionamiento; ejercitación de procedimientos y destrezas; y síntesis. Seleccionamos los recursos y materiales de acuerdo con las características del contexto educativo y de las tareas planificadas en la secuencia didáctica. Consideramos importantes los recursos dentro del diseño e implementación de la unidad didáctica, y por medio de su uso dinamizamos el proceso de enseñanza-aprendizaje, procurando mantener la atención y motivación de los estudiantes durante los diferentes momentos de la clase.

El diseño del seguimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje es pertinente, porque, a partir de la elaboración de los diferentes instrumentos para la recolección de información, pudimos registrar detalladamente los aciertos y desaciertos que los estudiantes pudieran presentar al abordar las tareas planificadas. Para finalizar, consideramos que la forma de evaluación que proponemos para hacer el seguimiento a los procesos de aprendizaje de los escolares contribuye significativamente en la consecución de la cultura de la autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación. Por ejemplo, por medio del uso de las rúbricas, los estudiantes pueden conocer con anterioridad los aspectos en los que van a ser evaluados y el nivel de exigencia para alcanzar determinada valoración, de acuerdo con su desempeño.

5. Descripción de la implementación

En este apartado describimos lo sucedido durante la implementación de la unidad didáctica en la Institución Educativa Departamental Pompilio Martínez, del municipio de Cajicá. Para ello, presentamos las sesiones de la secuencia didáctica tal como sucedieron, teniendo en cuenta las modificaciones menores y significativas realizadas al diseño original en cada una de las sesiones. Las modificaciones menores son aquellas que aplicamos durante la puesta en práctica de la unidad didáctica y que no tuvieron una trascendencia notable en el diseño, y que, por tanto, no implicaron cambios profundos en este; por ejemplo,

alteraciones en los tiempos y modificaciones en los agrupamientos. Las modificaciones significativas son aquellas en las que el profesor tuvo que tomar decisiones que alteraron la unidad didáctica, como introducir o eliminar tareas o instrumentos de evaluación (Lupiáñez, 2011).

Nosotros planeamos la implementación para 10 sesiones de clase, teniendo en cuenta que la prueba diagnóstica estuvo fuera de ellas, al igual que el examen final. Denominamos estas dos sesiones como sesión cero y última sesión, respectivamente. A continuación, describimos la implementación de las sesiones.

1. Sesión cero

Iniciamos la sesión con la aplicación de la prueba diagnóstica. Entregamos a los estudiantes una hoja para que ellos la respondieran en un lapso de 45 minutos. Luego, en un tiempo adicional, realizamos la realimentación de los resultados. Tuvimos que emplear más tiempo del previsto, porque detectamos varias deficiencias en los conocimientos previos de los estudiantes.

2. Sesión uno

Comenzamos esta sesión con la socialización del diseño de la unidad didáctica en el gran grupo. En esta socialización incluimos objetivos, sesiones y capacidades que los estudiantes debían haber desarrollado al finalizar la implementación. Posteriormente, entregamos a los estudiantes una impresión del diseño, para así dar inicio con la tarea El dinero correspondiente al primer objetivo. Los estudiantes debían analizar esta tarea individualmente y luego discutirla con otro compañero. Cinco minutos antes de finalizar la clase entregamos los diarios del alumno, para que cada uno de ellos lo diligenciara. Habíamos previsto una hora de clase para esta sesión. El tiempo no fue suficiente y hubo necesidad de modificar la duración. De ahí que empleáramos treinta minutos más, a causa de las dificultades de los estudiantes al momento de traducir el lenguaje verbal al algebraico, y viceversa. A partir de este momento, toda la secuencia didáctica sufrió cambios en relación con el tiempo.

3. Sesión dos

Entregamos a los estudiantes la tarea Edades antes, ahora y después en forma impresa. Sin embargo, ellos plantearon varias preguntas para las que ellos mismos encontraron las respuestas. Sin embargo, los estudiantes no lograron

resolver completamente la tarea. Faltando 5 minutos para el final de la sesión, entregamos la hoja de diario del estudiante para poner, entre otras, sus dudas respecto al tema visto. Esta tarea sufrió modificaciones significativas, por la recurrencia de dificultades presentadas debido a su complejidad. Además de traducir del lenguaje verbal al algebraico, los estudiantes debían establecer relaciones entre las distintas edades, al adicionar, sustraer y dividir cantidades enteras según el caso. Por ello, fue necesario incluir una nueva explicación y asignar otras tareas cortas con características similares que ayudaran al alcance de las expectativas que estaban relacionadas con este objetivo. Esta modificación contribuyó en gran medida a superar las falencias, hecho que fue evidente en el tipo de análisis y uso que hicieron los estudiantes de las ecuaciones en las siguientes tareas, en las del objetivo tres, y en el examen final, donde pusieron en juego nuevamente estas capacidades.

4. Sesión tres

Iniciamos esta sesión dando la oportunidad a tres estudiantes de que expresaran las dudas manifestadas en el diario del estudiante. Ellos manifestaron la dificultad para comprender el enunciado de la tarea. Después de esto, hicimos una recapitulación sobre los aspectos por tener en cuenta para comprender expresiones en lenguaje simbólico. Posteriormente, entregamos la tarea Traducción, en la que se debía pasar del lenguaje verbal al algebraico. Esta tarea sufrió una modificación menor, porque tan solo necesitamos un poco más de tiempo para su realización.

5. Sesión cuatro

Presentamos en el gran grupo el segundo objetivo y explicamos a los estudiantes la manera de acceder y utilizar la balanza virtual. Después, nos trasladamos a la sala de informática, para que, en grupos de tres estudiantes por computador, ingresaran a unos enlaces que les suministramos⁵. En estas páginas web, los estudiantes encontraron diferentes ejercicios en los que debían resolver ecuaciones lineales con una incógnita por el método algebraico. La clase finalizó con el diligenciamiento del diario. Esta sesión sufrió modificaciones menores relacionadas con el tiempo necesario para la incorporación del video demostrativo que explicaba el uso del recurso tecnológico.

⁵ Véase <http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=102> y http://nlvm.edu/es/nav/frames_asid_324_g_3_t_2.html?open=instructions&from=topic_t_2.html.

6. Sesión cinco

Al comienzo de esta sesión, socializamos las percepciones de los estudiantes frente a la tarea anterior. En esta oportunidad, ellos manifestaron su agrado con el aprendizaje de la solución de ecuaciones lineales. Seguidamente y en el gran grupo, presentamos la rúbrica de la tarea Resolver, como instrumento para evaluar los aprendizajes de los escolares. Luego, presentamos al gran grupo el material didáctico Pista algebraica, esencial para su solución. El agrupamiento que empleamos fue el de pequeño grupo, donde cada integrante llevaba una bitácora para evidenciar el proceso de la solución de las ecuaciones que le correspondieran durante el tiempo de aplicación del material. Al finalizar el tiempo de la sesión, los estudiantes diligenciaron el diario. Las modificaciones realizadas a esta sesión fueron significativas, porque se presentaron dificultades cuando los estudiantes encontraron ecuaciones con números fraccionarios. Esta situación exigió una explicación del tema en el gran grupo. Este fue un cambio respecto a la dinámica prevista para la clase; por ello, desarrollamos algunas de las ecuaciones en el tablero, paso a paso. Además, propusimos tareas de refuerzo para la casa similares a las planteadas en el material (que no estaban contempladas en la planificación).

7. Sesión seis

Las dudas manifestadas por los escolares en el diario se referían a algunos de los ejercicios extraclase. Por ello, aprovechamos el tiempo de socialización para solucionarlas en el gran grupo. Luego, instalamos el *software* Clic 3.0 y presentamos la tarea Creatividad. La sesión terminó con el diligenciamiento del diario. Esta sesión sufrió modificaciones menores en cuanto al cambio del material, porque el previsto no funcionó. Aprovechando que la clase se desarrollaba en el aula de informática, procedimos a cambiarlo, y dimos las instrucciones para usar uno de internet (Álgebra con papas). Esta decisión fue acertada para el propósito de identificar equivalencia entre ecuaciones lineales.

8. Sesión siete

Iniciamos esta sesión con la presentación del tercer objetivo. Después, entregamos a los estudiantes la fotocopia con la tarea Jaime. Ellos leyeron la tarea y la analizaron individualmente. Después les hicimos algunas preguntas orientadoras que contribuyeron a su entendimiento. Por ejemplo, “¿cómo se escriben algebraicamente los números consecutivos?”. Luego, los estudiantes

compartieron en pares sus respuestas. La sesión terminó con la socialización en el gran grupo. Los estudiantes diligenciaron el diario del alumno. Esta sesión fue la única que no sufrió ninguna modificación respecto a la planificación.

9. Sesión ocho

Iniciamos la sesión con la puesta en común de las dudas de la clase anterior. En seguida, explicamos el recurso por usar en la tarea Canicas. Luego, nos desplazamos al patio del colegio para jugar al Cucunubá en grupos de cuatro estudiantes. Cada estudiante tomó los puntajes que tenía cada compañero en sus respectivos turnos. Terminada esta acción, regresamos al salón y les entregamos la tarea propiamente dicha para que cada grupo la resolviera. Posteriormente, entregamos el material Las fichas de colores como apoyo en la solución de los cinco apartados del problema. Habíamos previsto esta tarea para una hora. La modificación de esta sesión fue menor, porque adicionamos sesenta minutos para el desarrollo total de la tarea con el uso del recurso y material didáctico.

10. Sesión nueve

Encontramos que entre las cosas por mejorar de la sesión anterior, el tiempo no se debía limitar, para que el uso del recurso y del material fuera efectivo. Por ello, se amplió el tiempo para la actividad. Después, presentamos la tarea Longitud y finalizamos la sesión con el diligenciamiento del diario. Hemos considerado la modificación que sufrió esta sesión como significativa. Debido a sus características, tuvimos que explicar la multiplicación de polinomios y asignar ejercicios rutinarios que se trabajaron en clase para afianzar el algoritmo. No previmos esta circunstancia, porque al momento de la planificación creímos que alcanzábamos a estudiar las operaciones con polinomios antes de la implementación.

11. Sesión diez

En las reflexiones del diario percibimos que la explicación realizada del tema fue apropiada. Por ello, iniciamos la sesión con la tarea El depósito y terminamos con el diario del alumno. Dedicamos una hora más a esta tarea, porque los estudiantes manifestaron grandes dificultades. Por ello, tuvimos la necesidad de realizar varios ejercicios del tipo de grifos, para hacer énfasis en la comprensión de los planteamientos de problemas de este tipo. En consecuencia, la tarea propiamente dicha fue realizada por los estudiantes como actividad extraclase.

12. Última sesión

En esta sesión aplicamos el examen final. Los estudiantes dispusieron de sesenta minutos para contestarlo en forma escrita. Este examen consta de cinco preguntas relacionadas con los tres objetivos planificados en la unidad didáctica. La sesión fue desarrollada sin modificaciones.

6. Evaluación de la implementación

Una vez realizado el diseño y la implementación de la unidad didáctica, abordamos en este apartado su evaluación. Para ello, analizamos los resultados de logros de aprendizaje y actitudes de los escolares, el diseño propuesto y la actuación del profesor.

1. Evaluación de logros y del diseño

Para evaluar los resultados de logros de aprendizaje de los estudiantes, consideramos la prueba diagnóstica, las tareas El dinero y Edades del primer objetivo, y la tarea Canicas del tercer objetivo.

Con la aplicación de la prueba inicial diagnóstica, evidenciamos que los estudiantes no tenían conocimientos relacionados con el lenguaje verbal y algebraico. En el numeral 2, los escolares debían representar simbólicamente dos números enteros consecutivos con x y el doble de x . Treinta de ellos ni siquiera intentaron resolverlo, mientras que los seis restantes intentaron dar un resultado numérico, sin identificar la letra como incógnita y/o traducir enunciados algebraicamente. Por ejemplo, identificaron un número concreto y a este le sumaron uno; es decir: $35+1=36$ y $7+1=8$.

En las tareas del primer objetivo, los estudiantes debían representar mediante una expresión algebraica los enunciados de las tareas El dinero y Edades. En la tarea El dinero observamos que 33 de los 36 estudiantes lograron identificar la letra como incógnita sin ninguna dificultad en los tres apartados de la tarea; ocho estudiantes tradujeron algebraicamente en gran medida dos de los tres apartados de la tarea, reconociendo los datos conocidos y desconocidos; 25 estudiantes encontraron la relación medianamente, porque tradujeron acertadamente algunos de los apartados de la tarea, y en los otros, aunque identificaron datos conocidos y desconocidos, la representación algebraica no correspondía al enunciado. Por ejemplo, algunos estudiantes al escribir el doble del dinero más el triple de este es igual a \$7500, hicieron: $x + 2 + 3 + x = 7500$,

mientras que otros lo respondieron de la siguiente manera: $n^2 + n^3 = 7500$, tal como se evidencia en la figura 6 (ejercicio hecho por un estudiante).

$$\begin{aligned}
 n - 4000 &= \$2300 & \checkmark \\
 n^2 + n^3 &= \$1500 & \times \\
 \cancel{n^3} + n^5 &= \$1000 & \times
 \end{aligned}$$

Figura 6. Ejemplos de errores en la solución de la tarea El dinero

En la tarea Edades antes, ahora y después, los estudiantes debían plantear las ecuaciones a partir de un enunciado que presentara algunas relaciones entre edades de personas. Observamos que solamente dos estudiantes la tradujeron apropiadamente. Ellos realizaron una buena interpretación de los enunciados, relacionaron acertadamente letras como incógnitas, establecieron relaciones aritméticas y plantearon las ecuaciones adecuadamente. Seis estudiantes realizaron procesos parciales, porque identificaron solamente las relaciones donde había que aumentar o disminuir una cantidad, así: “Ángel tiene 3 años más que Pedro”, y en las otras traducciones incurrieron en errores; por ejemplo, al establecer relaciones aritméticas en lugar de poner el signo más (+), ponen el signo menos (-); al escribir el doble de x , escriben x^2 . Observamos que pocos estudiantes abordaron la tarea en su totalidad, porque de los 36 estudiantes, 28, además de incurrir en errores como los anteriores, resolvieron una mínima parte de la tarea. En la figura 7 se evidencian algunos de estos errores.

	Ángel	Sandra	Pedro	Julián
Hace dos años	$1 + p = a$ ✓	$P - 5 = S$ X	$x - n = P$?
Actual	$3 + p = a$	$P - 5 = S$	$x - n = P$	$x^2 = 5$ X
Dentro de cinco años	$3p + p = A$	$P - 10 = S$	$x + 1 = P$	$x^2 = x^5$ X

Figura 7. Ejemplos de errores en la solución de la tarea Edades

Después de analizar los logros de aprendizaje de los escolares desde lo previsto en el primer objetivo, presentamos un análisis desde la perspectiva de los caminos de aprendizaje y la contribución a las competencias de las tareas seleccionadas previamente. Para estas dos tareas previmos el camino de aprendizaje de la figura 8, que incluía los posibles errores en los que podrían incurrir los escolares.

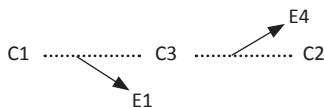


Figura 8. Camino de aprendizaje de una tarea seleccionada

Este camino de aprendizaje fue ejecutado por la gran mayoría de los estudiantes, aunque tuvieron dificultades con la capacidad C_2 . Sin embargo, las dificultades no impidieron que los escolares desarrollaran las competencias previstas con estas tareas. Esas competencias eran representar y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones. En estas dos tareas los estudiantes lograron utilizar cualquier letra como incógnita para hacer representaciones en lenguaje verbal y/o simbólico.

Para finalizar la evaluación de las tareas, hemos considerado la tarea Canicas correspondiente al tercer objetivo. En esta tarea presentamos a los estudiantes seis enunciados que debían pasar del lenguaje natural al algebraico y plantear la ecuación correspondiente, para luego resolverla. Pudimos observar que seis estudiantes realizaron todos los enunciados de la tarea correctamente (figura 9), puesto que consideraron acertadamente las letras como incógnitas, encontraron las relaciones aritméticas que se daban y, plantearon y solucionaron las ecuaciones sin incurrir en ningún error.

SOLUCIÓN

a. $3x + 1 = 10$ RTA: DIANA OBTUVO 3 PUNTOS.

$$\begin{aligned} 3x + 1 - 1 &= 10 - 1 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{9}{3} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

b. $2x + 2 = 12$ RTA: JUAN OBTUVO 5 PUNTOS MÁS QUE DIANA.

$$\begin{aligned} 2x + 2 - 2 &= 12 - 2 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{10}{2} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

c. $\begin{array}{r} 10 \\ + 5 \\ \hline 15 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \\ + 12 \\ \hline 15 \end{array}$ NO HAY DIFERENCIA PORQUE ACUERDARON IDÉNTICOS

d. $2x + x + 1 + 2x + 2 = 30$

$$\begin{aligned} 5x + 3 &= 30 \\ 5x &= 30 - 3 \\ 5x &= 27 \\ x &= 5,4 \end{aligned}$$

Figura 9. Ejemplo de solución de la tarea Canicas

Por otro lado, encontramos que 18 de los 36 estudiantes plantearon las ecuaciones de los tres primeros ítems, porque tradujeron correctamente al lenguaje algebraico el enunciado: “En el segundo turno, Diana obtuvo 12 puntos que corresponden al doble de lo que obtuvo Juan más dos ¿cuántos puntos menos obtuvo Juan?”. Sin embargo, los estudiantes presentaron dificultades en el cuarto enunciado, al tener que hacer otras consideraciones. Por ejemplo, si el problema se cambia al ampliar el número de huecos de 1 a 9 y se considera que un jugador obtuvo 30 puntos y acertó a tres números consecutivos, insertando en el hueco del número mayor dos canicas y en el hueco del número menor también dos, y se pregunta ¿en cuáles huecos acertó? Este análisis nos permitió evidenciar que los estudiantes presentan dificultades cuando se les pide que realicen la traducción y establezcan relaciones con alguna información adicional (en el caso de ampliar el número de huecos).

Por otra parte, 13 estudiantes lograron establecer alguna relación entre los lenguajes, pero los errores son más notorios, porque, a pesar de reconocer la incógnita, cuando tratan de establecer un vínculo entre el enunciado y la expresión algebraica, esta no es consecuente con lo que se pide. Solo un estudiante no logró realizar ningún tipo de relación.

Después de hacer este análisis a partir de la tarea Canicas y desde lo previsto para el tercer objetivo, mostramos en la figura 10 el camino de aprendizaje que previmos para la solución de dicha tarea.

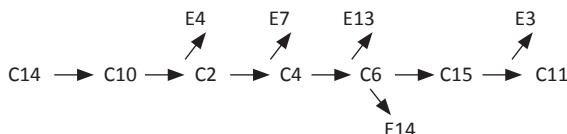


Figura 10. Camino de aprendizaje previsto para la tarea Canicas

Este camino de aprendizaje fue ejecutado por la mayoría de los estudiantes, con algunas excepciones, como las que se presentan en la tabla 10.

Tabla 10
Caminos de aprendizaje ejecutados por algunos alumnos en la tarea Canicas

Alumno	Camino de aprendizaje
1	C ₁₄ — C ₂ — C ₆ — C ₄ — C ₆ — C ₄ — C ₁₁
2	C ₁₄ — C ₂ — C ₇ — C ₆ . Responde 2 de los 5 apartados de la tarea

Alumno	Camino de aprendizaje
3	No hay evidencia del desarrollo de la tarea
4	$C_{14} - C_2 - C_6 - C_4 - C_6 - C_4 - C_{11}$
5	$C_{14} - C_{10} - C_{11}$
6	Responde 2 de los 5 apartados de la tarea.

Esta tarea incluía el uso del recurso el Cucunubá y el material fichas de colores. Evidenciamos que los estudiantes mostraron agrado al manipularlos, porque estuvieron motivados durante el desarrollo de la tarea, no se distrajeron y cada uno de ellos intentó resolver el ejercicio en forma individual, a pesar de que el juego implicaba un grupo para desarrollarse. Por otra parte, este recurso ayudó a los escolares a entender las situaciones que presentábamos en el enumerado (conceptos y procedimientos para solucionar algebraicamente las ecuaciones lineales planteadas en cada apartado), y les permitió aplicar estrategias para resolver problemas. Este hecho también se observó en la autoevaluación del aprendizaje.

Podemos afirmar que, en términos generales, los escolares mostraron cambios significativos en aspectos actitudinales. Por ejemplo, se evidenció un incremento de la responsabilidad en el proceso de aprendizaje. Estos cambios fueron evidentes cuando les dimos a conocer y analizamos los resultados obtenidos en las rúbricas de las tareas Resolver y Canicas. Evidenciamos la valoración y descripción de su proceso de aprendizaje en cuanto a la evolución en el uso del lenguaje verbal en relación con el algebraico y la resolución de ecuaciones.

Además, el ambiente dentro de las clases de matemáticas mejoró significativamente. Al finalizar la implementación de la unidad didáctica, los estudiantes se escuchaban y respetaban las opiniones de sus compañeros durante las discusiones. Esto se pudo observar en la autoevaluación del aprendizaje, en la que respondían preguntas que daban muestra de estas actitudes (figura 11). Por ejemplo, en el ítem “Ayudo a mis compañeros si les cuesta comprender”, la mayoría de los estudiantes contestó “Siempre”. Este cambio también se reflejó en la medida en que trabajaron de manera ordenada y coherente para alcanzar los objetivos del tema, y que preguntaban al docente o a otro compañero cuando no entendían alguna parte de la tarea.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL POMPILIO MARTINEZ ÁREA DE MATEMÁTICAS ANEXO B AUTEOVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA						
<u>ESTUDIANTE: Brayan Antonio Nieto Rodríguez</u>						
ASPECTOS	ACUERDOS	Nunca	Algunas veces	Casi siempre	Siempre	
ACTITUD Y LIDERAZGO	Sé respetar las opiniones de los demás					X
	Ayudo a mis compañeros y compañeras, si les cuesta comprender					X
	Me pongo nervioso(a) cuando algo no sale bien				X	
	He trabajo de manera ordenada y coherente para alcanzar los objetivos del tema				X	
	Diligencio el diario del estudiante con un criterio crítico y objetivo				X	
APRENDIZAJE	Me indago constantemente, ¿el para qué de lo que aprendo?					X
	Me preocupo por aprender algo nuevo en cada clase					X
	Consulto y realizo actividades complementarias al tema				X	
	El conocer el propósito del tema o la actividad al inicio de la clase me sirve para tener una idea global de lo que voy a aprender				X	
	Cuando manipulo materiales y recursos aprendo mejor				X	
	Entiendo los conceptos y/o procedimientos desarrollados en las clases				X	
	Aplico estrategias para resolver ejercicios y problemas con ecuaciones lineales de primer grado				X	
	Pregunto cuando no entiendo (docente-compañero)				X	
	Realizo las actividades propuestas por el docente				X	
	Me intereso por aprender a usar el material y los recursos que el profesor trae a la clase				X	
Entiendo las explicaciones del profesor				X		
Observaciones	generales:					
<hr/> <hr/> <hr/>						

Figura 11. Ejemplos de autoevaluación del aprendizaje

2. Evaluación del diseño

Las modificaciones realizadas al diseño de la unidad didáctica fueron pertinentes y acordes con el contexto educativo, porque ayudaron a solucionar oportunamente las dificultades de tipo conceptual y procedimental de los escolares

durante de la implementación. Al realizar las modificaciones, constatamos que el estudiante mostraba un desempeño que favorecía su aprendizaje y daba muestras de que habíamos elegido una buena opción para cada uno de los obstáculos que se fueron presentando.

Aumentamos el tiempo para el desarrollo de la mayoría de actividades, porque constatamos que necesitábamos optimizar el uso de los recursos y materiales incluidos en algunas tareas. Por ejemplo, en la tarea Longitud, dimos una explicación no prevista sobre multiplicación de polinomios antes de su resolución. Por otro lado, la modificación de algunas formas de agrupamiento nos dio la posibilidad de aprovechar al máximo las socializaciones en el gran grupo. De esta forma, los estudiantes pudieron aclarar dudas con la ayuda de sus compañeros y la docente.

Observamos que solamente 2 de 36 estudiantes lograron desarrollar el último punto del examen final. Por lo tanto, hicimos una revisión del examen, donde evidenciamos que los estudiantes no lo lograron trabajar por su complejidad y porque durante la implementación no se abordaron problemas de este tipo (anexo 12).

3. Evaluación de la actuación del profesor

Para revisar la actuación del profesor tuvimos en cuenta la evaluación de la enseñanza (figura 12), en la que los estudiantes manifestaron agrado en aspectos como la presentación de los contenidos con claridad, la aclaración de dudas en clase y la utilización de diversas estrategias para evaluar el aprendizaje. Creemos que esto se debe a que los estudiantes no habían empleado las rúbricas para regular su propio proceso de aprendizaje y comprender claramente la valoración obtenida por su desempeño durante la tarea. Consideramos que introducir este esquema de evaluación fue un acierto.

Además, resaltamos aspectos como la diversidad en las tareas —ya que no fueron de tipo rutinario, sino que les implicaban retos—; la inclusión de materiales y recursos para el desarrollo de algunas tareas —porque el docente se apoyó en estos en procura de facilitar el aprendizaje al escolar—; y la forma de agrupamiento que propusimos dentro de la clase —ya que casi siempre lo realizábamos en pares, generando espacios para la discusión en el gran grupo después del trabajo—. Además, el profesor pudo favorecer el aprendizaje de los escolares, y al estudiante le resultó importante conocerse a sí mismo en su actividad matemática y prestar ayuda a su compañero, contribuyendo así en el dominio progresivo de la autorregulación del aprendizaje y la autonomía.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL POMPILIO MARTINEZ
ÁREA DE MATEMÁTICAS
ANEXO C
EVALUACIÓN DE LA ENSEÑANZA
ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Estimado(a) estudiante, tu opinión acerca de la forma como el profesor organiza, desarrolla y evalúa el curso es muy importante para nuestra institución educativa. A continuación se presentan una serie de aspectos relevantes en este sentido, para que valore el desempeño del docente con la mayor objetividad posible, marcando con una equis (X) frente a cada aspecto la respuesta que mejor represente tu opinión.

1. El profesor entregó el programa de la asignatura al inicio del curso

Si No

Nunca	Algunas veces	Casi siempre	Siempre
-------	---------------	--------------	---------

EL PROFESOR

2. Presenta los temas con mucha claridad
3. Comunica claramente los objetivos de cada clase
4. Responde las dudas de los estudiantes en clase
5. Expresa expectativas positivas de los estudiantes
6. Explica los criterios de evaluación de la asignatura
7. Utiliza diversas estrategias para evaluar los temas
8. Las actividades y tareas asignadas por el maestro son interesantes y de fácil entendimiento
9. Atiende dudas académicas de los estudiantes fuera de clase
10. Realiza actividades de refuerzo con estudiantes que lo necesitan
11. Indica normas de comportamiento en clase claras para todos
12. Es respetado por todos los estudiantes del curso
13. Realiza clases activas y dinámicas
14. Informa a padres de familia y acudientes sobre el desempeño de los estudiantes
15. El docente da a conocer el propósito de los temas o actividades al inicio de la clase
16. Las dudas o inquietudes son respondidas a tiempo
17. ¿Cuáles de los siguientes recursos usa el profesor para desarrollar sus clases?

		X X	X X

Tablero
 Computadores
 Libros de texto
 Programas educativos computarizados

Películas y videos
 Diapositivas o acetatos
 Laboratorios
 Mapas

Láminas y otros materiales gráficos
 Música
 Otros
 Cuales

¡Gracias por tu tiempo!

El propósito de la evaluación no es comprobar, sino mejorar

Figura 12. Evaluación de la enseñanza

7. Balance de la experiencia y propuesta para el futuro

Con base en los análisis de la planificación e implementación de la unidad didáctica, nos fue posible identificar aciertos y desaciertos en nuestro trabajo. Por lo tanto, podemos hacer un balance de los aspectos que incluye el análisis DAFO como estrategia evaluativa, ya que identificamos y describimos los elementos positivos y negativos en los ámbitos interno y externo que han influido en el diseño y puesta en práctica de la unidad didáctica. A continuación describimos cada uno de ellos.

1. Presentación del análisis DAFO

El análisis DAFO se centra en la descripción de los elementos positivos y negativos de un objeto de estudio, tanto en el ámbito interno como el externo, en relación con las metas que este persiga y con los recursos de los que se disponga. Este análisis se articula en torno a cuatro dimensiones: debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades.

1. *Debilidades*

El equipo constató las siguientes debilidades de la unidad didáctica:

Nivel propuesto. Las expectativas de progreso esperado fueron demasiado altas. No fuimos realistas al considerar la profundidad de los conceptos requeridos de otros grados, la complejidad de algunos puntos del examen final y la dificultad de los enunciados de algunas tareas de la secuencia.

Tiempo. No tuvimos en cuenta el tiempo que realmente requeríamos para la manipulación de algunos recursos y materiales didácticos, y el diligenciamiento de los instrumentos por parte del docente durante la clase.

Conocimientos previos. No previmos correctamente los conocimientos previos de los estudiantes (evidencia tomada de la prueba diagnóstica). No previmos que algunos estudiantes manifestarían falta de compromiso e interés.

Instrumentos para actitudes. Aunque diseñamos varios instrumentos para recoger y evaluar el logro de las expectativas de aprendizaje, no diseñamos instrumentos para el análisis de los aspectos actitudinales de los escolares.

2. *Amenazas*

El análisis del diseño y la implementación permitió establecer las siguientes amenazas:

Falta de acompañamiento de los padres de familia a los escolares en actividades académicas. Por las ocupaciones laborales y, en otros casos, por la escasa formación académica, los padres no dedican suficiente tiempo para acompañar a sus hijos en la resolución de las tareas.

Ambiente de aprendizaje en el aula de clase. El número de estudiantes es alto y algunas veces ello fomenta la indisciplina, impidiendo el desarrollo armonioso de la actividad académica.

Calidad académica. Algunos estudiantes presentan repetencia y otros deben logros de años anteriores.

3. Fortalezas

Se destacan las siguientes fortalezas:

Conocimiento del contexto escolar. Nuestro conocimiento del contexto nos permitió proponer un diseño adaptado a él.

Talento humano. Los docentes de la institución cuentan con buena disposición para el trabajo colaborativo.

Pertinencia de la unidad didáctica. El tema que desarrollamos es coherente con el plan de estudio institucional para el grado octavo y el periodo académico aplicado.

Instrumentos para la evaluación. Los instrumentos de evaluación que diseñamos se adaptan al sistema de evaluación institucional.

Agrupamiento de los escolares. El agrupamiento fue acorde con la metodología institucional y promovió el trabajo colaborativo.

Acceso a material didáctico. El material fue suficiente para los escolares y fortaleció el trabajo en el aula.

Prueba diagnóstica. La prueba permitió identificar los conocimientos previos de los escolares.

4. Oportunidades

La realización de este trabajo trajo consigo un buen número de oportunidades que relacionamos a continuación:

Ubicación de la institución educativa. Por estar en el sector urbano, la Institución Pompilio Martínez tiene mayor asignación de recursos y posibilidades de capacitación y actualización de los docentes.

Comunicación del trabajo. La integración del área de matemáticas con docentes de básica primaria, secundaria y media permite realizar un estudio de análisis de unidad didáctica para iniciar procesos de transformación de la enseñanza en la institución.

Metodología. Podemos dar a conocer y poner en práctica una metodología más estructurada para realizar una planificación de un tema de las matemáticas escolares.

Equipo de trabajo especializado. Se cuenta con el apoyo de docentes de matemáticas para planificar y diseñar la unidad didáctica.

Directivas de la institución educativa. Las directivas estuvieron dispuestas a apoyar y facilitar los recursos disponibles para implementar la unidad didáctica.

2. Propuestas para corregir las debilidades y amenazas

Proponemos algunas mejoras del diseño de la unidad didáctica a partir de las debilidades que hemos identificado. Después, proponemos un nuevo diseño de la unidad didáctica. Estas son las modificaciones del diseño.

Refuerzo académico. Hacer un refuerzo previo de las operaciones con números enteros y racionales.

Planificación de la unidad didáctica. Debemos tener en cuenta los conocimientos previos de los escolares a la hora de realizar la planificación de las tareas y demás actividades por desarrollar durante la implementación.

Reducción de actividades. Debemos reducir el número de tareas en la puesta en práctica para profundizar más en algunos conceptos y procedimientos del tema. Debemos constituir un banco de tareas para el trabajo extraclase.

Materiales y recursos. Al momento de seleccionar los materiales y recursos para la secuencia, se debe analizar tanto el nivel de complejidad en cuanto al tiempo para su manipulación en el aula por parte de los docentes y alumnos, como la utilidad para profundizar el tema de estudio.

Instrumentos de evaluación. Debemos definir claramente los instrumentos de observación y de evaluación, buscando optimizar su diligenciamiento por parte del docente durante la clase.

De igual manera, para contrarrestar las amenazas, hemos identificado algunas acciones.

Escuela de padres. Proponemos aprovechar el espacio que ofrece la escuela de padres y el departamento de psicoorientación, para realizar charlas, proyección de películas educativas, entre otros, que lleven a que los padres de familia se sientan comprometidos con el proceso educativo de sus hijos.

Psicorientador. Proponemos remitir al psicoorientador a aquellos estudiantes que presenten dificultades académicas y/o disciplinarias.

Servicio social. Sugerimos proyectar el servicio social (grados décimo y undécimo) con estudiantes que tengan buen dominio en el área, para que, por medio de asesorías individuales, contribuyan a superar las falencias conceptuales y procedimentales de los estudiantes que presentan dificultades.

Instrumento actitudinal. Nos proponemos diseñar un instrumento que le sirva al docente para recopilar información sobre las actitudes de los escolares.

La propuesta de mejora incluye también el hecho de poder potencializar las fortalezas con las que se cuentan para mejorar la unidad didáctica. Consideramos las siguientes cuestiones:

Trabajo en equipo. Proponemos potenciar la experiencia docente junto con la disposición del trabajo colaborativo, para diseñar estrategias que ayuden a superar las dificultades que se presenten durante el ejercicio escolar.

Materiales. Sugerimos motivar el uso de los materiales y recursos que se encuentran en la red, en el medio y en la institución, con el propósito de dinamizar el trabajo en el aula.

3. Propuestas para un nuevo diseño

De acuerdo con lo descrito en el apartado anterior, proponemos algunas modificaciones al diseño original de la unidad didáctica de ecuaciones lineales. Basamos esta propuesta en dos aspectos que describimos a continuación.

1. Número de sesiones y tiempo para cada una de ellas

Proponemos mantener las tareas correspondientes a los primeros dos objetivos. Introducimos cambios en las tareas correspondientes al tercer objetivo. Para este objetivo teníamos cuatro tareas, de las cuales suprimimos dos (Longitud y El depósito) y dejamos las otras dos (Jaime y Canicas). Consideramos que con estas tareas podemos optimizar el uso de recursos y materiales, y lograr que los estudiantes alcancen el objetivo propuesto. Por estas razones, proponemos un cambio en el número de sesiones para la implementación y ciertos ajustes en

la planificación de algunas tareas. La tabla 11 resume los cambios propuestos, atendiendo cada uno de los objetivos.

Tabla 11
Comparación entre el diseño original y la nueva propuesta

Actividades planificadas	Diseño original		Nueva propuesta	
	NS	T	NS	T
Prueba diagnóstica y realimentación de los resultados	1	60	2	120
Primer objetivo				
Presentación del objetivo 1 y exploración del material Lo tuyo y lo mío para la tarea El dinero	1	60	1	60
Presentación, solución y realimentación de la tarea El dinero			1	60
Presentación, y solución y realimentación de la tarea Edades, ahora, antes y después			1	60
Presentación, solución y realimentación de la tarea Traducción y solución de ejercicios rutinarios	1	60	1	60
Total para el primer objetivo	2	120	4	240
Segundo objetivo				
Presentación del objetivo 2; explicación y exploración del material tecnológico balanzas virtuales para la tarea La balanza	NA		1	60
Presentación, solución y realimentación de la tarea La balanza	1	60	1	60
Explicación y exploración del material tecnológico Álgebra con papas para la tarea Creatividad	NA		1	60
Presentación, solución y realimentación de la tarea Creatividad	1,5	90	1	60
Explicación para solucionar ecuaciones lineales con una incógnita con coeficientes fraccionarios y presentación del material Pista algebraica	NA		1	60
Presentación, solución y realimentación de la tarea Resolver	1,5	90	1	60
Total para el segundo objetivo	4	240	6	360

Actividades planificadas	Diseño original		Nueva propuesta	
	NS	T	NS	T
Tercer objetivo				
Presentación del objetivo 3; solución y realimentación de la tarea Jaime	1	60	1	60
Explicación y exploración del recurso Cucunubá y el material fichas de colores para la tarea Canicas		NA	1	60
Presentación; solución de la tarea Canicas, y realimentación de la tarea Canicas	1	60	2	120
Tarea Longitud	1	60		TE
Tarea El depósito				
Aplicación del examen final	1	40	1	60
Realimentación del examen final		PF	2	120
Total para el tercer objetivo	4	240	7	420
Total para la unidad didáctica	11	660	19	1140

NA: no se asignó tiempo, NS: número de sesiones, PF: por fuera de la secuencia, T: tiempo en minutos, TE: tarea eliminada.

En el nuevo diseño mantenemos el esquema de dejar la prueba diagnóstica fuera de las sesiones de la secuencia, pero proponemos aumentar el tiempo asignado, especialmente en lo relacionado con la socialización y realimentación de los resultados de los estudiantes. El diseño no sufre modificaciones en el primer objetivo respecto a las tareas planificadas. No obstante, nos centramos en tres aspectos: primero, proponemos no presentar inicialmente la secuencia en su totalidad a los estudiantes, para evitar confundirlos; proponemos presentar solo el primer objetivo. Segundo, no fraccionar las actividades entre sesiones, sino desarrollar una por sesión. Tercero, sugerimos asignar un tiempo específico para manipular el material didáctico Lo tuyo y lo mío, de tal forma que, al momento de presentar la tarea, el material realmente se constituya en una ayuda para la solución de la tarea.

Hacemos un cambio en el orden de las tareas Resolver y Creatividad correspondientes al segundo objetivo. Consideramos que, con el recurso tecnológico, tenemos una buena introducción para que los estudiantes solucionen

ecuaciones lineales con una incógnita. Otros cambios consisten en no usar Clic 3.0, porque corremos el riesgo de incompatibilidad al momento de instalarlo en los computadores, mientras que fácilmente se accede al recurso en línea Álgebra con papas. Proponemos diseñar la rúbrica para la tarea Creatividad en lugar de la tarea Resolver. De esta forma, el estudiante puede activar en mayor proporción las capacidades consideradas en la solución de ecuaciones lineales con una incógnita.

De acuerdo con la tabla 11, reiteramos que entre las razones que tenemos para eliminar las tareas Longitud y El depósito están los requerimientos de conocimiento extra que nos implican mayor tiempo y proporcionarles información de algunos temas que se encuentran posteriores al tema de ecuaciones lineales con una incógnita, según la programación del plan de estudios. Además, con la tarea Canicas, tenemos gran cantidad de apartados en los que planteamos situaciones para desarrollar desde diferentes perspectivas.

2. Modificaciones de contenido

Proponemos varias modificaciones para el desarrollo de las tareas del tercer objetivo. Estas modificaciones están dadas porque fuimos demasiado ambiciosos en nuestra pretensión de desarrollar algunas tareas como El depósito en 45 minutos, sin haber realizado ejercicios de tipo grifos con los estudiantes. Por otro lado, la tarea Longitud requería un tratamiento especial, en el que se explicaran, con anterioridad, operaciones con polinomios, tema que no habíamos desarrollado. Podemos utilizar esta tarea cuando estudiemos dicho tema. Proponemos plantear a los estudiantes la tarea El depósito como reto extraclasses y motivarlos a encontrar su solución con explicaciones fuera de la clase. En caso de que una mayoría de estudiantes acepten el reto, tomaríamos el tiempo necesario para darle solución y realizar la respectiva realimentación.

Para finalizar la unidad didáctica, propusimos un examen final con cinco apartados. Con el primer apartado pretendíamos evidenciar el alcance de los estudiantes del primer objetivo. Pero, tal como la presentamos, no es pertinente, pues es tan evidente que los estudiantes lo podían resolver por asociación. De igual manera, para establecer el nivel de aprendizaje respecto al objetivo relacionado con problemas que se resuelven con ecuaciones lineales con una incógnita, propusimos en el apartado cinco un problema que resultó un poco complejo para la mayoría de los estudiantes. Este problema requería contenidos y procedimientos que no se abordaron durante la planificación e implementación de la unidad didáctica. Por ello, replanteamos los enunciados 1 y 5 del examen final, los cuales quedaron así:

1. Traduce cada enunciado en una ecuación:

Un número más tres veces el mismo, es el doble de él	
La diferencia entre un número y tres veces él es 50	
Un número más el doble del número, más tres veces el mismo número es igual a 250	
La diferencia entre 320 y un número es dos veces el número	
Un número aumentado en 2, equivale al triple del mismo número	

5. Hay que repartir \$153.000 entre tres personas, de manera que la parte de la segunda sea el doble de la parte de la primera y la parte de la tercera sea el triple de la parte de la segunda. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada persona?

8. Conclusiones

En este apartado presentamos las conclusiones desde dos perspectivas. En la primera, exponemos un resumen de la unidad didáctica. En la segunda, compartimos las reflexiones que surgen del trabajo y experiencia en MAD.

1. Resumen

En este informe presentamos la planificación, implementación y evaluación de la unidad didáctica del tema ecuaciones lineales con una incógnita. Realizamos esta planificación con el apoyo de varios análisis: el de contenido, el cognitivo, el de instrucción y el de actuación. En cada uno de estos análisis consideramos aspectos importantes que permitieron realizar eficazmente dicha planificación.

En el análisis de contenido, seleccionamos y organizamos los conceptos y procedimientos relacionados con ecuaciones lineales con una incógnita, mostramos las distintas maneras en que podemos representarlos y, finalmente, identificamos y organizamos los campos de fenómenos relacionados con ellos. El análisis cognitivo surge a partir de la información que obtuvimos en el análisis de contenido, y en él abordamos el estudio y la organización de las expectativas (capacidades, objetivos y competencias), los caminos de aprendizaje y las limitaciones de aprendizaje (errores y dificultades). En el análisis de instrucción

seleccionamos para cada una de las tareas un material y/o recurso para la enseñanza de las ecuaciones lineales. Estos materiales o recursos fueron un medio facilitador y motivador del aprendizaje. Además, este análisis contribuyó a la organización y agrupamiento de los estudiantes durante la clase, la inclusión de los problemas y los procedimientos por seguir para el desarrollo de las diferentes tareas.

Este análisis también incluyó el modo de actuación del docente y de los escolares en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En el análisis de actuación diseñamos los instrumentos de evaluación de la unidad didáctica. Además, establecimos los procedimientos para recoger información y analizarla posteriormente. Estos instrumentos nos permitieron registrar las fortalezas y debilidades de los estudiantes. Cabe aclarar que con estos instrumentos no solo evaluamos el desempeño de los escolares, sino, también, la actuación del profesor.

Realizamos y justificamos esta planificación desde dos perspectivas: una curricular, en la que tuvimos en cuenta los lineamientos curriculares, y otra en la que atendimos el contexto socioacadémico de los estudiantes.

En este informe también presentamos con detalle lo que ocurrió durante la implementación de la unidad didáctica. Describimos paso a paso lo que sucedió en cada una de las 10 sesiones de clase. Las sesiones empezaron con el día cero, que incluyó una prueba diagnóstica, y terminó con un examen final, para evaluar los aprendizajes de los estudiantes. Finalmente, hemos realizado un balance de la planificación, implementación y evaluación. Proponemos un nuevo diseño que puede ser implementado por cualquier docente de matemáticas, realizando los ajustes necesarios en su contexto.

2. Reflexiones

Después de haber realizado el diseño e implementación de la unidad didáctica, destacamos la importancia de que haya sido planificada por un grupo especializado de docentes de matemáticas. Cada uno de sus miembros aportó su experiencia, y al compaginar estas experiencias con lo aprendido en MAD, pudimos llevarla a la práctica, para beneficio de los estudiantes.

La experiencia que nos deja MAD a cada uno de los integrantes del grupo es altamente positiva. En el aspecto profesional, nos permitió reflexionar sobre la planificación que hacemos a diario en nuestras prácticas de aula. Con lo que aprendimos en MAD podemos afirmar que en algunos casos nuestras planificaciones eran superficiales, ya que no nos deteníamos a revisar concienzudamente la selección de las tareas que debían desarrollar los escolares.

Así mismo, MAD aportó a nuestro trabajo como docentes la hipótesis sobre las previsiones en los caminos de aprendizaje, en cuanto tenemos claras las capacidades que el estudiante activa y si aportan de manera significativa al tema. También, podemos revisar los posibles errores y dificultades que los escolares pueden enfrentar al abordar las tareas, para así poder incluir los modos de actuación planificados en el momento oportuno.

Para nuestro trabajo en el aula resulta significativa la variedad de instrumentos de recogida de datos para evaluar el aprendizaje de los estudiantes y el modo de actuación del profesor. Aunque en nuestra práctica llevamos registros de los avances y dificultades de los escolares, MAD nos hizo conscientes de lo que realmente debemos anotar y hacer seguimiento para ayudar oportunamente a los estudiantes. Destacamos la importancia de evaluar el proceso de enseñanza, ya que permite revisar la labor docente y corregir posibles fallas que pueden afectar el proceso de enseñanza.

Para finalizar, podemos afirmar que el trabajo realizado en MAD ha cuestionado y transformado significativamente nuestra actividad docente, invitándonos a modificar el quehacer diario, para ser cada día más innovadores frente al conocimiento propio y el de los demás. Nos motiva para iniciar procesos investigativos desde lo individual y de comunidades académicas del área de matemáticas para contribuir significativamente en la forma de enseñar y aprender las matemáticas.

9. Referencias

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Lupiáñez, J. L. (2011). *Apuntes de MAD. Módulo 7*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.

Ministerio de Educación de Colombia (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas. Sección del documento Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23.

10. Bibliografía

Alonso, M. (1994). *La evaluación en la enseñanza de la Física como instrumento de aprendizaje*. (Tesis doctoral. Universidad de Valencia. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales). Valencia, España.

Arbaugh, F., Lannin, J., Jones, D. L., & Park-Rogers, M. (2006). Examining instructional practices in Core-Plus lessons: Implications for professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(6), 517-550.

Chambers, D. (1993). Integrating assessment and instruction. En NCTM (Ed.). *Assessment in the mathematics classroom (1993 Yearbook)* (pp. 17-25). Reston, VA: NCTM.

Gómez, P., & González, M. J. (2009). Conceptualizing and exploring mathematics future teachers' learning of didactic notions. *Indivisa. Boletín de estudios de investigación*, XII, 225-236.

Guerrero, S. (2001). Las tareas matemáticas. *UNO*, 27, 5-6.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., et al. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study*. Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Lee, C. (2010). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas. La evaluación formativa en la práctica*. Madrid: Morata.

Lupiáñez, J. L., & Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA* 3(1), 35-48.

Marín, A. (2011). *Apuntes MAD. Módulo 6*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Marín, A. (2011). *Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: Organización y secuenciación*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.

Masingila, J. (1997). Evaluación: una herramienta para enseñar y aprender. *UNO*, 11, 33-41.

Ministerio de Educación de Colombia (MEN) (2008). *Guía metodológica. Evaluación anual de desempeño laboral docentes y directivos docentes*. Bogotá: Autor.

NCTM (1991). *Mathematics assessment*. Reston, VA: Autor.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ponte, J. P., et al. (1997). Dinámica de aula. En *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministerio da Educacao, PRODEP.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Jiménez, L. Santos, & J. P. Ponte (Coords.). *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.

Rico, L. (1997). Cuestiones abiertas sobre evaluación en matemáticas. *UNO*, 11, 7-23.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, & P. Gómez (Eds.). *Educación Matemática* (pp. 69-108). México D.F, México: Grupo Editorial Iberoamérica y “una empresa docente”.

Rico, L. (1997). *Apuntes sobre fenomenología*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.

Rico, L., & Lupiáñez, J. L. (2008). *Expectativas sobre el aprendizaje matemático. En Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid:Alianza Editorial.

Rodríguez, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólica por estudiantes de secundaria*. (Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada, Granada).

Ruano, R., Socas, M., & Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Álgebra. *PNA*, 2(2), 61-7.

Segovia, I., & Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-15). Barcelona, España: ICE-Horsori

Swan, M (2005). *Improving learning in mathematics: challenges and strategies DfES standards unit publication*. Nottingham, Inglaterra: Universidad de Nottingham.

Trujillo, F (2011). *El análisis DAFO en el diseño de proyectos educativos: una herramienta empresarial al servicio de la educación*. Recuperado de <http://is.gd/5kP7r2>

Webb, D. (2004). *Classroom assessment as a research context. Variations on a theme of pedagogical decision making*. Overview presentation for ICME 10-TSG 27. Internal Assessment, Copenhagen.

Webb, N. (1993). Assessment for the mathematics classroom. En NCTM (Ed.). *Assessment in the mathematics classroom (1993 Yearbook)* (pp. 1-6). Reston, VA: NCTM.

Zabala, A. (1993). Los enfoques didácticos. En C. Coll, (Ed.), *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Grao.

11. Anexos

Los anexos de este capítulo se encuentran disponibles en <http://funes.unianandes.edu.co/1892/>

1. Análisis de competencias
2. Capacidades y objetivos

3. Caminos de aprendizaje
4. Errores y dificultades
5. Materiales y recursos
6. Tareas del objetivo 2
7. Instrumentos de evaluación
8. Guía de aprendizaje
9. Modos de actuación
10. Organización de la secuencia
11. Instrumentos de recogida de datos
12. Examen final