APLICABILIDADE DE DERIVADAS POR MEIO DA PROBLEMATIZAÇÃO DE FUNÇÕES: INCLINAÇÃO DA RETA TANGENTE À CURVA INDICANDO OS SEUS MÁXIMOS E MÍNIMOS

Adriane Eleutério Souza; Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro; Sani de C. Rutz da Silva
profadrimat@hotmail.com; nilceia@utfpr.edu.br; sani@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Ponta Grossa: PR, Brasil.

Tema: Pensamento Algébrico
Modalidade: CB
Nível educativo: Terceiro Universitário
Palavras-chave: funções; derivadas; problematização; aplicabilidade.

Resumo:

Este trabalho tem por objetivo mostrar a aplicação das derivadas no estudo de cálculo a partir de uma situação-problema que instiga a construção do conceito de funções descrevendo as relações existentes entre os lados de um retângulo e também a relação entre lado e área, assim matematizando o problema em funções de 1º e 2º graus. Dentro deste estudo tratar-se-á da área máxima se utilizando do coeficiente angular da reta tangente no ponto máximo do gráfico da função do 2º grau. A importância dessa pesquisa é colocar a problematização como forma motivadora ao ensino das derivadas explorando suas aplicações, tais como o ponto de máximo da função por meio da interpretação geométrica. Esta forma de abordagem será comparada a introdução das aulas de derivadas de alguns livros didáticos de cálculo, mostrando a necessidade de um ensino significativo para a compreensão dos conteúdos. A metodologia utilizada é de caráter descritivo para melhor explorar o ensino-aprendizagem dentro do processo de investigação-ação na sala de aula.

Introdução

O ensino de cálculo tem como objetivo a sua aplicabilidade nas áreas das ciências exatas e tecnológicas, respondendo assim onde e como podem ser utilizados os seus conceitos. Porém, a sua forma de abordagem nos livros e por docentes que ministram esta disciplina, nem sempre contemplam as suas aplicações de forma a trazer para o aluno uma aprendizagem significativa.

No decorrer da história, a prática pedagógica para o ensino de cálculo traz um leque de dificuldades de aprendizado que se configuram por altos índices de reprovação e desinteresse dos alunos por esta disciplina. Este fato ocorre no momento em que os alunos se deparam com a complexidade dos conteúdos propostos pela organização curricular. Sendo assim, percebe-se que a maioria dos livros didáticos para o ensino de cálculo, não introduzem os conteúdos de forma a motivar a aplicabilidade destes em uma situação-problema, que responda a importância de se aprender tais conteúdos. Discute-se, que os resultados da prática educativa dependem também da interatividade estabelecida entre professores, alunos e os demais personagens do sistema didático. Por isso, a importância de articular as estratégias, recursos, conteúdos, objetivos e o que possa interferir na condução desta prática. Para tanto, decorre a necessidade de estabelecer o método adequado ao procedimento, de modo a corroborar com a educação matemática, passando assim a interpretar mais em termos do que existe em estado de latência do que soluções propostas pela adoção de um modelo linear de ações. "A cognição não flui com a mesma linearidade do texto científico, pelo contrário, a aprendizagem passa pelo desafio de construir articulações que possam aproximar, ao invés de separar" (PAIS, 2009, p.11).

Para tanto, este trabalho vem descrever uma prática pedagógica por meio da resolução de problemas para o ensino de derivadas a partir de uma situação, que contextualiza um cenário com o objetivo de maximizar a área de um retângulo, de forma a modelar e generalizar a aplicabilidade de derivadas por meio do conceito geométrico da inclinação da reta tangente a uma curva. Assim sendo, o pré-requisito para a construção do conceito de derivadas é o estudo das funções geradoras das curvas que descrevem matematicamente as situações-problemas. Portanto, seria por meio de situações-problemas, uma forma de explorar a aplicabilidade das derivadas a partir das funções que as descrevem matematicamente?

Referencial teórico

As pesquisas realizadas entre as décadas de 1970 e 2010, que abordam as representações semióticas de função, enfocam a investigação sob a ótica da aprendizagem de referenciais curriculares e de livros didáticos em detrimento do "saber fazer" do professor. Ocorrências essas se sucedem também e talvez pela influência de Raymond Duval – psicólogo e teórico dos Registros de Representação Semiótica - o qual se preocupa com a aquisição conceitual e a organização de situações de aprendizagem em Matemática (MAGGIO; NEHRING, 2012). Porém, enquanto professor em sala de aula, o fundamental não são as representações semióticas empregadas, mas o modo como essas representações são utilizadas para aprender e ensinar.

Tais representações estão vinculadas a uma linguagem algébrica que historicamente podemos destacar o estudo do matemático, François Viète (1540 – 1603), na criação da álgebra simbólica apoiado nos trabalhos de grandes matemáticos da antiguidade (PAIS, 2006). Em seus trabalhos, as equações matemáticas traziam as vogais como incógnitas e as consoantes sendo os coeficientes literais destas incógnitas.

Sabendo que a dificuldade no ensino de matemática está na tradução da linguagem comum para a linguagem matemática e vice-versa, se utilizando de símbolos, generalizações e representações que articulam a geometria com as expressões algébricas, assim se configuram as representações semióticas dentro deste ensino, sendo:

> [...] relativas a um sistema particular de signos, linguagem, língua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras, de um objeto matemático [...] de onde a diversidade de representações para um mesmo objeto representado ou ainda a dualidade das representações semióticas: forma (o representante) e conteúdo (o representado) (DUVAL, 1995, p. 3 apud DAMM, 2002, p. 140).

Construindo as funções a partir de uma situação problema para aplicação das derivadas

Ainda falta metodologia no ensino da matemática que corresponda a um aprendizado significativo para o aluno, pois convivemos com a concepção tecnicista (MIGUEL, 1994 apud CAMPITELI, 2006) que é o método pelo qual o conteúdo se passa ao aprendiz de modo mais rápido e conciso possível, livre de quaisquer contradições e desligado de qualquer problematização. Vinculado a uma concepção mecanicista do método onde o professor não ouve, mas expõe; não pergunta, responde. Neste procedimento não há diálogo, não levanta hipóteses e nem analisa contradições.

Visto que, a metodologia deva conduzir mediações de ideias levantadas em sala de aula, de forma a interagir com outras para aumentar o campo semântico do aluno, constata-se que o professor precisa planejar ações educativas para superar os problemas de aprendizagem. Sendo assim, as ações didático-pedagógicas devem proporcionar ao aluno a construção do conhecimento, problematizando assuntos do cotidiano.

Para tanto, Delizoicov e Angotti (2002), propõem uma metodologia para o ensino de ciências que pode ser aproveitada para o ensino de matemática no conteúdo de funções. A partir de tal metodologia, é possível planejar aulas de acordo com os conceitos a serem explorados se organizando em três momentos: problematização inicial, organização do conhecimento e aplicação do conhecimento.

A resolução de problemas como encaminhamento metodológico

Tendo como objetivo minimizar as dificuldades no ensino e aprendizagem de matemática, os professores em sala de aula devem oportunizar para os alunos vivencias com situações de natureza matemática, que sejam instigantes de modo a estimular o raciocínio para estabelecer relações entre ideias e objetos. Para tanto, uma possibilidade é propor situações – problemas que levem o aluno a reconhecer regularidades, propriedades e conceitos, assim construindo por atividades significativas novos conhecimentos.

À medida que se organiza o conceito matemático articulado com outros conceitos por meio de uma série de retificações e generalizações, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas e não um conceito isolado para um problema particular (BIGODE; GIMENEZ, 2009). A resolução de problemas deve ser uma atividade constante em sala de aula devendo proporcionar o contexto em que se podem apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. Para George Polya, matemático húngaro, autor de dezenas de livros sobre diversos temas da Matemática, em especial do clássico *A arte de resolver problemas,* escrito em 1945, resolver problemas é fazer matemática, e é isto que leva o aluno a pensar.

A aplicação da Matemática em situações–problema significativas não deve ser tratada como novidade ou modismo. Educadores matemáticos e pesquisadores têm clamado por esta abordagem, alguns exemplos como “Malba Tahan” na década de 1950, com o clássico “O homem que calculava”, entre outros artigos e livros. Do início dos anos de 1960 até o final dos anos de 1980, o ensino da Matemática afastou-se ainda mais das aplicações, por in fluência do movimento da Matemática Moderna. No entanto, a partir de 1980, educadores, pesquisadores e matemáticos, se fizeram ouvir influenciando instituições educacionais de muitos países que reorientaram os seus currículos, dando destaque às aplicações (BIGODE; GIMENEZ, 2009).

Mas como aplicar derivadas?

“A derivada de uma função é dos mais poderosos instrumentos da matemática. Na verdade é indispensável para investigações não elementares tanto nas ciências naturais como humanas” (SWOKOWSKI, 1983, p. 83). Assim muitos livros, para o ensino de cálculo iniciam o conceito de derivadas, porém o próximo passo não é uma aplicação e sim a definição matemática do conceito. Segundo a definição (SWOKOWSKI, 1983), a derivada de uma função de uma variável é definida como um processo de limite. Considera-se a inclinação da secante, quando os dois pontos de intersecção com o gráfico de *f* convergem para um mesmo ponto. No limite, a inclinação da secante é igual à da tangente.

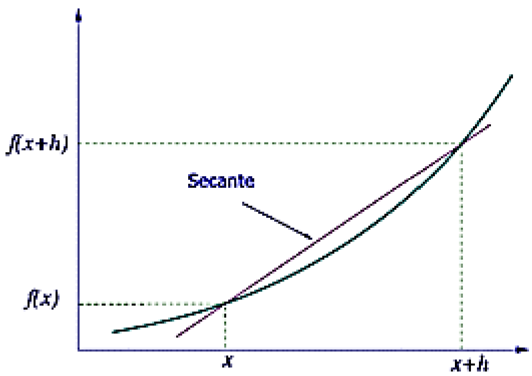


Figura 1: inclinação da secante

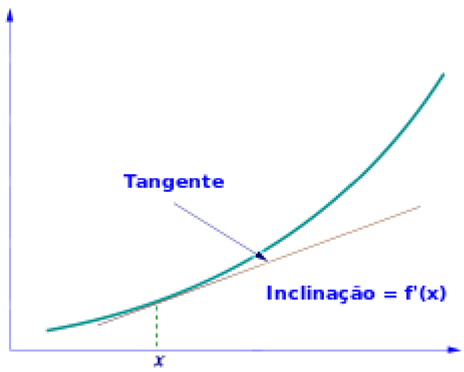


Figura 2: inclinação da tangente

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

onde : $h = x - a \leftrightarrow x = a + h$, então f’(a) é a derivada da função no ponto a.

Sendo assim, a reta tangente quando paralela ao eixo das abscissas terá o seu coeficiente angular – inclinação, igual à zero, portanto dizemos que a primeira derivada também será igual à zero neste ponto, de acordo com a definição. Esses pontos da função são chamados “pontos críticos”, ora o maior valor que a função assume num dado intervalo do seu domínio – ponto máximo local ou absoluto e ora o menor valor da função – ponto mínimo local ou absoluto, como segue a figura 3:

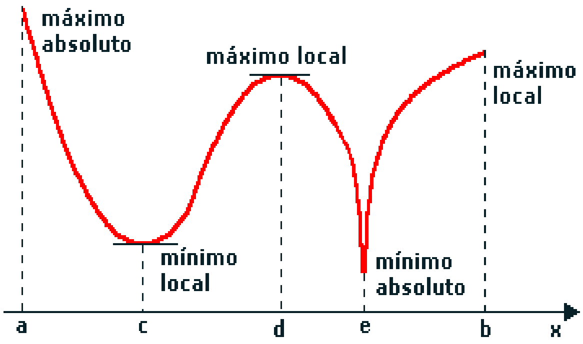


Figura 3: Máximos e mínimos da função no intervalo [a, b]

O estudo em sala de aula

Baseando-se na premissa de que os problemas podem ser resolvidos e as práticas melhoradas, por meio da observação objetiva e minuciosa, da análise e da descrição é que este estudo assume um caráter de pesquisa descritiva (CALLEFE; MOREIRA, 2008).

Sendo assim, Moreira (2008) por meio da teoria de Dewey, afirma que a aprendizagem é mais efetiva quando começa com a experiência, de modo especial à experiência problematizada e inclusa num contexto relevante. Para tanto, o objeto de pesquisa é a problemática de maximizar a área de um cercado retangular com 100 metros de perímetro, vindo descobrir as suas dimensões e a área máxima possível com o perímetro dado.

<u>1º MOMENTO</u>: PROBLEMATIZAÇÃO INICIAL

À medida que o professor apresenta o problema, onde a solução inclui o conceito que precisa ser aprendido, este deve envolver o aluno a um conjunto de fatos que faça parte de sua realidade, mostrando a sua relevância. Neste momento, a contextualização do problema deve ter uma linguagem, dentro da semiótica, que privilegie a compreensão do aluno.

PROBLEMA: É preciso construir um cercado retangular com 100 metros de tela para a plantação de um pomar, de tal forma que a sua área seja a máxima possível. Qual será esta área e as suas respectivas dimensões?

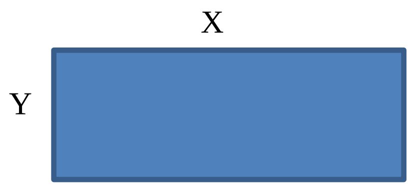
Para tanto, a apropriação desta linguagem deve vir de encontro com uma solução que tenha como base os conhecimentos prévios, assim discutindo as ideias no grupo, entre o professor e os alunos e também entre os próprios alunos, dando-lhes a oportunidade de "criar asas" a imaginação e a criatividade. Assim sendo, o professor deve ser o mediador da situação-problema, levantando hipóteses e instigando a busca dos alunos por conhecimentos que venham corresponder às necessidades do problema. Logo, levantando questões como o reconhecimento do retângulo e suas propriedades e na sequência a organização das possibilidades de retângulos que estejam de acordo com os dados do problema, por meio da construção de tabelas.

<u>2º MOMENTO</u>: ORGANIZAÇÃO DO CONHECIMENTO

Sabendo que, o cercado será de 100 metros, na discussão se dará a relação deste comprimento como o perímetro do cercado retangular, assim abrindo possibilidades de organizar em uma tabela os possíveis resultados.

Então, é o momento de adequar as soluções ao problema experimentando primeiramente os números naturais. Traz-se uma corda para a sala de aula de comprimento hipotético, para representar o cercado de forma concreta e o professor pede aos alunos para construir no chão o retângulo variando suas dimensões, assim montando a tabela 1 (ANEXO I). Esta ação contribui para apreensão dos conceitos envolvidos, pois neste momento os alunos percebem a dependência entre os lados dos retângulos desenhados no chão e também a relação dos lados com a área do retângulo, então há a necessidade de verificar a relação lado x área, retomando o conceito de área para preencher a tabela 2 (ANEXO I).

Por meio das tabelas 1, 2 e 3 os alunos percebem as relações existentes entre os lados do retângulo com 100 metros de comprimento da corda, assim possibilitando escrever a relação algébrica existente:



$\Rightarrow$ $2X + 2Y = 100$, então

$X + Y = 50$ $\Rightarrow$ $Y = 50 - X$ *FUNÇÃO DE 1º GRAU.*

Lembrando que um dos objetivos do problema é encontrar a área máxima do cercado, se faz necessário a retomada do conceito de área de retângulo com os alunos para a elaboração da tabela 2, de forma que visualize por meio da utilização da corda a superfície do retângulo, tal que se perceba que a área é a multiplicação das suas dimensões, logo:

ÁREA = A $\Rightarrow$ A = X x Y

A = X . (50 – X), então A = 50X – X ^{2} *FUNÇÃO DO 2º GRAU.*

Nesta etapa o professor questiona os alunos quanto à solução do problema, pois com ajuda das tabelas a problematização trouxe os fatos para a linguagem matemática, que deve ser analisada em conjunto para tomada de decisões. Portanto, quando retomada a tabela 2, existem diferenças nas relações entre os lados e na relação Lado x Área, percepção que deve ser estimulada pelo professor, a fim de que os alunos investiguem o comportamento das funções.

Dentro dos números naturais, o valor de X = 25, pode despertar o interesse dos alunos em verificar a área do retângulo, para tanto o professor mediador instiga o teste desta hipótese por meio dos gráficos das funções do 1º e 2º graus, as quais foram generalizadas anteriormente pelas tabelas 1 e 2. Sendo assim, a forma algébrica das funções deve ser orientada a sua construção no plano cartesiano, conforme ANEXO II (gráfico 1, gráfico 2, gráfico 3). A partir do gráfico 1 pode ser discutido o domínio da função para que se tenha certeza da junção dos pontos e os seus prolongamentos, assim também definindo as suas imagens. O gráfico 2 - reta e o gráfico 3 - parábola, trazem as propriedades das respectivas funções de 1º e 2º graus, onde a solução do problema se dará.

3º MOMENTO: APLICAÇÃO DO CONHECIMENTO

O conteúdo a ser construído da aula em questão, é a aplicabilidade das derivadas por meio da inclinação da reta tangente á curva da função. Sendo assim, o problema busca como solução a área máxima e as dimensões do retângulo. Então, o professor questiona com os alunos se a situação-problema está descrita matematicamente de forma a resolvê-la.

Para tanto, a apreensão do significado e interpretação dos dados por parte dos alunos se dará neste momento pela leitura dos gráficos. O interesse está na área do retângulo em estudo, portanto o gráfico que descreve a solução do problema é o da função parabólica.

Logo, aplicando a reta tangente em alguns pontos da curva, será verificado que no ponto (25; 625), registrado na tabela 3 (ANEXO I), a inclinação da reta tangente é paralela ao eixo das abscissas, portanto sua primeira derivada é igual à zero, caracterizando assim ponto máximo da função, conhecido também como ponto crítico. Logo, a área máxima em questão é de 650 m^2 e as dimensões 25m x 25m formando um quadrado, que pertence ao conjunto dos retângulos.

Assim se propõe uma abordagem metodológica diferenciada, para o ensino de derivadas de uma função por meio da maximização de áreas evidenciando a aplicabilidade do referido conteúdo.

Referências

Bigode, A. J. L.; Gimenez, J. (2009). *Metodologia para o ensino da aritmética: competência numérica no cotidiano*. São Paulo: Editor FTD.

Campiteli, H. C.; Campiteli, V. C. (2006). *Funções*. Ponta Grossa: ed. UEPG.

Damm, R. F. 2002. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. de A. (Org.). Educação Matemática: uma introdução (p.135-153). São Paulo: Editora EDUC.

Delizoicov, D.; Angotti, J. A. P. (2002). *Metodologia do ensino de ciências.* São Paulo: Editora Cortez.

Maggio D. P.; Nehring C. M. (2012). *Saberes docentes acerca das representações semióticas do conceito de função: atuais desafios à educação matemática*. Boletim Gepem 61 (jul./dez. 2012). ISSN Impresso (0104-9739) - ISSN Eletrônico (2176-2988).

Moreira, H.; Caleffe, L. G. (2008). *Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador*. Rio de Janeiro: Editora Lamparina.

Pais, L. C. (2009). *Didática e educação matemática*. Campo Grande: Editora UFMS.

Swokowski, E. W. (1983). *Cálculo com Geometria Analítica.* São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil.

ANEXO I

Tabela 1: Possíveis lados do retângulo de perímetro 100m.

Lado “x”(m)	Lado “y”(m)	Perímetro – 100m
0	50	100
10	40	100
20	30	100
30	20	100
40	10	100
50	0	100

Tabela 2: Possíveis lados e áreas do retângulo de perímetro 100m.

Lado “x”(m)	Lado “y”(m)	Perímetro – 100m	Área- m2
0	50	100	0
10	40	100	400
20	30	100	600
30	20	100	600
40	10	100	400
50	0	100	0

Tabela 3: Possíveis lados e áreas do retângulo de perímetro 100m.

Lado “x”(m)	Lado “y”(m)	Perímetro – 100m	Área- m2
0	50	100	0
10	40	100	400
20	30	100	600
25	**25**	**100**	**625**
30	20	100	600
40	10	100	400
50	0	100	0

ANEXO II

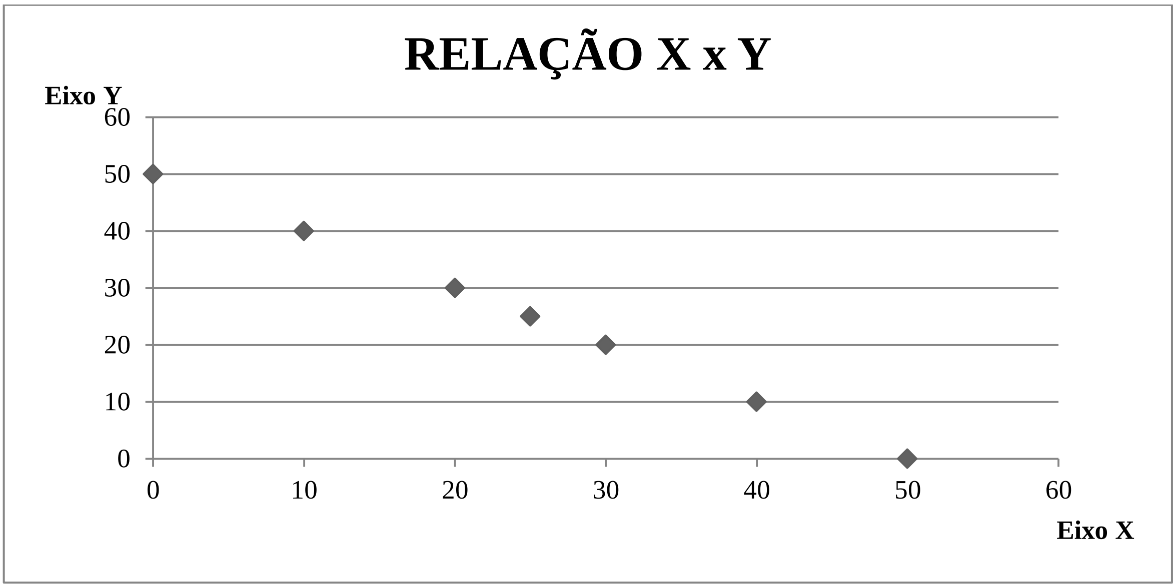


Gráfico 1: Relação X x Y no Plano Cartesiano

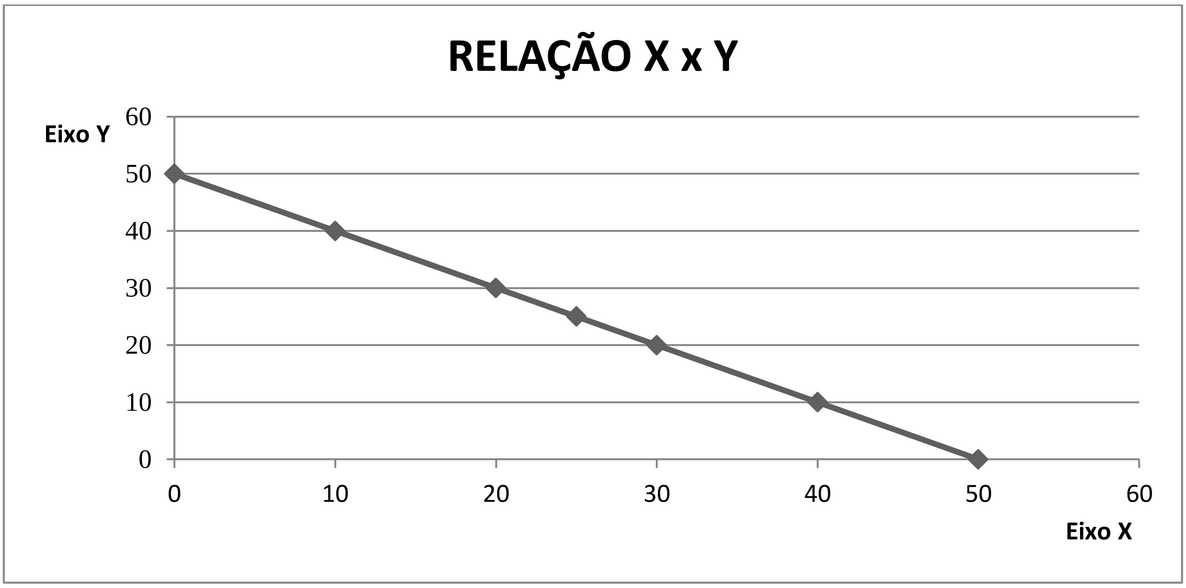


Gráfico 2: Relação X x Y no Plano Cartesiano - FUNÇÃO DO 1º GRAU

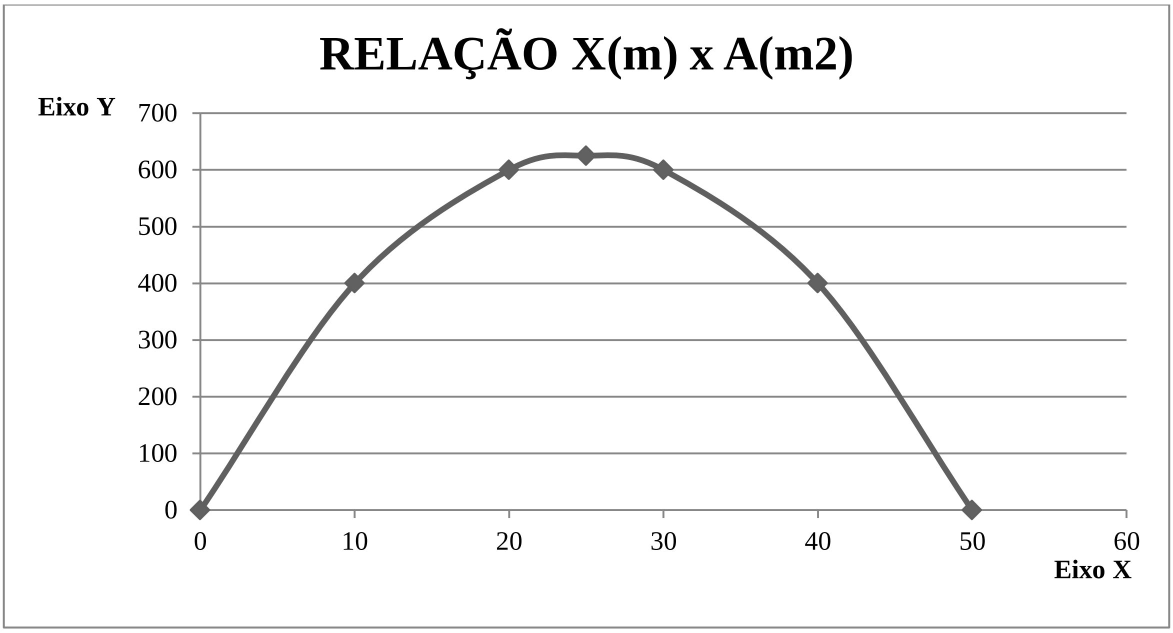


Gráfico 3: Relação X x A no Plano Cartesiano – FUNÇÃO DO 2º GRAU