

## CAPÍTULO 5

### MÉTODO GRÁFICO PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES $2 \times 2$

MÓNICA LILIANA BERNAL, DIANA PAOLA CASTRO,  
ÁLVARO ANDRÉS PINZÓN, YERLY FERNANDO TORRES,  
ISABEL MARÍA ROMERO

#### 1. Introducción y formulación del problema

El presente documento corresponde al trabajo final de la concentración en Educación Matemática de la Maestría en Educación, de la Universidad de los Andes. El trabajo fue elaborado por cuatro profesores licenciados en matemáticas que ejercen en instituciones educativas públicas y privadas en Bogotá y el resto del departamento de Cundinamarca.

Este informe describe el diseño fundamentado y justificado, la implementación y el balance estratégico de la unidad didáctica titulada “Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ ”. El diseño de la unidad didáctica surgió de la selección de un tema matemático, que a su vez hace parte de los contenidos incluidos en el currículo oficial para los grados octavo y noveno de educación básica, como lo establece el documento *Estándares básicos de competencias* (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006a). El diseño se fundamenta a partir del procedimiento de análisis didáctico que constituyó el contenido central de la maestría. Dicho procedimiento permitió concretar elementos previos a la aplicación y la descripción, junto con el balance estratégico de la implementación de la unidad didáctica.

El documento se encuentra estructurado en cuatro partes: la primera hace referencia a cómo se realizó el diseño de la unidad didáctica y cuál fue su fundamentación teórica; la segunda describe cómo se realizó la implementación de la unidad didáctica; la tercera presenta el balance de la implementación; y la cuarta incluye una serie de reflexiones y recomendaciones para futuras implementaciones de la unidad didáctica.

## 1. Formulación del problema

Tradicionalmente, cuando se aborda en el aula la solución de sistemas de ecuaciones lineales, se hace un especial énfasis en los métodos algebraicos, dejando poco o ningún espacio para el método gráfico. Considerando esta realidad, decidimos diseñar e implementar una unidad didáctica sobre este último método, para determinar cómo se pueden potenciar otras capacidades que el método algebraico por sí solo no desarrolla en los estudiantes.

Las capacidades que se pretenden activar en los estudiantes se agruparon en algebraicas, gráficas y transversales. Las algebraicas hacen referencia a la manipulación de ecuaciones, procesos de despeje de variables o algoritmos relacionados con ecuaciones lineales. Las capacidades de tipo gráfico se relacionan con la representación de puntos y rectas en el plano cartesiano a partir de ecuaciones lineales o de datos en un enunciado. Además, las capacidades de tipo gráfico hacen referencia a determinar la posición relativa de rectas en el plano. Las capacidades de tipo transversal se relacionan con acciones que permiten cambiar entre diferentes representaciones: numéricas a algebraicas, algebraicas a gráficas y gráficas a numéricas.

El diseño que proponemos se centra en el desarrollo de las competencias del estudio PISA. Estas competencias se relacionan directamente con los procesos generales establecidos por el Ministerio de Educación (MEN) en *Estándares básicos de competencias* (MEN, 2006a). Hacemos especial énfasis en el desarrollo de la competencia *modelar*, por medio de la solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método gráfico, ya que este permite establecer una relación funcional de las variables y presentarlas de manera sintética en una gráfica. Además, las tareas propuestas en la unidad didáctica presentan situaciones no convencionales en las que se requiere que el estudiante realice traducciones entre lo verbal y lo gráfico. Para estos propósitos, presentamos una unidad didáctica que se implementa a lo largo de 11 sesiones, con siete tareas enfocadas en la consecución de tres objetivos generales: (a) aplicar el método gráfico para obtener puntos de corte entre rectas y solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas; (b) comprender la noción de solución de un sistema lineal, relacionando la existencia de única solución, infinitas soluciones o ninguna solución, con la posición relativa de las rectas en el plano; y (c) modelar gráficamente situaciones no rutinarias, mediante sistemas de ecuaciones lineales, estableciendo la relación funcional entre variables. Dentro del diseño de la unidad didáctica planteamos una tarea que denominamos “tarea transversal”, contextualizada en el deporte Fórmula 1.

Esta tarea corresponde a una situación problema que se desarrolló en cada una de las sesiones.

La unidad didáctica se implementó durante tres semanas en el Colegio Compartir Bochica, con estudiantes de grado noveno, con edades entre los 15 y 17 años. Las actividades fueron desarrolladas en parejas mixtas, niño-niña. Para la obtención de datos referidos al aprendizaje de los escolares, contamos con las siguientes fuentes: los desarrollos escritos de las tareas, las grabaciones de video de algunas sesiones, el diario del profesor en el que se registraron estrategias de los estudiantes y actuaciones del profesor, y algunos diarios de los estudiantes. Adicionalmente, también se obtuvo información por medio de parrillas de observación de capacidades que el maestro observó durante la realización de las tareas.

En los resultados obtenidos encontramos que los estudiantes activaron capacidades relacionadas con el alcance de los objetivos propuestos y con el desarrollo de las competencias PISA que sirvieron de referente. Igualmente, pudimos observar que se presentaron dificultades al momento de relacionar los parámetros de una ecuación con su significado en las situaciones propuestas.

## 2. Contextualización y fundamentación del diseño

La fundamentación del diseño de la unidad didáctica está organizada en dos partes: el contexto y el análisis didáctico. El contexto está determinado desde las características curriculares, socioeconómicas y académicas, mientras que el análisis didáctico está estructurado desde cuatro análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. En este capítulo desarrollamos la fundamentación del diseño de la unidad didáctica desde los contextos y en el capítulo siguiente presentaremos el análisis didáctico de nuestro tema. A continuación, exponemos cada uno de los contextos junto con la información que caracteriza a la población de estudiantes con quienes se implementó la unidad didáctica.

### 1. Contexto curricular

A continuación presentamos los cuatro documentos legales que contribuyeron en el diseño de la unidad didáctica desde las cuatro dimensiones básicas del currículo: contenidos, expectativas, metodología y evaluación. Estos documentos surgen de la Ley General de Educación, del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1994a):

### *1. Lineamientos curriculares en matemáticas*

En este documento se establecen criterios para orientar el currículo, los tipos de pensamiento (numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio) y los enfoques que debería tener la enseñanza de las matemáticas en el país. Para nuestro caso, se establece el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, en el que uno de sus núcleos conceptuales es el uso de expresiones algebraicas y la noción de significado de la variable.

### *2. Estándares básicos de competencias*

Los estándares básicos de competencias (MEN, 2006a) establecen los referentes comunes de los conocimientos y destrezas mínimas que debe tener todo estudiante al finalizar ciertas etapas en su proceso de formación. Orientan la búsqueda de la calidad de la educación y proporcionan unos criterios para las evaluaciones externas (2006a, p. 11). “Los estándares son unos referentes que permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los y las estudiantes en el transcurrir de su vida escolar” (2006a, p. 12). En los estándares se retoman los tipos de pensamiento matemático establecidos en los lineamientos curriculares, de los cuales seleccionamos, en el pensamiento variacional, el estándar: “Identifica diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales” (MEN, 2006a), correspondiente a los grados octavo y noveno.

### *3. Decreto 1290*

El Decreto 1290 (MEN, 2009) reglamenta la evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes, y da autonomía a las instituciones para establecer su propio sistema de evaluación y centrarlo en los aprendizajes de los estudiantes. En este documento se hace mención de la importancia de las evaluaciones realizadas en los ámbitos internacional, nacional e institucional. Este decreto sirvió como pauta para construir el sistema de evaluación utilizado en nuestra unidad didáctica, dado que establece los cuatro niveles de desempeño con los cuales caracterizamos el rendimiento de los estudiantes.

### *4. Competencias PISA*

Tomando como base que Colombia participa en las pruebas del estudio PISA, decidimos contemplar las competencias evaluadas en ese estudio para la elaboración de las tareas de nuestra unidad didáctica. Las competencias que nos propusimos desarrollar con la implementación de la unidad didáctica fueron:

- Pensar y razonar
- Argumentar
- Comunicar
- Modelar
- Plantear y resolver problemas
- Representar
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones
- Usar herramientas y recursos

La elección de las competencias del estudio PISA en el diseño de la unidad didáctica se fundamenta en la relación que existe entre estas competencias y las contempladas en los estándares curriculares (anexo 1)<sup>1</sup>. En particular, la competencia modelar del estudio PISA hace referencia a estructurar la situación que se va a resolver, traducir la realidad a una estructura matemática e interpretar los modelos matemáticos en términos reales. Además, la competencia modelar se relaciona estrechamente con la siguiente competencia definida en los estándares curriculares: “...analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes, formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros” (MEN, 2006a, p. 51).

## 2. Contexto socioeconómico

Aunque contamos con las cuatro instituciones de los integrantes del grupo para implementar la unidad didáctica, decidimos tomar como referencia la Institución Educativa Compartir Bochica, ubicada en el barrio Bochica, de la localidad de Engativá, al noroccidente de Bogotá. La institución fue elegida por la intensidad horaria semanal de la asignatura de matemáticas y por los recursos físicos y tecnológicos con los que cuenta. Esta institución tiene una planta física de dos pisos, una biblioteca, un laboratorio de química, una cancha polideportiva, dos cafeterías, sala de sistemas y 28 salones.

El nivel socioeconómico de las familias de los 1260 estudiantes matriculados en la institución se distribuye de la siguiente manera: el 1,3% de las familias corresponde a estrato 1; el 15,5%, a estrato 2; el 82,4%, a estrato 3, y el 0,9%, a estrato 4.

Implementamos la unidad didáctica en uno de los cursos de grado noveno. El grupo estaba compuesto por 44 estudiantes, 24 mujeres y 20 hombres,

<sup>1</sup> Los anexos de esta capítulo se encuentran disponibles en <http://funes.uniandes.edu.co/1893/>.

cuyas edades oscilaban entre los 14 y los 16 años. Estos estudiantes se caracterizaban por su buen rendimiento académico y pertenecían a un estrato socioeconómico de nivel medio.

### 3. Contexto académico

El plan de estudios propuesto para grado noveno (anexo 2) se distribuye en cuatro bimestres, cada uno con cuatro logros (expectativas de aprendizaje). Nuestra unidad didáctica se diseñó para responder a uno de los logros del segundo bimestre. Los contenidos programados para primer y segundo bimestres están relacionados con la función lineal, la ecuación lineal y los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales. Antes de la implementación de la unidad didáctica, los estudiantes habían desarrollado actividades relacionadas con conceptos como función, función lineal, función afín, pendiente de una recta y gráfica de una función.

La intensidad horaria semanal de la asignatura corresponde a 6 horas, distribuidas en 4 sesiones de 90 minutos. De acuerdo con las directrices académicas institucionales, las sesiones de matemáticas están divididas en cuatro momentos: motivación, explicación del tema, ejercitación y evaluación.

El sistema de evaluación de la institución está dado en una escala numérica de 10 a 100 puntos, organizados en los siguientes cuatro intervalos, para establecer la correspondencia con los niveles de desempeño que propone el Decreto 1290: desempeño bajo (10 a 69 puntos), desempeño básico (70 a 79 puntos), desempeño alto (80 a 89 puntos) y desempeño superior (90 a 100 puntos). Cada uno de los logros se evalúa con esta escala y se promedia con los otros tres logros del periodo respectivo para obtener una calificación definitiva de la asignatura. A su vez, el promedio de cada periodo determina el nivel de desempeño alcanzado por cada estudiante. Los periodos tienen un valor porcentual diferente, según incluyan examen semestral o no. Así, el primer y tercer periodos tienen una ponderación del 15% cada uno, y los periodos dos y cuatro tienen una ponderación del 35%. Los exámenes semestrales representan el 40% de la valoración total del año.

Los hábitos y rutinas de la clase de matemáticas se caracterizan de la siguiente manera: los estudiantes llevan un cuaderno donde toman los apuntes de clase y hacen registro de su diario del estudiante; las tareas se desarrollan normalmente de forma individual o en grupos de máximo tres estudiantes; el profesor tiene en cuenta el trabajo desarrollado en clase, la autoevaluación del estudiante y una prueba escrita que en ocasiones es individual o en parejas para

la evaluación del aprendizaje; no se cuenta con un texto fijo que sirva como guía para la clase, pero se permite el uso de herramientas, como libros de consulta de la biblioteca, calculadoras, computador, celular.

### 3. Análisis didáctico

El análisis didáctico es un procedimiento para diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica sobre un tema concreto de un curso o nivel determinado. Este procedimiento hace parte de la fundamentación de la unidad didáctica, pues permite concretar directrices curriculares generales para el tema y para el contexto de aula de los estudiantes que fueron centro de la implementación. El análisis didáctico se organiza en cuatro análisis, desde los cuales se estudia y describe el tema: análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. Cada uno de los cuatro análisis trata diferentes aspectos que se relacionan estrechamente con la planeación de la unidad didáctica. Los tres primeros análisis contienen aspectos del diseño de la unidad didáctica y sirven como fuente de información para la elaboración de la secuencia de tareas. El análisis de actuación brinda información para estudiar la puesta en práctica de la unidad didáctica, proporcionando los medios para evaluar en qué medida se alcanzan los objetivos propuestos.

#### 1. Análisis de contenido

El análisis de contenido es el punto de partida del análisis didáctico y se enfoca en el tema concreto de las matemáticas escolares sobre el cual se diseña una unidad didáctica. Este análisis permite establecer la estructura conceptual, los diferentes sistemas de representación y la fenomenología del concepto matemático elegido.

A partir del estándar curricular seleccionado, concretamos los contenidos que se podían abordar durante la secuencia didáctica y se tomó como foco conceptual la solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método gráfico. Partiendo de un diagnóstico de los contenidos abordados tradicionalmente en las prácticas de aula, relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales, verificamos la poca importancia que se le presta al método gráfico en relación con los métodos algebraicos. Por ello, basándonos en su contribución al desarrollo del pensamiento variacional (MEN, 2006a), consideramos relevante abordar este tema para nuestra unidad didáctica.

### *1. Estructura conceptual del foco de contenido*

El análisis de la estructura conceptual de nuestro tema da lugar al mapa conceptual que se muestra en la figura 1, en el que se organizan cuatro conceptos fundamentales: representaciones, tipos de sistemas, métodos de solución y sistemas algebraicos. Se establecen algunas relaciones entre los conceptos mostrados y se incluye la estructura semántica de los problemas: combinación, comparación e igualación.

Como ejemplo de las relaciones que se establecen entre los conceptos, tomamos los métodos de solución. Estos métodos se dividen en matricial, algebraico y gráfico. Este último se asocia con la posición relativa de las rectas. Las rectas secantes se corresponden con los sistemas compatibles determinados y las rectas paralelas, sean coincidentes o no, se corresponden con los sistemas compatibles indeterminados o con los sistemas incompatibles. En el mapa de la figura 2, delimitamos con línea discontinua los conceptos asociados con el método gráfico.

Destacamos que los conceptos, las representaciones algebraicas de las ecuaciones, los tipos de sistemas de ecuaciones lineales y la estructura semántica de los problemas son la base del estudio al abordar el método gráfico. Por ejemplo, la estructura semántica de los problemas —dividida en combinación, comparación e igualación— se asocia con la representación algebraica canónica, que, a su vez, se relaciona con los tipos de sistemas compatibles e incompatibles y las diferentes representaciones gráficas —secantes y paralelas—.

### *2. Sistemas de representación*

Denominamos sistemas de representación al conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permite representar una estructura matemática y que están codificados de acuerdo con un conjunto de normas. Un mismo concepto o estructura matemática puede hacerse presente en una variedad de sistemas de representación. Por lo tanto, no hay un sistema de representación que agote en su totalidad la complejidad que encierra cada concepto matemático. Los diferentes sistemas de representación acentúan y ponen de manifiesto algunas propiedades importantes del concepto, a la vez que ocultan o dificultan la expresión de otras propiedades. La comprensión de cualquier concepto matemático se potencia con la utilización y traducción de más de un sistema de representación. La traducción entre sistemas de representación hace referencia al procedimiento que relaciona un mismo objeto expresado en diferentes sistemas de representación (Rodríguez-Domingo, 2011).



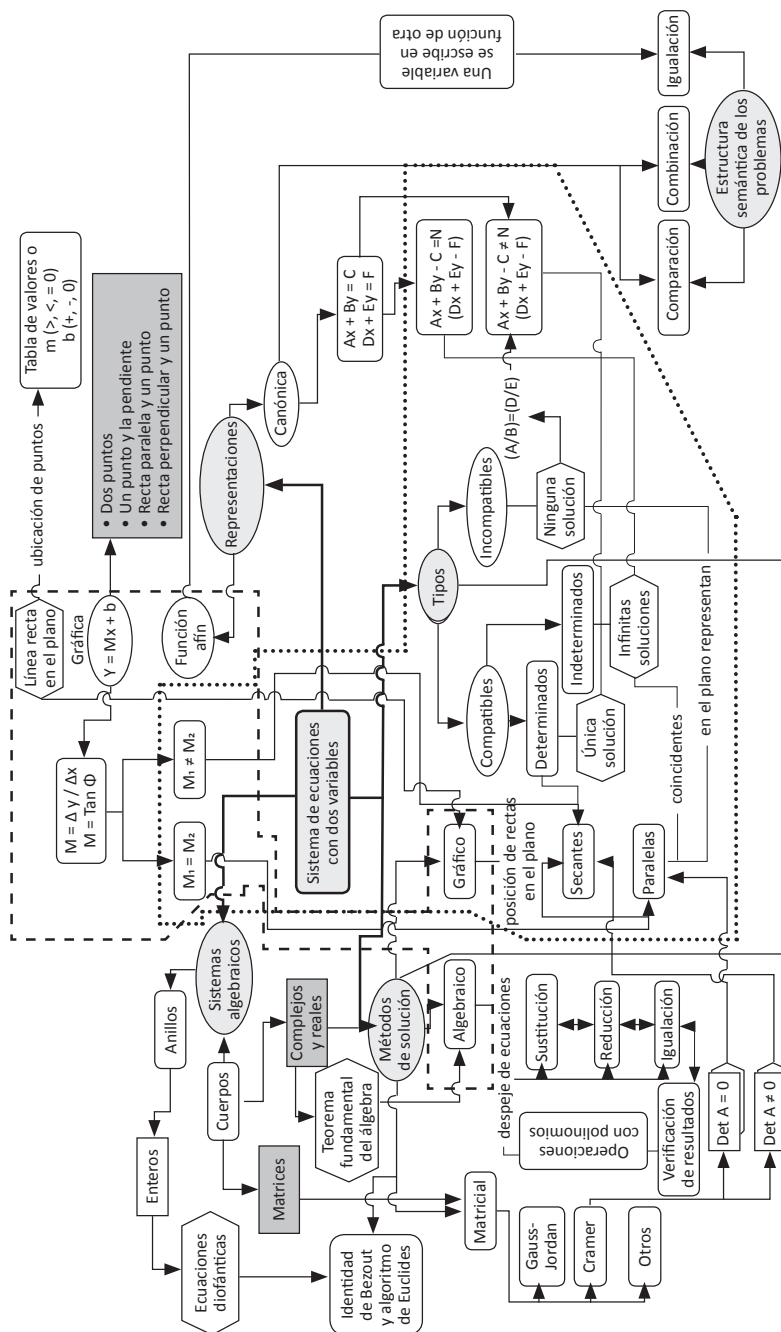


Figura 1. Mapa de la estructura conceptual del tema

Con las flechas en línea gruesa se relaciona el tema Sistemas con dos variables con cuatro conceptos fundamentales. Con las flechas en línea continua delgada se relacionan los desrezos y razonamientos que se ejecutan sobre los conceptos. En la línea recta discontinua se presenta el foco asociado a la función lineal. En la línea punteada se presenta el foco asociado al método gráfico y la solución de sistemas de ecuaciones lineales.



En el estudio del foco de contenido identificamos cinco sistemas de representación: verbal, simbólico, numérico, gráfico y ejecutable. El sistema de representación verbal hace referencia al lenguaje común y cotidiano, no necesariamente matemático, que usamos para referirnos al concepto; algunos ejemplos son: pendiente de una recta, intersección de rectas, única solución, sistemas de ecuaciones. El sistema de representación simbólico abarca todos los signos y representaciones icónicas propias de las matemáticas para referenciar el concepto; por ejemplo, la  $x$ . Por su parte, el sistema de representación numérico se refiere al uso de los sistemas de numeración en el marco del concepto; por ejemplo, para referirnos a una solución del sistema lo hacemos con un par ordenado  $(x, y)$  de números reales como  $(2, -3)$ . El sistema de representación gráfico comprende las representaciones en el plano cartesiano, diagramas y modelos geométricos del concepto. En nuestro foco tenemos la representación de rectas secantes y paralelas en el plano. Finalmente, el sistema de representación ejecutable o manipulable se refiere a los objetos físicos o informáticos con los que se pueden representar los conceptos. Geogebra o los geoplanos son ejemplos de sistemas de representación ejecutable y manipulable, respectivamente.

Construimos el mapa conceptual de la figura 3 a partir de los sistemas de representación descritos anteriormente. Las flechas discontinuas en el mapa muestran las relaciones o procesos internos en un sistema de representación y el paso de un sistema de representación a otro. Los conceptos que se involucran en las tareas de la secuencia didáctica también se muestran en cada uno de los sistemas de representación.

### *3. Fenomenología*

La fenomenología, como componente del análisis de contenido, es una herramienta que permite relacionar el concepto con los fenómenos, situaciones y contextos donde el concepto adquiere significado. Para realizar el análisis fenomenológico de nuestro tema, comenzamos por identificar los contextos de uso de los sistemas de ecuaciones: combinación, comparación e igualación.

#### *Combinación*

En el contexto de combinación hay tres cantidades relacionadas: una colección y dos subcolecciones disjuntas. Se ubican en situaciones en las que las variables presentes son partes de un todo. Por ejemplo:

Un químico desea crear un nuevo limpiador doméstico que contenga 30% de fosfato trisódico (TSP). Si se necesita mezclar una solución al 16% de

TSP con una solución al 72% para obtener 6 litros de una solución al 30% de TSP, ¿cuántos litros de la solución de 16% y de la solución al 72% necesita mezclar?

En esta tarea, la colección es el limpiador doméstico, la subcolección 1 es el TSP solución de 16% y la subcolección 2 corresponde a la solución al 72%.

### *Comparación*

En el contexto de comparación existen tres cantidades expresadas: una cantidad de referencia, una cantidad comparativa y otra de diferencia. Una variable se define a partir de otra utilizando términos como mayor que o el triple de, entre otros. Por ejemplo:

El área territorial combinada de Grenada y Guam es de 890 km<sup>2</sup>. El área de Guam es 200 km<sup>2</sup> mayor que el área de Grenada. Determine el área territorial de Guam y la de Grenada.

En esta situación, la cantidad de referencia es el área combinada (890 km<sup>2</sup>), la cantidad comparativa es el área de Grenada y la cantidad de diferencia es el área de Guam.

### *Igualación*

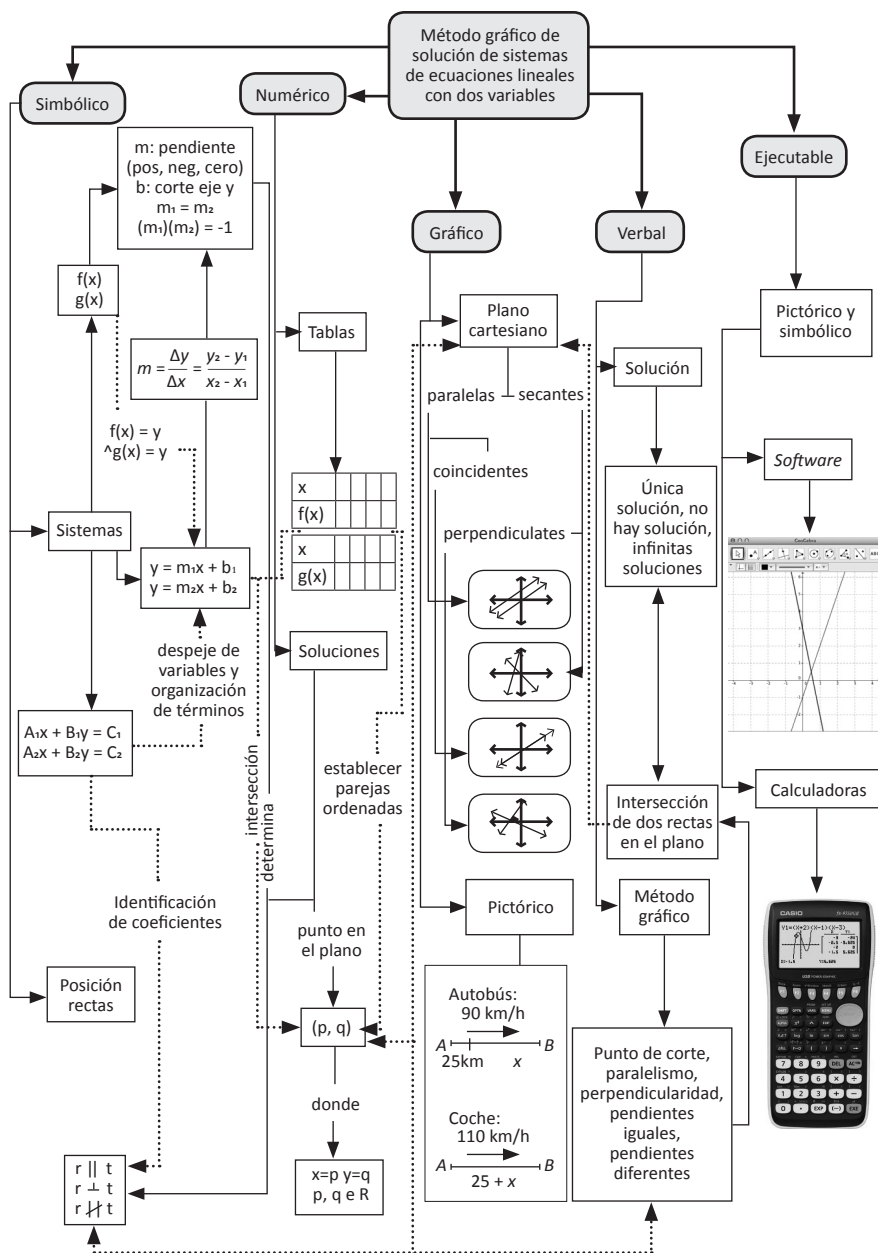
En el contexto de igualación existen dos cantidades diferentes y en una de ellas se actúa aumentándola o disminuyéndola hasta hacerla igual a la otra; una es la cantidad por igualar y la otra es la cantidad referente. Por ejemplo:

Santiago sale de su finca montando su caballo a 15 kilómetros por hora. Media hora más tarde, Juan sale de la misma finca y se dirige por la misma ruta a 18 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo tardará Juan en alcanzar a Santiago?

La cantidad por igualar corresponde a la velocidad de Juan y la cantidad referente es la velocidad de Santiago.

A partir de estos contextos, identificamos dos subestructuras matemáticas que se refieren a la relación o no de las variables implicadas en el sistema: libres o independientes, y funcional.

*Variables libres o independientes.* Corresponden a situaciones en las que no existe una relación de dependencia entre las variables. Por ejemplo, en los contextos de combinación y comparación las variables no están una en función de la otra.



Con las flechas en línea gruesa se relaciona el foco Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales con los sistemas de representación. Con las flechas en línea continua delgada relacionamos hechos y conceptos asociados a los sistemas de representación del foco de contenido. Con flechas en línea punteada se relacionan las destrezas y razonamientos que se ejecutan sobre los conceptos.

Figura 3. Sistemas de representación

*Relación funcional.* Corresponden a aquellos casos en los que es posible y coherente dentro de la situación problema establecer una relación de dependencia entre las variables. Por ejemplo, en el contexto de igualación, la variable velocidad está en función del tiempo y la distancia.

Adicionalmente, hemos clasificado las situaciones de las tareas de acuerdo con el estudio PISA, en lo que se refiere a los ámbitos en los que se sitúan los problemas y que pueden ser parte de la vida real. Las situaciones más cercanas al estudiante se denominan personales. Luego consideramos las educativas o laborales, las públicas y, por último, las científicas. Por ejemplo, la situación descrita en el contexto de igualación se ubica en la subestructura de relación funcional y es una situación pública, por referirse a un hecho que sucede en la cotidianidad. Otras situaciones son ejemplificadas en el anexo 3.

En resumen, los fenómenos organizados por los sistemas de ecuaciones lineales se refieren a una de dos subestructuras matemáticas, dependiendo de si existe o no una relación funcional de las variables. A su vez, los fenómenos se pueden clasificar en tres contextos de acuerdo con la acción descrita por las variables: combinar, comparar e igualar. Finalmente, de acuerdo con la cercanía del estudiante con el ámbito de los fenómenos, estos se pueden clasificar en situaciones personales, educativas o laborales, públicas y científicas.

## 2. Análisis cognitivo

En este apartado describimos las expectativas del profesor sobre lo que se espera que el alumno aprenda, el prediseño de las tareas elaboradas para la implementación y las limitaciones de aprendizaje en que incurren los estudiantes al resolverlas.

### 1. Expectativas de aprendizaje

Las expectativas de aprendizaje se pueden definir como el conjunto de capacidades, competencias, habilidades, destrezas, valores, actitudes y conocimientos que se esperan adquieran o desarrollen los estudiantes en una etapa o proceso educativo. Las primeras expectativas de aprendizaje de la unidad didáctica corresponden a tres objetivos que se enmarcan en el estándar “Identifica diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales” (MEN, 2006a):

*Objetivo 1.* Aplicar el método gráfico para obtener puntos de corte entre rectas y solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

*Objetivo 2.* Comprender la noción de solución de un sistema lineal, relacionando la existencia de única solución, infinitas soluciones o ninguna solución con la posición relativa de las rectas en el plano.

*Objetivo 3.* Modelar gráficamente situaciones no rutinarias mediante sistemas de ecuaciones lineales, estableciendo la relación funcional entre variables.

A lo largo de la unidad didáctica, nos referimos a estos objetivos como aplicar, comprender y modelar, respectivamente. A partir de su formulación, consideramos una tarea para cada uno. Estas tareas fueron aplicadas en las diferentes instituciones en que trabajamos (anexo 4). Las estrategias de solución observadas nos permitieron determinar los procedimientos rutinarios que los estudiantes ponen en juego al resolver actividades relacionadas con nuestro foco de contenido. En este informe no especificaremos las características de estas tareas ni de su aplicación, pero sí queremos aclarar que esas características fueron el punto de partida para el diseño de la secuencia didáctica.

Los procedimientos rutinarios observados generaron las expectativas de aprendizaje denominadas capacidades. Las capacidades se refieren a acciones que evidencian habilidades o destrezas de los escolares y contribuyen al alcance de los objetivos. En la tabla 1 presentamos el listado de capacidades organizadas en tres grupos que responden a procedimientos rutinarios algebraicos, gráficos y transversales. Estos últimos abarcan aspectos algebraicos y gráficos.

Tabla 1  
Capacidades

Capacidad	Definición
<b>Capacidades algebraicas</b>	
C1	Pasa de un enunciado verbal a un sistema de ecuaciones lineales.
C2	Despeja incógnitas en una ecuación.
C3	Halla la pendiente de la recta que pasa por dos puntos.
C4	Determina la ecuación de la recta dadas unas condiciones gráficas y/o algebraicas.
C5	Halla ecuaciones equivalentes a otras dadas.
C6	Escribe un sistema de ecuaciones lineales en forma canónica.
C7	Escribe un sistema de ecuaciones lineales en forma estándar.
C8	Sustituye valores numéricos en ecuaciones lineales.
C9	Verifica que la solución satisfaga las ecuaciones del sistema lineal.

Capacidad	Definición
C10	Identifica y comprende los parámetros de una ecuación lineal o afín.
C11	Identifica qué ecuaciones corresponden a rectas lineales y cuáles a rectas afines.
C32	Identifica en la gráfica el punto de corte de una recta con los ejes.
C33	Identifica en la gráfica la pendiente de una recta.
<b>Capacidades gráficas</b>	
C12	Representa rectas en el plano a partir de dos o más puntos.
C13	Representa gráficamente ecuaciones lineales o afines a partir de la pendiente y un punto.
C14	Representa ecuaciones lineales o afines a partir de parámetros identificados en la ecuación.
C15	Determina la posición relativa de dos rectas en el plano.
C16	Usa recursos gráficos para representar rectas en el plano.
C17	Emplea recursos gráficos para determinar el cambio de una recta al modificar los parámetros de la ecuación asociada.
C18	Analiza la posición relativa de dos rectas dadas sus pendientes utilizando recursos gráficos.
C19	Ubica en el plano cartesiano el punto solución de un sistema de ecuaciones lineales.
C20	Halla las coordenadas del punto de intersección de dos rectas, si existe.
C21	Identifica las coordenadas de puntos pertenecientes a una recta.
<b>Capacidades transversales</b>	
C22	Identifica las variables que intervienen en una situación.
C23	Elabora e interpreta tablas de valores.
C24	Determina si dos ecuaciones con dos incógnitas representan rectas paralelas, secantes o superpuestas.
C25	Determina la solución de un sistema.
C26	Relaciona la representación gráfica de una situación con los datos del enunciado.
C27	Relaciona las ecuaciones de un sistema con los datos del enunciado.
C28	Identifica cuándo dos o más sistemas de ecuaciones son equivalentes.
C29	Usa escalas numéricas para representar sistemas de ecuaciones lineales.
C30	Identifica los parámetros de una función lineal dada su representación gráfica.
C31	Discrimina la información faltante para la resolución de un problema.



Diseñamos las tareas con el propósito de que contribuyeran a la consecución de los tres objetivos establecidos y al desarrollo de las competencias propuestas. Cabe aclarar que, aunque presentamos un grupo de capacidades relacionadas con procesos gráficos, las capacidades de tipo transversal están relacionadas con procesos más cercanos a los gráficos que a los algebraicos. Por su parte, las capacidades de tipo algebraico están relacionadas con procesos de construcción del sistema de ecuaciones lineales o despeje de variables que permiten después identificar los parámetros en una ecuación y graficar una recta en el plano.

## 2. Prediseño de la secuencia de tareas

Con el fin de llevar a la práctica tareas que contribuyeran de manera efectiva al desarrollo de competencias, al alcance de los objetivos y a la activación de capacidades, se diseñó una secuencia en la que se plantean unas tareas de transición entre objetivos, con el propósito de que haya continuidad entre estos y las tareas no se perciban aisladas. A continuación presentamos el prediseño de la secuencia de tareas.

### *Tarea Figuras con 3 rectas (FR)*

- a) Representa las siguientes rectas en un mismo plano:

$$\text{Recta 1: } 3x - 2y = 0$$

$$\text{Recta 2: } y + 1/2(x) = 4$$

$$\text{Recta 3: } y = 1/2(x) - 2$$

¿Qué figura se forma? ¿Por qué se forma esta figura? ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos donde se intersecan las rectas?

- b) Representa las siguientes rectas en un mismo plano:

$$\text{Recta 1: } y = 3x$$

$$\text{Recta 2: } y = 1 - x$$

$$\text{Recta 3: } y = 3x - 2$$

¿Qué figura se forma? ¿Por qué se forma esta figura? ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos donde se intersecan las rectas?

- c) Representa las siguientes rectas en un mismo plano:

$$\text{Recta 1: } 2x + y = 0$$

$$\text{Recta 2: } y = 3 - x$$

$$\text{Recta 3: } y + 1 = -x$$

¿Qué figura se forma? ¿Por qué se forma esta figura? ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos donde se intersecan las rectas?

*Tarea de transición Sistemas equivalentes (SE)*

Represente cada uno de los siguientes pares de ecuaciones (sistemas) en un plano y responda las preguntas.

Sistema A:	$y = x - 1$
	$y = -x - 3$
Sistema B:	$y = 3x + 1$
	$y = 0,5x - 1,5$
Sistema C:	$3y = x - 5$
	$y = x - 3$

- ¿Cuáles son las gráficas que representan cada sistema?
- Si los sistemas A y B son equivalentes, ¿qué propiedad gráfica cumplen?, ¿qué se debe modificar en la ecuación y gráfica del sistema C para que los tres sean equivalentes? Explique su respuesta.

*Tarea Rectas en el plano (RP)*

- Ubique en un plano pares ordenados (x, y) que cumplan las siguientes condiciones y trace la recta que los une:  
 $x + y = 2$  y trace la recta que los une.  
 $x - y = 3$  y trace la recta que los une.  
 ¿En qué punto se cortan las rectas? ¿Qué relación tiene el punto de corte de las dos rectas con las condiciones dadas?
- Ubique en un plano pares ordenados (x, y) que cumplan las siguientes condiciones y trace la recta que los une:  
 $x + y = 5$  y trace la recta que los une.  
 $2x + 2y = 10$  y trace la recta que los une.  
 ¿En qué punto se cortan las rectas? ¿Qué relación tiene el punto de corte de las dos rectas con las condiciones dadas?
- Ubique en un plano pares ordenados (x, y) que cumplan las siguientes condiciones y trace la recta que los une:  
 $x + y = 3$  y trace la recta que los une.  
 $x + y = 6$  y trace la recta que los une.  
 ¿En qué punto se cortan las rectas? ¿Qué relación tiene el punto de corte de las dos rectas con las condiciones dadas?
- Establezca la relación existente entre los sistemas de ecuaciones y sus respectivas representaciones gráficas.

*Tarea de transición Encontrando rectas (ER)*

Las dos rectas que se obtienen al representar gráficamente las dos ecuaciones de un sistema se cortan en el punto  $(1, -2)$ .

- Muestre si la recta de la ecuación  $x + 2y = 15$  puede ser una de las ecuaciones del sistema.
- Represente un sistema de ecuaciones lineales que satisfaga el punto de corte.

*Tarea Bus y carro (BC)*

Un bus sale de un paradero a una velocidad de 60 km/h. Cuando ha recorrido 30 km sale del mismo paradero un carro a 65 km/h que quiere alcanzar al autobús. ¿Cuánto tiempo tarda en hacerlo y qué distancia recorre hasta conseguirlo?

*Tarea Copias (CO)*

En un local de copiado están disponibles dos planes:

Plan 1: \$50 por copia.

Plan 2: Cuota mensual de \$120.000 más \$40 por copia.

¿Para cuál número de copias los planes representan igual costo?

*Tarea Heladería (HE)*

Una heladería compra a su proveedor helados a \$400 la unidad. El dueño de la heladería paga de arriendo mensual un valor de \$150.000 y vende los helados a \$900 cada uno. Determine la función de costos, la función de ingresos y el punto de equilibrio.

La figura 4 muestra cómo las tareas denominadas de transición se relacionan con dos objetivos sucesivos.

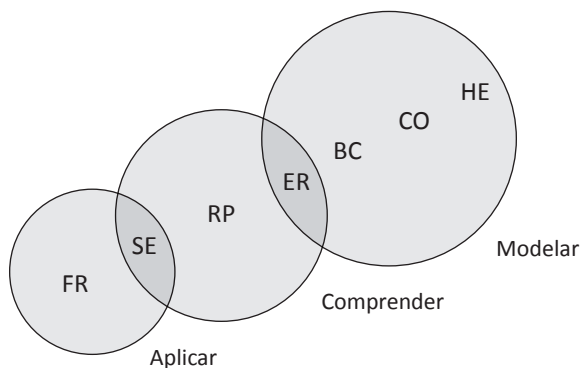


Figura 4. Transición entre objetivos

En el siguiente apartado analizamos la solución de las tareas en relación con las capacidades que se activaron y caracterizamos el alcance de los objetivos. Adicionalmente, establecemos la contribución de las tareas a las competencias PISA.

*3. Caminos de aprendizaje*

Los caminos de aprendizaje se pueden definir como aquellas secuencias de capacidades que los estudiantes pueden poner en juego en el desarrollo de una tarea. Durante la etapa de diseño de la unidad didáctica, los caminos de aprendizaje previstos son hipotéticos y corresponden a lo que el profesor espera que realicen los estudiantes cuando resuelvan las tareas. Estas secuencias no siempre se desarrollan de manera lineal. Por ejemplo, en la tabla 2 presentamos los caminos de aprendizaje correspondientes a las tareas del tercer objetivo.

Tabla 2  
*Caminos de aprendizaje para el objetivo 3*

Tareas no Rutinarias	Caminos de Aprendizaje
Bus y carro	C22-C1-C10-C14-C20-C26-C9 C22-C2-C7-C14-C20-C25-C9 C22-C2-C7-C23-C12-C20-C25-C9
Copias	C22-C1-C10-C14-C20-C26-C9 C22-C1-C23-C12-C20-C25-C9
Heladería	C22-C27-C14-C23-C24-C20-C25

A partir de estas secuencias, elaboramos tres grafos que relacionan los diferentes caminos de aprendizaje para las tareas que permiten alcanzar cada uno de los objetivos. La figura 5 muestra el grafo de los caminos de aprendizaje para el objetivo con base en las tareas y los caminos de aprendizaje que se mostraron anteriormente. Los grafos contruidos para los objetivos 1 y 2 se encuentran en el anexo 5.

Con el fin de concretar la información obtenida de los diferentes grafos, elaboramos un grafo global que nos permitió caracterizar los objetivos en términos de los caminos de aprendizaje, para luego establecer cómo se contribuye al desarrollo de las competencias PISA con la secuencia de tareas propuesta. Para el grafo global, que se presenta en la figura 6, se tomó en cuenta únicamente el camino de aprendizaje que más capacidades pone en juego.

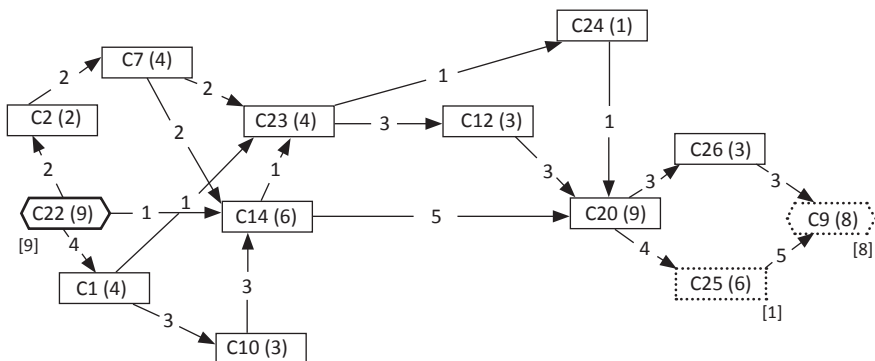


Figura 5. Grafo objetivo 3

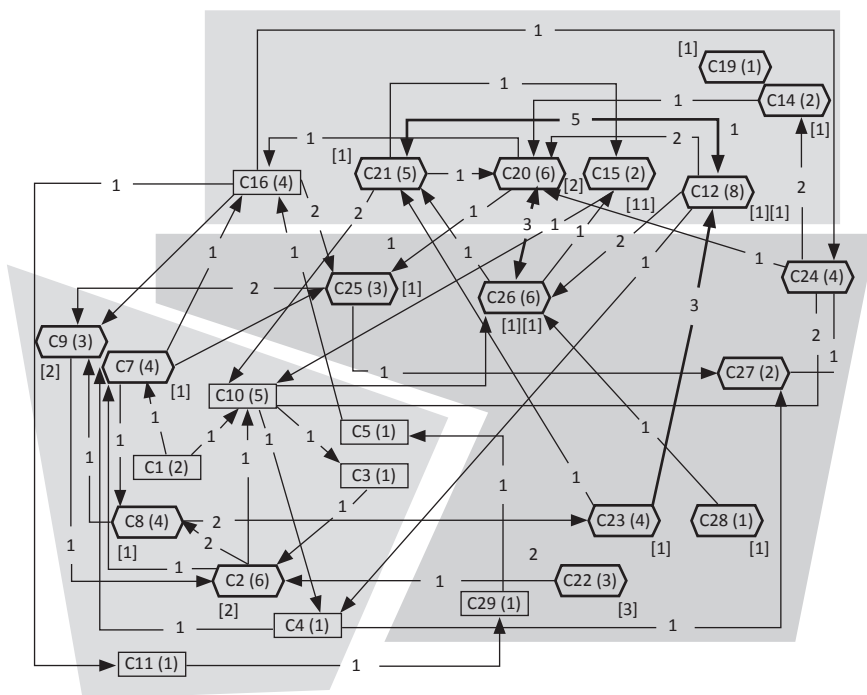


Figura 6. Grafo global de caminos de aprendizaje

En la parte superior de este grafo se agrupan, en un rectángulo, las capacidades relacionadas con los procesos gráficos. En el cuadrilátero de la parte inferior izquierda se agrupan las capacidades relacionadas con los procesos algebraicos. El polígono de la parte inferior derecha reúne las capacidades relacionadas con los procesos transversales. La figura 7 explica los números que aparecen en la figura 6.

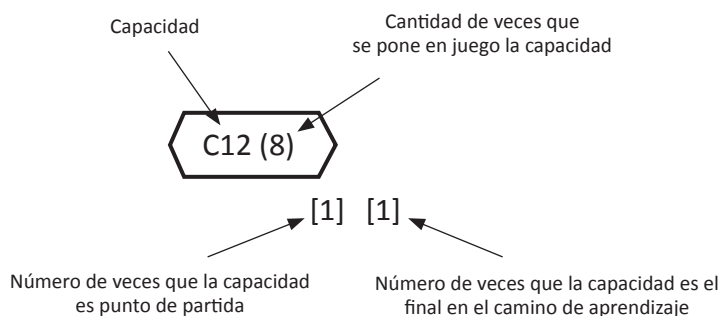


Figura 7. Números en el grafo

Los números que se encuentran entre las flechas del grafo indican la cantidad de veces que se establece la conexión entre las capacidades que une cada flecha. Hemos resaltado con flechas más gruesas las conexiones de mayor frecuencia en todos los caminos de aprendizaje tomados para el grafo: dos de estas muestran la repetición de procesos exclusivamente algebraicos o exclusivamente gráficos (C4-C7 y C12-C21), y otras dos muestran el paso de un proceso transversal a un proceso gráfico (C23-C12 y C20-C26). Por la frecuencia con que se utilizan las capacidades relacionadas con procesos gráficos y por los caminos de aprendizaje que terminan en su mayoría en una capacidad de esta categoría, se puede observar que las tareas contribuyen al logro de los tres objetivos propuestos. Por ejemplo, se puede ver que la capacidad 26 es inicio y final de varios caminos de aprendizaje; es una de las capacidades más utilizadas y uno de los conectores más utilizados como paso de un proceso algebraico a uno gráfico, y viceversa. La tabla 3 muestra las competencias a las cuales favorece el desarrollo de cada una de las tareas. El alcance de la competencia modelar es el resultado del alcance de competencias como pensar, razonar y representar, a las cuales se contribuyó con las tareas de los objetivos aplicar y comprender.

Tabla 3  
Contribución de las tareas al desarrollo de competencias

Tareas no rutinarias	Competencias estudio PISA							
	PR	A	C	M	RP	R	LS	UH
Figuras con 3 rectas (a)						✓		
Figuras con 3 rectas (b)						✓		
Figuras con 3 rectas (c)						✓		
Sistemas equivalentes (a)	✓		✓				✓	
Sistemas equivalentes (b)	✓	✓			✓			
Rectas en el plano (a)						✓		
Rectas en el plano (b)						✓		
Rectas en el plano (c)						✓		
Rectas en el plano (d)	✓	✓	✓				✓	
Encontrando rectas (a)	✓	✓				✓		
Encontrando rectas (b)	✓				✓	✓		
Bus y carro	✓			✓		✓	✓	✓
Copias				✓		✓	✓	✓
Heladería	✓			✓		✓	✓	✓
Total	7	3	2	3	2	11	5	3

PR: pensar y razonar, A: argumentar, C: comunicar, M: modelar, RP: plantear y resolver problemas, R: representar, LS: utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones, UH: uso de herramientas y recursos.

#### 4. Limitaciones de aprendizaje

Consideramos como limitaciones de aprendizaje aquellas dificultades y errores que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas. Una dificultad es un conocimiento parcial que el estudiante tiene sobre un tema, y con motivo de ella, incurre en errores cuando aborda tareas concretas. Por consiguiente, los errores son organizados en tipos de dificultades.

Para elaborar el listado de las posibles dificultades y errores en que podrían incurrir nuestros estudiantes, realizamos una revisión bibliográfica y encontramos la clasificación de errores presentada por Rico (1995), en la que se destacan los errores relacionados con la representación interna de la información y sus estructuras de procesamiento, los errores relacionados con el procesamiento de la información y los errores con énfasis en el conocimiento. También, encontramos en el trabajo desarrollado por el Grupo Azarquel (1993) un apartado dedicado a “las dificultades de los alumnos”, relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales. Entre las más destacadas tenemos:

- Resolver un sistema es ver lo que “sale” después de igualar (la solución puede o no tener sentido): “...no tiene claro en qué consiste la combinación lineal de las dos ecuaciones que le permite reducir una incógnita, ni por qué el nuevo sistema es equivalente al anterior”.
- La dificultad para sostener toda la información ha conducido al error. Se observa una confusión en la elección de la incógnita y en la traducción de la información al de las ecuaciones.
- A los alumnos les cuesta trabajo comprender que hay sistemas incompatibles: “...no les resulta fácil a los alumnos darse cuenta de que, si no ha habido errores intermedios, un resultado contradictorio al final de un proceso lógico revela un punto de partida contradictorio”.

El Grupo Azarquiel concluye que los sistemas de ecuaciones lineales resultan ser, de este modo, el motivo ideal para profundizar en los conceptos de variable y función. Dentro de las dificultades evidenciadas por los estudiantes en el aprendizaje del método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales, establecimos dos tipos de dificultades: (a) las relacionadas con la complejidad de los objetos matemáticos y (b) las relacionadas con los procesos propios del pensamiento matemático. Como dificultades asociadas con la complejidad de los objetos matemáticos establecimos aquellas relacionadas con la representación de sistemas de ecuaciones lineales en el plano cartesiano y las que se presentan al establecer la solución de un sistema lineal a partir de expresiones algebraicas y/o representación de rectas en el plano. En cuanto a los procesos propios del pensamiento matemático, establecimos la dificultad para representar situaciones no rutinarias de sistemas de ecuaciones lineales identificando las variables y la relación establecida entre estas. La tabla 4 presenta los errores relacionados con la dificultad para representar sistemas de ecuaciones lineales en el plano cartesiano.

Tabla 4  
*Errores en que incurren los estudiantes con dificultad para representar sistemas de ecuaciones lineales en el plano cartesiano*

Error	Definición
E1	Confunde los parámetros de la ecuación de una recta en su forma estándar $y = mx + b$ , al representar sin hacer tabulación.
E2	Calcula parámetros usando fórmulas o reglas de procedimientos erróneas.
E3	Representa gráficamente todas las rectas cortando los ejes en (0,0).
E4	Ubica en el plano puntos no co-lineales.
E5	Ubica el punto de corte de las dos rectas por encima del punto de corte de cada recta con el eje $y$ .
E6	Utiliza escalas inapropiadas para solucionar sistemas de ecuaciones.



Los estudiantes con dificultad para establecer la solución de un sistema lineal a partir de expresiones algebraicas y/o representación de rectas en el plano pueden incurrir en los errores que se presentan en la tabla 5.

Tabla 5

*Errores en que incurren los estudiantes con dificultad para establecer la solución de un sistema lineal a partir de expresiones algebraicas y/o representación de rectas en el plano*

Error	Definición
E7	Relaciona incorrectamente el valor de las pendientes de dos rectas con su posición relativa en el plano.
E8	Considera que la igualdad en los coeficientes de las mismas variables implica representación de rectas coincidentes.
E9	Supone que dos ecuaciones no son equivalentes si la una no es múltiplo entero de la otra.
E10	Considera que dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son: $m_1 = -m_2$ o $m_1 = 1/m_2$ .
E11	Escribe expresiones que no tienen concordancia con las relaciones implícitas entre las variables en una situación.
E12	Confunde la representación gráfica con el respectivo número de soluciones del sistema.
E13	Confunde en un par ordenado las ordenadas con las abscisas (implica obtener una solución intercambiada: $x$ por $y$ ).
E20	Establece relaciones incorrectas entre el punto de corte de las rectas y la solución del sistema.
E21	Escribe expresiones que no concuerdan con los la representación gráfica de una situación.
E22	Establece relaciones incorrectas entre la representación gráfica y los datos de un enunciado.

Finalmente, en la tabla 6 presentamos los errores asociados con la dificultad para representar situaciones no rutinarias con sistemas de ecuaciones lineales, identificando las variables y la relación establecida entre ellas.

Para complementar la representación de los caminos de aprendizaje por medio de grafos, desarrollamos un modelo denominado “espina de pescado”, en el que no solo se presentan las capacidades, sino los posibles errores en los que puede incurrir el estudiante. La información que proporcionan puede contribuir a diseñar mejor las tareas y los procesos de instrucción por parte del profesor. La figura 8 muestra la espina de pescado que representa el proceso previsto que se genera al resolver la tarea “Rectas en el plano”. La columna de la espina es el camino de aprendizaje y las espinas representan los posibles errores. La secuencia se lee desde la cola hacia la cabeza del pescado.

Tabla 6  
*Errores en los que incurren los estudiantes con dificultad para representar situaciones no rutinarias con sistemas de ecuaciones lineales identificando las variables y la relación establecida entre ellas*

Error	Definición
E14	Reduce un problema de dos variables a una sola variable.
E15	Despeja variables ignorando la jerarquía de las operaciones (implica obtener ecuaciones no equivalentes).
E16	Iguala todas las ecuaciones a cero.
E17	Asume que las rectas que representan móviles que parten de un mismo lugar deben partir del mismo punto en el plano.
E18	Ubica en el eje de las ordenadas la variable independiente.
E19	Soluciona un sistema de ecuaciones hallando el valor de una sola variable.

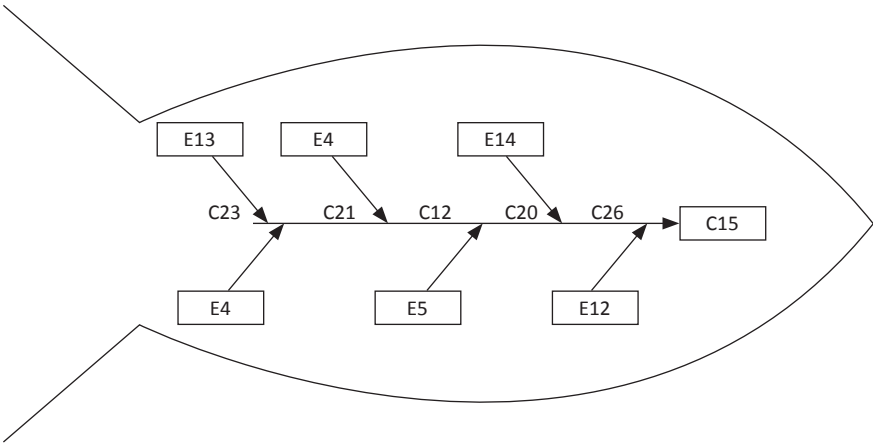


Figura 8. Espina de pescado

Además, establecimos la relación entre las limitaciones y las expectativas de aprendizaje, así como la relación entre las dificultades y actuaciones previstas para el profesor (anexo 6).

### 3. Análisis de instrucción

El foco de atención del análisis de instrucción es la enseñanza. En el análisis de instrucción buscamos materiales o recursos que sirvieran para resolver algunas tareas; elaboramos una tarea que contribuyera a la resolución de problemas; hicimos la puesta a punto de la secuencia didáctica; concretamos aspectos generales de la metodología por emplear en cada sesión; y establecimos el papel del profesor que se espera en diferentes momentos de una sesión de clases.

### 1. *Materiales y recursos*

Identificamos dos tipos de materiales y recursos que contribuyen a la enseñanza y aprendizaje del método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales: el material manipulativo y las herramientas tecnológicas.

Dentro del material manipulativo, construimos los denominados Acetatos superpuestos. Este material consiste en dos hojas de acetato en las cuales se muestra a los estudiantes la representación gráfica de la velocidad de dos móviles. Es un material que permite la sobreposición de dos rectas para buscar puntos de corte específicos dadas unas condiciones iniciales. Con el material no se pierde de vista la representación gráfica de las velocidades de dos móviles. Se utiliza en la solución de la tarea Bus y carro.

Otro material manipulativo utilizado son las Ecuacartas. Se trata de un juego de cartas creado por el grupo pensando en la ejercitación lúdica de la asociación de los sistemas de representación de un sistema de ecuaciones lineales, con unas instrucciones de juego previas. El objetivo es formar el mayor número de grupos de representaciones de un mismo sistema de ecuaciones lineales. Se utiliza al finalizar la secuencia de actividades de la unidad didáctica.

El *software* Geogebra se usó como herramienta de ayuda para solucionar las tareas Encontrando rectas y Heladería. En este programa se pueden representar gráficamente ecuaciones lineales e identificar cambios respecto a la manipulación de sus parámetros.

En la tarea Copias incluimos una plantilla en Excel adaptada para representar un sistema de ecuaciones lineales modificando los parámetros de las ecuaciones que lo componen. Además, este recurso ayuda a modelar situaciones de variación lineal en el primer cuadrante del plano cartesiano y se utiliza en la solución de una de las tareas de la unidad didáctica (anexo7).

### 2. *Tarea transversal*

Esta tarea se desarrolla durante el transcurso de toda la secuencia didáctica. Pretendemos que las otras tareas aporten elementos conceptuales, procedimentales y de uso de nuevos recursos para su solución. La tarea transversal está dividida en tres partes. Los propósitos que se buscan en la solución de cada parte, a partir de la contribución de las demás tareas de la secuencia, son los siguientes:

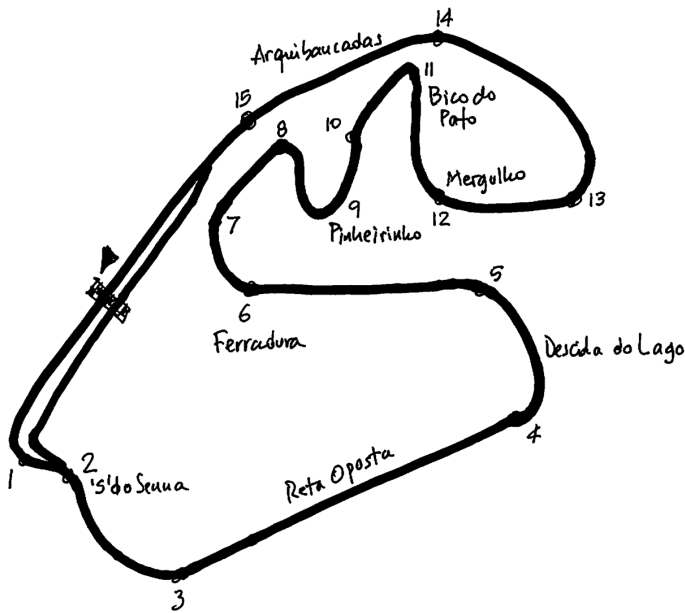
*Parte 1.* Identificar y relacionar la información presentada.

*Parte 2.* Establecer relaciones funcionales entre las variables identificadas.

Parte 3. Escribir ecuaciones que modelen el problema; representar rectas en el plano; determinar el punto de corte entre estas y relacionarlo con el punto de encuentro de dos móviles; y validar la estrategia y los resultados obtenidos.

La formulación de la tarea Gran Premio de Brasil F1 es la siguiente.

A continuación encontrará información relacionada con el Gran Premio de Brasil de la Fórmula 1. Se presenta una imagen de la pista (figura A), información de esta (tabla A) y las tablas B y C, que muestran los resultados finales y el registro de paradas durante la competencia del 7 de noviembre de 2010.



Información de la pista	
Fecha de la carrera	07 Nov 2010
Nombre de la pista	Autódromo José Carlos Pace
Número de vueltas	71
Extensión de la pista	4,039 km
Distancia de carrera	305.909 km
Récord de una vuelta	1:11,473 –JP Montoya (2004)

Figura A

Tabla A

Resultados finales de la competencia

Pos	N	Piloto	Equipo	Vlts	Retiro	Parrilla	Ptos
1	5	Sebastian Vettel	RBR-Renault	71	1:33:11.803	2	25
2	6	Mark Webber	RBR-Renault	71	+4,2 s	3	18
3	8	Fernando Alonso	Ferrari	71	+6,8 s	5	15
4	2	Lewis Hamilton	McLaren-Mercedes	71	+14,6 s	4	12
5	1	Jenson Button	McLaren-Mercedes	71	+15,5 s	11	10
6	4	Nico Rosberg	Mercedes GP	71	+35,3 s	13	8
7	3	Michael Schumacher	Mercedes GP	71	+43,4 s	8	6
8	10	Nico Hulkenberg	Williams-Cosworth	70	+1 vuelta	1	4
9	11	Robert Kubica	Renault	70	+1 vuelta	7	2
10	23	Kamui Kobayashi	BMW-Sauber-Ferrari	70	+1 vuelta	12	1
11	17	Jaime Alguersuan	STR-Ferrari	70	+1 vuelta	14	
12	14	Adrian Sutil	Force-India-Mercedes	70	+1 vuelta	22	
13	16	Sebastian Buemi	STR-Ferrari	70	+1 vuelta	19	
14	9	Rubens Barrichello	Williams-Cosworth	70	+1 vuelta	6	
15	7	Felipe Massa	Ferrari	70	+1 vuelta	9	

Pos: posición, N: número, Vlts: vueltas, Retiro: momento de retiro, Ptos: puntos

Tabla B

Tiempos en pits

Pdas	N	Piloto	Equipo	V	Hora	Tiempo	Ptos
1	1	Jenson Button	McLaren- Mercedes	11	14:17:48	21.054	21.054
1	7	Felipe Massa	Ferrari	12	14:19:05	21.025	21.025
1	9	Rubens Barrichello	Williams-Cosworth	13	14:20:23	29.061	29.061
2	7	Felipe Massa	Ferrari	13	14:20:47	25.161	46.186
1	10	Nico Hulkenberg	Williams-Cosworth	14	14:21:39	21.884	21.884
1	11	Robert Kubica	Renault	14	14:21:41	22.278	22.278
1	22	Nick Heidfeld	BMW-Sauber-Ferrari	14	14:21:45	21.648	21.648
1	20	Christian Klien	HRT-Cosworth	11	14:22:58	23.342	23.342
1	17	Jaime Alguersuan	STR-Ferrari	15	14:23:05	22.069	22.069
1	15	Kamui Kobayashi	Force-India-Mercedes	16	14:24:30	21.242	21.242
1	24	Vitantonio Liuzzi	Lotus-Cosworth	16	14:24:53	21.950	21.950
1	19	Timo Glock	Virgin-Cosworth	17	14:26:11	21.480	21.480
1	16	Heikki Kovalainen	STR-Ferrari	18	14:27:01	25.914	25.914
1	12	Sebastian Buemi	Renault	19	14:28:30	22.884	22.884
1	2	Lewis Hamilton	McLaren- Mercedes	20	14:29:25	21.255	21.255

Pdas: paradas, N: número, V: vuelta, Ptos: puntos

*Problema:* Encontrar una estimación de la vuelta y tiempo que transcurrió cuando un piloto pudo sobrepasar al menos una vez a otro piloto.

*Parte 1.* Elegir tres pilotos de los presentados en las tablas A y B. Discriminar la información relevante presentada en las tablas.

*Parte 2.* Encontrar una estrategia para determinar en qué vuelta y a qué tiempo transcurrido sobrepasa un piloto a otro. Discriminar la información faltante para llevar a cabo la estrategia elegida.

*Parte 3.* Reformular y presentar el plan de solución diseñado para la solución del problema, indicando el por qué de la elección de los pilotos, cómo se determinó la estrategia y la verificación de esta.

### 3. *Presentación de las tareas*

Las tareas tituladas Figuras con tres rectas (establecida como tarea diagnóstica), Sistemas equivalentes y Rectas en el plano, que presentamos en el apartado del prediseño de la secuencia de la unidad, dentro del análisis cognitivo, no tuvieron cambios y se incluyeron en la secuencia tal y como fueron diseñadas desde el principio. Sin embargo, la tarea de transición Encontrando rectas se modificó atendiendo a la inclusión del programa Geogebra como herramienta de ayuda para solucionarla. De esta forma, el diseño fue el siguiente.

*ER: Encontrando rectas* (sesiones 6 y 7)

Las dos rectas que se obtienen al representar gráficamente las dos ecuaciones de un sistema se cortan en el punto (1, -2).

Haciendo uso de Geogebra:

- Si la recta cuya ecuación es  $x + 2y = -3$  es una de las rectas representadas, determine cuál puede ser la ecuación de la otra recta.
- Represente dos sistemas de ecuaciones lineales (dos pares de rectas) que se intercepten en (-3, -4). Complete las siguientes tablas con las ecuaciones de cada sistema. Complete la siguiente información con las ecuaciones de cada sistema:

*Sistema de ecuaciones A*

Ecuación 1: \_\_\_\_\_ Ecuación 2: \_\_\_\_\_

*Sistema de ecuaciones B*

Ecuación 3: \_\_\_\_\_ Ecuación 4: \_\_\_\_\_

- ¿Forman las ecuaciones 1 y 3 un sistema equivalente a las ecuaciones 2 y 4?

De forma similar, se realizaron cambios en los contextos presentados para las tareas Bus y carro, Copias y Heladería. En estas tareas, las situaciones presentadas contribuyen a nutrir el contexto mostrado en la tarea transversal Fórmula 1 y establecer acontecimientos que podrían suceder en la pista mostrada en la tarea transversal. Por lo anterior, el diseño final de las tres tareas mencionadas fue el siguiente.

*BC: Bus y carro (sesión 8)*

Dos aficionados a la Fórmula 1 se trasladan hacia la pista de Interlagos para observar la carrera del Gran Premio de Brasil. Los acetatos muestran la gráfica de la velocidad constante del bus y el automóvil en los que se trasladan los aficionados a 30 km/h y 50 km/h, respectivamente. Utilizando la superposición de los acetatos, resuelve las siguientes situaciones:

- El bus parte de un paradero y cuando ha recorrido 40 km, el automóvil inicia su recorrido desde el paradero en la misma dirección del bus. ¿Cuánto tiempo tarda el automóvil en alcanzar el bus?, ¿qué distancia ha recorrido cada vehículo cuando el automóvil alcanza al bus?
- Si el bus sale del paradero a las 7:00 a. m. y el automóvil parte del mismo punto a las 10:00 a. m., en la misma dirección que el bus ¿a qué distancia del paradero se encuentran los dos vehículos?, ¿a qué hora se encuentran los vehículos?
- Si el bus parte del paradero hacia la pista y el automóvil parte de la pista hacia el paradero, ambos a las 9:00 a. m., ¿a qué distancia del paradero se encuentran los dos vehículos si las ciudades están separadas por 200 km?

*CO: Copias (sesión 9)*

Lee atentamente la siguiente situación y resuélvela desarrollando los puntos descritos a continuación, utilizando la plantilla de Excel (ParamExcel).

Un establecimiento en Bogotá quiere transmitir en directo el evento Gran Premio de Brasil de la Fórmula 1. En un local de copiado ofrecen dos planes a los organizadores para multicopiar volantes con la publicidad:

*Plan 1:* \$50 por copia.

*Plan 2:* Cuota diaria de \$4000 más \$40 por copia.

¿Para qué cantidad de copias los planes representan igual costo?

- Identifica los valores dados en la situación y escríbelos en las casillas verdes de la plantilla en las cuales consideres deben estar; ten en cuenta los títulos que preceden las casillas. Explica por qué has ubicado cada valor en cada casilla.
- Compara los valores obtenidos en la tabla de casillas amarillas y relaciónalos con la gráfica obtenida. ¿Los valores y la gráfica representan la situación dada? Explica tu respuesta.

- c) Revisa tus procesos y, de ser necesario, ubica nuevamente en las casillas verdes los valores identificados en la situación. Responde la pregunta dada.
- d) Explica qué relación existe entre las ecuaciones mostradas por la plantilla y los valores dados en la situación.

Para resolver esta actividad se preparó una plantilla en Excel (ParamExcel) creada para representar un sistema de ecuaciones lineales modificando los parámetros de las ecuaciones que lo componen.

*HE: Heladería* (sesión 9)

Por medio del programa Geogebra, resuelve la siguiente situación:

Dentro del establecimiento en que se transmite la carrera de la Fórmula 1 hay una venta de helados. El vendedor compra al proveedor helados a \$400 la unidad, paga de arriendo mensual un valor de \$150 000 y vende los helados a \$900 cada uno. Determine la función de costos, la función de ingresos y el punto de equilibrio.

**4. Descripción de las tareas**

La tabla 7 muestra la descripción de las tareas en cuanto a recursos, agrupamientos e interacciones que se previeron para la implementación.

Tabla 7  
*Descripción de las tareas*

Atributo	Descripción
<b>Figuras con tres rectas (diagnóstico)</b>	
Meta	Representar rectas en el plano y establecer coordenadas de los puntos de intersección.
Recursos	Papel, lápiz y regla.
Agrupamiento	Gran grupo para presentación de la actividad. Individual para el desarrollo de la tarea.
Interacción	El profesor entrega copia escrita a cada estudiante y presenta la actividad, regula el desarrollo de la tarea dando cumplimiento al tiempo previsto.
<b>Sistemas equivalentes</b>	
Meta	Representar sistemas de ecuaciones lineales e identificar propiedades gráficas de los sistemas equivalentes.
Recursos	Papel, lápiz y regla.



Atributo	Descripción
Agrupamiento	Gran grupo para la presentación de la actividad y para la puesta en común. Parejas para el desarrollo de la tarea. Estas parejas han sido conformadas a partir de los resultados de la tarea anterior.
Interacción	El profesor entrega copia escrita a cada pareja de estudiantes, presenta la actividad y regula el desarrollo de la tarea generando puesta en común por cada cuestión trabajada.
<b>Rectas en el plano</b>	
Meta	Comprender la noción de solución de un sistema lineal relacionando la existencia de única, infinitas o ninguna solución con la posición relativa de las rectas en el plano.
Recursos	Papel, lápiz y regla.
Agrupamiento	Gran grupo para la presentación de la actividad y para la puesta en común. Parejas para el desarrollo de la tarea.
Interacción	El profesor entrega copia escrita a cada pareja de estudiantes, presenta la actividad y regula el desarrollo de la tarea generando puesta en común por cada cuestión trabajada.
<b>Encontrando rectas</b>	
Meta	Plantear sistemas de ecuaciones lineales $2 \times 2$ dado el punto solución y hallar sistemas equivalentes.
Recursos	<i>Software</i> Geogebra, tablero, papel y lápiz.
Agrupamiento	Gran grupo para la presentación de la actividad y para la puesta en común. Parejas para el desarrollo de la tarea.
Interacción	El profesor presenta la actividad, entrega copia escrita a parejas de estudiantes y regula el desarrollo de la tarea generando puesta en común por cada cuestión trabajada.
<b>Bus y carro</b>	
Meta	Modelar una situación de velocidad con sistemas de ecuaciones lineales, hallando el punto de encuentro de dos móviles.
Recursos	Acetatos con planos representados, cuadrícula, papel y lápiz.
Agrupamiento	Parejas para exploración del material y desarrollo de la tarea, y gran grupo para la puesta en común.
Interacción	Se inicia con la entrega de material y la actividad, el profesor contextualiza la actividad y deja que los estudiantes manipulen el material y resuelvan las cuestiones presentadas en parejas. Finalmente el docente dirige la puesta en común de las soluciones dadas en los grupos.

Atributo	Descripción
<b>Copias</b>	
Meta	Modelar una situación de costos identificando variables y parámetros implícitos en ella, con ayuda de la plantilla ParamExcel.
Recursos	Plantilla ParamExcel; papel y lápiz.
Agrupamiento	Gran grupo para presentación de la actividad; parejas para el desarrollo y verificación de respuestas, y gran grupo para puesta en común.
Interacción	En la sala de sistemas, el profesor asigna ordenador por parejas, presenta la plantilla ParamExcel, contextualiza la actividad y regula el desarrollo de la tarea. Finalmente dirige la puesta en común en gran grupo, proyectando en una pantalla las soluciones dadas por las duplas de estudiantes.
<b>Heladería</b>	
Meta	Establecer el punto de equilibrio para el negocio de la heladería.
Recursos	<i>Software</i> Geogebra, papel y lápiz.
Agrupamiento	Gran grupo para presentación de la actividad, parejas para el desarrollo y verificación de respuestas, y gran grupo para puesta en común.
Interacción	En la sala de sistemas, el profesor asigna computador por parejas, contextualiza la actividad y regula el desarrollo de la tarea. Finalmente dirige la puesta en común en gran grupo, proyectando en una pantalla las soluciones dadas por las duplas de estudiantes y relacionando los procesos desarrollados.
<b>Gran Premio de Brasil F1</b>	
Meta	<p><i>Parte 1.</i> Comprender el problema presentado y discriminar información obtenida de las tablas y características de la pista para determinar información que pueda ser necesaria para solucionar el problema.</p> <p><i>Parte 2.</i> Establecer una estrategia para resolver el problema, discriminar la información faltante y llevar a cabo la estrategia elegida.</p> <p><i>Parte 3.</i> Verificar la efectividad de la estrategia elegida para la solución de la tarea.</p>
Recursos	Información en forma escrita (fotocopias), tablero, <i>video-beam</i> , papel y lápiz.
Agrupamiento	Gran grupo para la presentación de la actividad, exponer y contrastar formas de solución y respuestas obtenidas. Parejas para interpretación de la situación y planteamiento de la estrategia de solución, discriminar la información relacionándola con la estrategia, aplicar la estrategia y verificar la solución.

Atributo	Descripción
Interacción	<p><i>Parte 1.</i> El profesor presenta la situación (contexto de automovilismo Fórmula 1) y explica los datos contenidos en las tablas. Las parejas eligen tres pilotos de los presentados, encuentran una manera para determinar en qué vuelta y a qué tiempo transcurrido sobrepasa un piloto a otro.</p> <p><i>Parte 2.</i> El profesor verifica la participación de los estudiantes en los grupos, permite y promueve el uso de herramientas matemáticas para diseñar la estrategia que les permita abordar el problema, observa y orienta las estrategias de cada grupo, elige dos grupos que tienen estrategias enfocadas a la modelación del problema para que las presenten ante todo el curso. Las parejas diseñan un plan para solucionar el problema utilizando la información presentada. Esto incluye discriminar la información que se presenta en las tablas, las características de la pista y determinar qué información es desconocida y puede ser necesaria para solucionar el problema.</p> <p><i>Parte 3.</i> El profesor induce a las parejas a indagar sobre posibles relaciones funcionales entre los datos mostrados o posibles proporciones que se puedan extraer analizando los datos de las tablas y orienta a los grupos para que consoliden sus estrategias hacia procesos matemáticos propios de los sistemas de ecuaciones lineales como relaciones funcionales, tablas, ecuaciones y gráficas</p>

### 5. Metodología general de la unidad didáctica

Antes de implementar la primera tarea, en una sesión que podemos denominar cero, se planificó compartir con los estudiantes cada uno de los objetivos de aprendizaje y las pautas que les permitirían determinar qué capacidades debían lograr para poder alcanzarlos. También, se mostraron los criterios de evaluación junto con una presentación general de lo que se trabajaría durante las 11 sesiones. Teniendo en cuenta los resultados de la tarea diagnóstica, que se realizó individualmente, se planificó la organización de los escolares en parejas para el desarrollo de las demás actividades de la secuencia. Las parejas fueron conformadas por un estudiante de nivel alto y un estudiante de nivel bajo, con el objetivo de contribuir en la superación de dificultades. Denominamos esta estrategia como “plan padrino”.

Para el desarrollo de la secuencia didáctica se pronosticaron acciones en las que el profesor contextualiza las actividades, observa y orienta las estrategias de cada grupo, y los lleva a plantear y aplicar el método gráfico en la solución del sistema de ecuaciones en cada tarea. Además de aclarar las dudas que se van presentando en el desarrollo de las actividades, el profesor regula la puesta en común de los procesos desarrollados por los estudiantes.

Ya que la tarea transversal requiere el uso de herramientas tecnológicas y el diseño de presentaciones, consideramos oportuno complementar las habilidades lingüísticas que han desarrollado la mayoría de los estudiantes con el conocimiento que poseen del contexto de la Fórmula 1.

### *6. Esquema de los momentos de una sesión de clase*

La sesión de clases se distribuye en cinco momentos para (a) organizar a los estudiantes, (b) solucionar las tareas propuestas, (c) presentar el trabajo de dos grupos de estudiantes, (d) discutir las soluciones propuestas y (e) corregir los errores observados en los procesos de los estudiantes. En cada uno de los momentos se prevén actuaciones del profesor que atiendan la metodología propuesta. Dentro de estas actuaciones se espera que el profesor instruya, oriente, observe, cuestione, seleccione y valide los procesos desarrollados por los estudiantes. En la figura 9 se sintetizan las actuaciones que se esperan del profesor en los diferentes momentos de una sesión.

## **4. Análisis de actuación**

El análisis de actuación es el último del análisis didáctico. Su foco de atención es el seguimiento del aprendizaje de los escolares y de la propia enseñanza del profesor durante la puesta en práctica del diseño elaborado en el análisis de instrucción. Presentamos el sistema de evaluación junto con los instrumentos diseñados para la recolección y organización de los datos, que posteriormente serán analizados en la evaluación de la implementación. Estos instrumentos mencionados servirán para evaluar a los estudiantes y analizar la implementación de la secuencia didáctica.

### *1. Instrumentos de recolección de datos*

En este apartado describimos los instrumentos de recolección de datos: la actividad diagnóstica, el diario del estudiante, el diario del profesor, las parrillas de observación y las rúbricas de evaluación de las tareas.

#### *Actividad diagnóstica*

Dadas sus características, decidimos establecer Figuras con tres rectas como tarea de diagnóstico. Su aplicación se haría en la sesión 1, durante 90 minutos y de manera individual. Con ella se pretende determinar dificultades de los estudiantes, relacionadas con la representación de rectas en el plano y el despeje de variables, y determinar las ayudas y ejercicios de refuerzo que se desarrollan antes de la implementación.



*Figura 9.* Esquema de los momentos de una sesión de clase

*Diario del estudiante*

De acuerdo con Bordas y Cabrera (2001), el diario del estudiante pretende que el estudiante reflexione y escriba sobre el propio proceso de aprendizaje abarcando lo relativo a una sesión o limitándose a una tarea en particular. Se determinó que su diligenciamiento se hiciera en el cuaderno como actividad para la casa, a partir del trabajo de cada clase, y que su socialización estuviera a cargo de dos o tres estudiantes. Así mismo, se planeó que este trabajo se desarrollara al inicio de cada sesión, con una duración de 10 a 15 minutos. En la figura 10 presentamos el formato adoptado para tal fin.

Fecha:	Tema:
¿Qué aprendí?	¿Qué duda quiero resolver?
¿Cómo me sentí realizando la actividad?	¿Cómo fue la dinámica de trabajo en clase?
Observaciones	

Figura 10. Diario del estudiante

*Diario del profesor*

El diario del profesor tiene como objetivo recolectar las impresiones generales del desarrollo de la sesión, las intervenciones relevantes de los estudiantes y las actuaciones del profesor. La figura 11 presenta el formato del diario del profesor que hemos construido.

Fecha: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_ Hora inicio: \_\_\_\_\_ Fin: \_\_\_\_\_  
Nombre de la actividad: \_\_\_\_\_

Previsiones de la actividad	
Acciones no previstas	
Del maestro	Del estudiante
Dificultades y dudas surgidas	
¿Qué se puede mejorar? / Ideas nuevas	

Figura 11. Diario del profesor

### Parrillas de observación

La parrilla de observación es un formato de clase que contiene el camino de aprendizaje previsto, los posibles errores en los que incurrirán los estudiantes y algunas actuaciones que puede realizar el docente. También, incluye unos espacios para situaciones no previstas y observaciones generales de cada pareja. Este instrumento es diligenciado por el profesor durante y después del desarrollo de las tareas de la secuencia didáctica. La figura 12 muestra un ejemplo de la parrilla de la actividad diagnóstica.

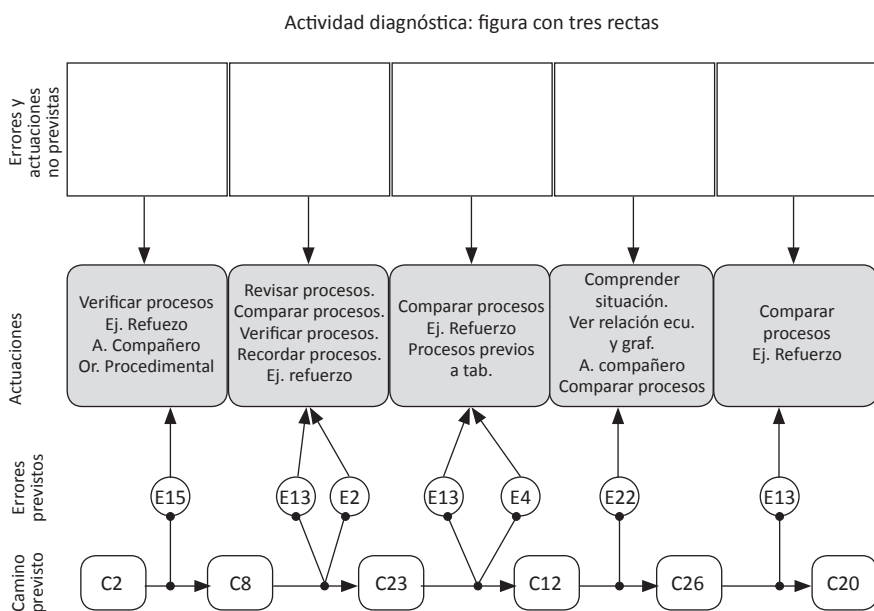


Figura 12. Parrilla actividad diagnóstica

En la parte inferior de cada parrilla encontramos una tabla donde se registra el nombre de la pareja, el camino de aprendizaje seguido y un espacio para observaciones. Al final de este formato de parrilla encontramos unas preguntas clave que pueden guiar a los estudiantes en la consecución del camino de aprendizaje. Por ejemplo, ¿cuántos valores se tomaron para  $x$ ?, ¿qué valores tomaron para  $x$ ? o ¿qué escala van a tomar para cada plano? También hay un espacio para observaciones. Las parrillas de observación de las demás tareas se encuentran en el anexo 8.

*Rúbricas de valoración de las tareas*

Las rúbricas corresponden a la valoración de los desempeños de los estudiantes según las capacidades usadas durante el desarrollo de una tarea. Las valoraciones dadas se corresponden con los diferentes niveles de desempeño que ya se presentaron en el apartado anterior. En nuestra unidad didáctica se diseñaron rúbricas para las tareas de transición y la transversal (anexo 9). A partir de ellas, el profesor establece la valoración de los procesos desarrollados por los estudiantes en la solución de las tareas y realimenta los resultados de la evaluación. De esta manera, se da cumplimiento al objetivo de la evaluación formativa de poner énfasis en la valoración permanente de las distintas actuaciones de los estudiantes cuando interpretan y tratan situaciones matemáticas (MEN, 2006a, p. 75). En la tabla 8 presentamos la rúbrica correspondiente a la tarea Sistemas equivalentes.

Tabla 8  
*Rúbrica de la tarea Sistemas equivalentes*

Rúbrica de la tarea Sistemas equivalentes		
Valoración por desempeños	Camino de aprendizaje	Ejemplo
<b>Superior</b>		
Grafica correctamente los tres sistemas de ecuaciones.	C2 – C10 – C24 – C14	Representa los tres sistemas con solo dos puntos en cada recta.
Reconoce que los sistemas equivalentes son los que tienen la misma solución.	C28 – C26 – C21 – C12 – C4 – C27	Además, identifica que la recta $y = x - 3$ debe ser la modificada para que sean todos equivalentes “pues no pasa por el punto $(-1, -3)$ y se requiere otra recta que sí pase por allí”.
Identifica qué parámetros se deben modificar en una ecuación del sistema C, para lograr que todos los sistemas sean equivalentes.		
<b>Alto</b>		
Grafica correctamente los tres sistemas de ecuaciones.	C2 – C10 – C24 – C14	Grafica los tres sistemas sin dificultad; identifica que son sistemas equivalentes, pero no da argumentos algebraicos para la modificación de la ecuación $y = x - 3$ : “se debe hacer que suba la recta un poco”.
Reconoce que un sistema equivalente a otro es aquel que tiene el mismo punto solución e identifica qué parámetros se deben modificar en la ecuación del sistema C pero obtiene la recta de manera no sistemática.	C28 – C26 – C21 – C12 – C4 – C27	



Rúbrica de la tarea Sistemas equivalentes		
Valoración por desempeños	Camino de aprendizaje	Ejemplo
<b>Básico</b>		
Grafica con dificultad los sistemas de ecuaciones e identifica qué son sistemas equivalentes.	C2 - E15 - C10 - E7 - C24 - C14  C28 - C26 - E13 - C21 - E4 C12 - E21 - C4 - E11 - C27	Grafica los sistemas después de algunas correcciones e identifica elementos que no son suficientes para la equivalencia de sistemas: “son rectas..., cortan los ejes..., se cruzan en el tercer cuadrante, etc.”
<b>Bajo</b>		
Presenta dificultad en graficar los sistemas y no identifica sistemas equivalentes.	C21 - E4 - E13 - C12	Traza curvas, hace cálculos erróneos con decimales en $y = 0,5x - 1,5$ y no despeja adecuadamente $3y = x - 5$

### *Examen final de la secuencia*

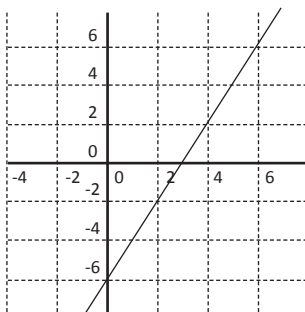
Para la última sesión de la secuencia se planeó realizar el juego de Ecuacartas en un primer momento (40 minutos), para que los estudiantes jugaran en grupos de cuatro, poniendo a prueba el aprendizaje y las capacidades desarrolladas a lo largo de la secuencia didáctica. Posteriormente, ellos presentarían en forma individual el examen final que presentamos en la figura 13. El examen consta de cuatro preguntas que abarcan los objetivos planteados, con un tiempo de 40 minutos. La estructura del examen final se detalla en el anexo 10.

### *2. Sistema de evaluación*

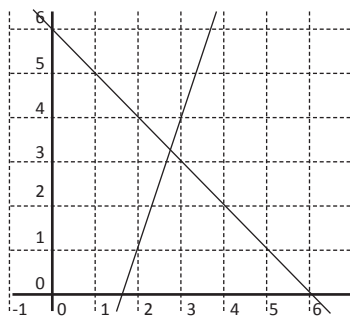
En un primer momento se dan a conocer a los estudiantes los objetivos y los criterios de logro de la unidad didáctica (anexo 11), para que tengan una idea general de todo el trabajo que deben realizar en la secuencia, y se retoman en el formato de autoevaluación que presentamos posteriormente. Estos criterios fueron elaborados a partir de las capacidades establecidas en el análisis cognitivo, intentando adaptarlas a un lenguaje comprensible. Por ejemplo, para el desarrollo del objetivo 1, en el que se pretende activar específicamente las capacidades C12, C13 y C14, el criterio de logro fue el siguiente: “Represento rectas en el plano a partir de dos puntos, de la pendiente de la recta y un punto, o de los parámetros de su ecuación”.

## Examen final

- Determine el punto de intersección de las siguientes rectas:
  - La recta con ecuación  $y = -2x + 5$
  - La recta que pasa por los puntos  $(1, -5)$  y  $(-2, -20)$
- Determine las ecuaciones de una recta paralela y una secante a la recta mostrada en el siguiente plano:



- Las rectas  $y = 3x - 5$  y  $y = 5 - x$ , forman un sistema equivalente con el presentado en la siguiente gráfica? Justifique la respuesta.



- Dos pueblos, A y B, distan 166 km. A la misma hora sale de cada pueblo un ciclista. El ciclista que parte de A viaja a una velocidad de 25 km/h y el que parte de B viaja a 33 km/h. ¿A qué distancia de cada pueblo se encuentran? ¿Cuánto tiempo ha transcurrido?

Figura 13. Examen final

Los estudiantes fueron partícipes en la evaluación por medio de una autoevaluación y una coevaluación, que fueron aplicadas al final de la secuencia de actividades. Estos instrumentos pretendían ayudar al estudiante de forma más eficiente en su aprendizaje y encaminarlo a una reflexión personal y grupal acerca de sus habilidades y fortalezas, tanto cognoscitivas como de responsabilidades dentro del grupo.

Nuestro sistema de evaluación se caracterizó por tener dos tipos de valoración: cualitativa y cuantitativa.

#### *Valoración cualitativa*

En la valoración cualitativa se hace referencia a los niveles de desempeño superior, alto, básico y bajo, en los cuales se ubica al estudiante al terminar cada proceso (Decreto 1290). Además, se describen las capacidades y/o dificultades propias de cada nivel de desempeño; estos tienen unas características definidas. Un estudiante ubicado en el desempeño superior activa de forma sobresaliente las capacidades esperadas para la actividad y desarrolla el camino de aprendizaje sin dificultades. Un estudiante ubicado en el nivel alto muestra un desempeño adecuado en las capacidades previstas para la actividad, desarrolla el camino de aprendizaje sin mayores dificultades, especialmente referidas a las algorítmicas, e incurre en errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Este es el nivel esperado que todos o la gran mayoría de los estudiantes debería alcanzar. Un estudiante ubicado en el nivel básico muestra un desempeño mínimo en las capacidades previstas para la tarea, desarrolla el camino de aprendizaje con dificultades e incurre en errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Un estudiante ubicado en el nivel bajo no resuelve las preguntas de menor complejidad o muestra dificultad para resolverlas, activa menos del 50% de las capacidades previstas e incurre en errores debidos a asociaciones incorrectas, rigidez del pensamiento o dificultades para obtener información espacial.

#### *Valoración cuantitativa*

La valoración cuantitativa se refiere al valor numérico o puntaje asignado a cada estudiante según sus evidencias de trabajo y procesos, que permiten determinar los criterios de logro alcanzados en cada tarea. La valoración cuantitativa del nivel superior corresponde al intervalo 90 a 100 puntos; el nivel alto, de 80 a 89 puntos; el básico, de 70 a 79 puntos, y el bajo, de 10 a 69 puntos.

Al finalizar la unidad didáctica los estudiantes fueron categorizados en un nivel de desempeño (superior, alto, básico y bajo) de acuerdo con los puntajes

obtenidos en los diferentes aspectos evaluados en las diferentes sesiones. En la tabla 9 se muestra el resumen del sistema de evaluación empleado en la unidad didáctica.

Tabla 9  
*Sistema de evaluación de la unidad didáctica*

Aspectos a tener en cuenta	Porcentaje de la nota final para cada aspecto	Instrumentos y elementos que permiten observar y valorar los aspectos
Desarrollo de las tareas durante la sesión		
Procesos realizados en la solución de cada tarea	15% a cada tarea de transición valorada desde las rúbricas construidas.	Parrillas de observación
Argumentos y lenguaje matemático utilizado		Criterios de logro y desempeño por tarea
Representaciones y capacidades utilizadas	Las tareas Figuras con tres rectas, Rectas en el plano, Bus y carro, Copias y Heladería tendrán un peso del 10%.	Diario del profesor
		Diario del estudiante
Elementos actitudinales durante la sesión		
Seguimiento de instrucciones de las actividades	5%	Parrillas de observación
Participación (socialización de procesos, puesta en común)	5%	Criterios de logro y desempeño por tarea
Actitudes frente a la clase que ayuden al pleno desarrollo de la sesión (comportamiento o disciplina)		Diario del profesor
Trabajo en casa	5%	Diario del estudiante
Diario del estudiante		Socialización del diario
Actividades de refuerzo (opcional)	25%	Cuaderno de apuntes
Evidencias de superación		
Resultados finales de la tarea transversal (planeación, ejecución, comprobación)	5%	Criterios de valoración para la tarea transversal (ver el análisis de la tarea transversal y planilla de corrección en los archivos complementario 12 y 13)
Ecuacartas		
Examen final	10%	Criterios de valoración para la evaluación final

Continúa

Aspectos a tener en cuenta	Porcentaje de la nota final para cada aspecto	Instrumentos y elementos que permiten observar y valorar los aspectos
<b>Autoevaluación y valoración de un compañero</b>		
Autoevaluación al finalizar la unidad didáctica	5%	Formato de autoevaluación
Valoración del compañero de trabajo		Formato de valoración a un compañero

### 3. *Procedimientos de evaluación y recolección de datos*

El estudio se centró en las estrategias de resolución y el logro de aprendizaje de los estudiantes al desarrollar las tareas, estableciendo las capacidades que permitieron el alcance del objetivo.

Seleccionamos los siguientes instrumentos para la recolección de información:

- Grabaciones de video.
- Diario del profesor y entrevistas informales.
- Diario del estudiante.

Cada instrumento contiene características que pretenden recopilar información relacionada con los factores emocionales y motivacionales de los estudiantes (anexo 14). Previmos la recolección de la información a partir de: (a) la revisión de actividades desarrolladas por las parejas de estudiantes al finalizar cada sesión, (b) las grabaciones de video de cuatro sesiones —en la tarea diagnóstica, en la tarea sistemas equivalentes, en las presentaciones finales y en el examen final—, y (c) el diligenciamiento de las parrillas de observación al finalizar cada sesión.

Las grabaciones de video brindan un panorama global de las dinámicas grupales y estrategias de resolución de algunos grupos y permiten observar actuaciones de los estudiantes que no se pueden recolectar con facilidad en los otros instrumentos. El diario del profesor, diligenciado al finalizar la sesión de clases, integra las estrategias utilizadas por los estudiantes y capacidades no previstas en la planeación. Finalmente, el diario del estudiante permite complementar la información registrada por el profesor en su diario y lo registrado en los videos.

## 4. Descripción y justificación del diseño

A partir de todos los aportes del análisis didáctico, en esta sección del informe describimos el diseño final de la secuencia didáctica. Exponemos la manera en que están dispuestas las diferentes tareas y los propósitos de cada una de ellas; además, proponemos una secuencia organizada a partir de los tres objetivos: aplicar, comprender y modelar. También, mencionamos en qué consisten las tareas denominadas de transición que permiten dar continuidad de un objetivo a otro; y mostramos el diseño de una tarea que los estudiantes fueron desarrollando a lo largo de toda la unidad. Esta tarea consiste en una situación problema, cuyo objetivo principal es que los estudiantes activen las capacidades desarrolladas en las demás tareas de la secuencia. La denominamos “tarea transversal”.

Este diseño de la unidad didáctica nos permite garantizar dos propósitos. Primero, que las actividades tengan una continuidad respecto a las capacidades desarrolladas y complejidad de las tareas. Y, segundo, que la tarea transversal permita al estudiante tener un referente constante de la utilidad de todo el conjunto de actividades. Incluso la información que se obtiene del análisis realizado al diseño después de su implementación nos muestra lo adecuado del diseño y el éxito que se puede obtener en posteriores implementaciones.

### 1. Planificación propuesta

A continuación presentamos el esquema general de la unidad didáctica y el esquema de evaluación:

#### *1. Esquema general de la unidad didáctica*

En la figura 14 se muestra la distribución de la secuencia didáctica por sesiones, asociando cada objetivo de aprendizaje con las tareas. También, se muestran las diferentes etapas en cada una de las sesiones donde se abre el espacio para trabajar la tarea transversal. Se finaliza la secuencia con el juego Ecuacartas y el examen final.

#### *2. Evaluación*

A lo largo de la unidad didáctica se han establecido ciertos momentos para la evaluación de los desempeños de los estudiantes. Entre estos se destacan la tarea diagnóstica, las tareas de transición, el examen final, la autoevaluación y

la coevaluación. La tarea diagnóstica permite evidenciar los conocimientos previos que tienen los estudiantes de conceptos como función lineal, función afín, solución de ecuaciones lineales, representaciones en el plano. Otro de sus objetivos es guiar el plan padrino, con el que se espera que estudiantes con buenos desempeños en la asignatura apoyen el trabajo de quienes presentan dificultades.

Las tareas de transición se diseñaron para aplicarse durante la finalización de un objetivo e inicio del siguiente. De esta forma, se podría observar si se han logrado los propósitos del objetivo inmediatamente anterior y preparar al estudiante para el objetivo que sigue. El examen final comprende el juego Ecuacartas como dinámica de grupo y una prueba escrita en la que se evalúa el alcance de los tres objetivos propuestos. Finalmente, la autoevaluación y la coevaluación se desarrollan en un formato escrito en el que los estudiantes valoran sus desempeños según las capacidades algebraicas, gráficas y transversales activadas.

Sesiones	→	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
Objetivos	→	Aplicar			Comprender			Modelar				Ecuacartas
Tareas	→	FR		SE		RP	ER		BC	CO/ HE	GP	
Partes de		Gran premio de Brasil										Examen
la tarea	→	Motiv.	P	E	E	E/R	R	R	R	R	R	
transversal		Planteamiento (P)				Ejecución (E)			Resolución (R)			

Figura 14. Esquema general unidad didáctica

## 2. Justificación de la propuesta

A continuación justificamos el diseño de la unidad didáctica teniendo en cuenta tres criterios: (a) la adecuación de la unidad a la legislación curricular vigente, (b) la adecuación al contexto académico y socioeconómico de los estudiantes, y (c) la pertinencia de la unidad de acuerdo con el análisis didáctico realizado.

### *1. Adecuación de la unidad didáctica a la legislación curricular vigente*

Las expectativas de aprendizaje de la unidad didáctica se diseñaron atendiendo a los requerimientos de la Ley 115, artículo 22, literales c y f, y la autonomía para diseñar tareas, establecer la metodología y criterios de evaluación que se fundamentan en los artículos 77 y 78, y en el Decreto 1860/1994. Adicionalmente, las capacidades responden a los indicadores del logro “Interpreta fórmulas, expresiones algebraicas, ecuaciones para representar situaciones que requieran variables, encontrando procedimientos para resolver ecuaciones e inecuaciones” y “Analiza cualitativamente gráficas con rectas y curvas continuas y escalonadas, sus características y efectos en las gráficas, y el cambio de parámetros” (Resolución 2343).

Los objetivos de la unidad didáctica se redactaron pensando en la aplicación y comprensión del método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales y en la modelación de situaciones utilizando los conceptos implícitos en el estándar “Identifica diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales” (MEN, 2006a).

El Decreto 1290 fundamenta la inclusión de las competencias del estudio PISA en la unidad didáctica, al contemplar el ámbito internacional en la evaluación de los aprendizajes. El sistema de evaluación responde tanto a los propósitos y escalas (niveles de desempeño) descritos en los artículos 3 y 5 del mismo decreto como a la evaluación formativa. También, atiende a la valoración permanente que integra la observación atenta y paciente como herramienta necesaria para obtener información sobre la interacción entre estudiantes, entre estos y los materiales y recursos didácticos, y sobre los procesos generales de la actividad matemática, tanto individual como grupal (MEN, 2006a, p. 75). El examen final responde a las competencias comunicación, razonamiento y resolución establecidas en la prueba nacional Saber 9 del ICFES: comunicación, representación y modelación, razonamiento y argumentación, y planteamiento y resolución de problemas.

### *2. Adecuación de la unidad didáctica al contexto académico y socioeconómico de los estudiantes*

Desde el contexto académico de los escolares, la unidad didáctica se integra a las temáticas desarrolladas durante las semanas previas en el primer periodo académico. Pertenecen a otro foco previsto para los sistemas de ecuaciones lineales (función lineal, funciones y ecuaciones lineales, en sus representaciones verbales, algebraicas y gráficas). Esta integración de las temáticas facilita la



continuidad de los procesos académicos de los estudiantes, pues no representan sistemas de representación ajenos, sino complementarios (por ejemplo, ecuaciones lineales con una incógnita y la relación funcional entre variables).

Otros aspectos del contexto que tuvimos en cuenta en la planeación de la unidad didáctica fueron los siguientes.

*Innovación y uso de materiales y recursos.* Los escolares muestran mayor interés cuando se lleva material didáctico o recursos tecnológicos al aula. En esta unidad didáctica se implementaron cuatro recursos y materiales.

*Intereses comunes entre los escolares.* Pensamos el contexto de la tarea transversal a partir de los gustos e intereses del grupo al cual se aplicó la unidad didáctica. Diseñamos la mayoría de las tareas acudiendo a la necesidad que tienen los estudiantes de observar la utilidad de los conceptos aprendidos.

Por último, el diseño de las 11 sesiones está acorde con las condiciones académicas y temporales de la institución. Se dispone de dos semanas por periodo para desarrollar una meta o logro. Considerando que los estudiantes tienen una intensidad horaria de 360 minutos semanales, cada actividad cuenta con el tiempo necesario para su desarrollo. Además, cada actividad que requiera el uso de TIC se puede aplicar en la sala de sistemas disponible para la clase de matemáticas.

### ***3. Pertinencia de la unidad didáctica de acuerdo con el análisis didáctico realizado***

El diseño de la unidad didáctica cubre los conceptos incluidos en el análisis de contenido del foco, pues las tareas propuestas requieren que los estudiantes establezcan representaciones algebraicas (ecuaciones canónicas o estándares) para solucionar diferentes tipos de problemas (combinación, comparación o igualación) a partir de su estructura semántica. De igual manera, se da relevancia a todos los sistemas de representación asociados con el método gráfico. Con la inclusión de los recursos didácticos, el sistema de representación ejecutable adquiere tanta importancia como el sistema de representación simbólico.

A partir del foco y la estructura de los problemas relacionados con el método gráfico, formulamos las expectativas de aprendizaje en términos de objetivos, capacidades y competencias. Definimos tres objetivos que responden a una secuencia: usar el método gráfico (aplicar), identificar características y patrones una vez aplicado (comprender) y, finalmente, una vez reconocido y comprendido el método, modelar situaciones (modelar).

Con los objetivos definidos, las tareas que se proponen están dispuestas de tal manera que no se perciban como aisladas. Por esa razón, se articulan unas actividades de transición y una actividad transversal. Esta última actividad va hilando los tres objetivos: actividades iniciales en contextos científicos (i. e., Figuras con tres rectas) que se van aproximando a los contextos sociales y próximos del estudiante (i. e., Bus y carro). Además, justificamos el diseño de tareas y la metodología para cumplir con las expectativas de aprendizaje y el sistema de evaluación. El sistema de evaluación está basado en analizar en qué medida se alcanzan dichas expectativas. Finalmente, diseñamos las tareas pensando en el desarrollo y alcance de las competencias PISA, como se mostró en la tabla 3.

## 5. Implementación de la unidad didáctica

En este apartado presentamos la implementación de la unidad didáctica. También, describimos las modificaciones que fue necesario incluir en la implementación. Estas modificaciones surgieron a partir de los resultados que se obtuvieron durante el desarrollo de las actividades y de las dinámicas dadas en el grupo de estudiantes. Las clasificamos en menores y significativas. Las modificaciones menores atienden a cambios de forma en la presentación de la tarea, y las significativas acuden a variaciones que implicaban cambios en los caminos de aprendizaje.

### 1. Descripción de la implementación

Programamos 11 sesiones para la unidad didáctica: nueve de ellas estaban destinadas a la solución de tareas por objetivos y al desarrollo de la tarea transversal en al menos 15 minutos. Diseñamos una sesión para la presentación de los resultados de la tarea transversal. Previmos la última sesión para implementar el juego Ecuacartas y aplicar el examen final.

#### *1. Cronograma de implementación*

Antes de implementar la unidad didáctica decidimos reorganizar las primeras sesiones, para dedicar un espacio al refuerzo de conceptos básicos y la conformación de las parejas de trabajo. Las sesiones quedaron como se muestra en la tabla 10.

Tabla 10  
*Cronograma de la implementación*

Sesión	Actividad
0	Aplicar la tarea diagnóstica (lo que se pensó para la sesión 1).
1	De acuerdo a los resultados de la prueba diagnóstica se realizan tareas de refuerzo y se organiza el grupo en las respectivas parejas de trabajo.
3	Sistemas equivalentes en la sala de informática.
4	Análisis de gráficas de SE.
5	Encontrando rectas en sala de informática.
6 y 7	Bus y carro con acetatos.
8	Copias y Heladería en el patio.
9	Examen final en la sala de informática.
10	Presentaciones y autoevaluación.

La unidad didáctica se implementó del 17 de marzo al 15 de abril, durante las primeras semanas de clase del segundo periodo académico de la institución. La sesión 5 se vio afectada por una actividad institucional y tuvo que desarrollarse en 60 minutos. La actividad en la sala de sistemas programada para la sesión 9 no se pudo realizar debido a problemas con la energía.

## *2. Modificaciones menores*

Al momento de la implementación fue necesario realizar algunos cambios relacionados con la redistribución de los tiempos y con la necesidad de complementar las indicaciones a los estudiantes. Las primeras sesiones se desarrollaron como se muestra en la tabla 11.

Tabla 11  
*Desarrollo de las primeras sesiones*

Sesión	Modificación
0	Se aplicó la tarea diagnóstica.
1	Se retroalimentó la prueba diagnóstica y se organizaron las parejas de trabajo.
2	Se solucionaron las actividades de refuerzo diseñadas en la actividad 5.1.
4	Se realizó un taller de análisis de gráficas para analizar cómo se puede representar velocidad <i>vs</i> tiempo y distancia <i>vs</i> tiempo, y aclarar dudas para poder continuar con la primera etapa de ejecución de la tarea transversal.
5	Se redujo el tiempo debido a la actividad institucional “Jean Day <sup>2</sup> ”.

<sup>2</sup> Es un día en que los estudiantes asisten sin el uniforme de la institución y se recorta el tiempo de todas las clases para realizar actividades recreativas.

### 3. Modificaciones significativas

Se realizaron tres modificaciones que consideramos significativas: una en la sesión 9 y dos en la sesión 11. Las describimos a continuación.

*Sesión 9.* Replanteamiento de la tarea. No se pudo implementar en la sala de sistemas, porque tuvimos inconvenientes con la electricidad. Esta fue una modificación generada por un inconveniente ajeno a la unidad didáctica y no nos permitió implementar uno de los recursos diseñados. Esto nos llevó a resolver la actividad con lápiz y papel.

*Sesión 11.* Se realizó un cambio en la redacción de la prueba. Mientras se desarrolló la unidad didáctica, se observó que la redacción con que se presentaron algunas tareas no fue muy clara. Por tanto, se ajustó el examen atendiendo a la necesidad de ser más claros en las indicaciones dadas a los estudiantes. Los estudiantes lograron interpretar de forma adecuada las tareas propuestas y las desarrollaron en su totalidad. La actividad Ecuacartas no se aplicó en esta sesión, pues se dedicó más espacio para el examen final. Para comprender las reglas y desarrollar el juego se requería toda la sesión y no la mitad, como se planificó. Por lo anterior, se perdió la intención de implementar un nuevo recurso creado para la ejercitación lúdica.

### 4. Diseño implementado

Conservando la estructura de la figura 10, en la que se sintetizó el diseño propuesto, en la figura 15 se muestra la implementación de la unidad didáctica

S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11
Aplicar				Comprender			Modelar				Examen
FR		Refuerzo	SE		RP	ER		BC	CO/ HE	GP	
Gran Premio de Brasil											
Motiv.	P/E	E	E	E	E/R	R	R	R	R	R	
Planteamiento(P)					Ejecución(E)			Resolución(R)			

Figura 15. Diseño implementado de la unidad didáctica

## 6. Evaluación de la implementación

En este apartado presentamos una valoración de la unidad una vez implementada y de las diferentes modificaciones que se realizaron, con especial atención en el alcance de los objetivos propuestos desde su diseño.

### 1. Logro de las expectativas de aprendizaje

Iniciaremos por analizar el desarrollo de las tareas, seguido de la valoración en el alcance de los objetivos, y, finalmente, evaluaremos las modificaciones realizadas.

El análisis se centró en las estrategias de resolución y el logro de aprendizaje de los estudiantes al desarrollar las tareas. Se verificó cuáles fueron las capacidades que permitieron el alcance de los objetivos y se seleccionaron los siguientes instrumentos para la recolección de información:

- grabaciones de video.
- diario del profesor y entrevistas informales.
- diario del estudiante.

Cada instrumento contenía características que pretendían recopilar información relacionada con los factores emocionales y motivacionales de los estudiantes (anexo 14). Se previó que la recolección de la información se hiciera a partir de tres aspectos: (a) la revisión de actividades desarrolladas por las parejas de estudiantes al finalizar cada sesión, (b) las grabaciones de video de cuatro sesiones y (c) el diligenciamiento de las parrillas de observación al finalizar cada sesión.

Las grabaciones de video brindaron un panorama global de las dinámicas grupales y estrategias de resolución de algunos grupos, y permitieron observar actuaciones de los estudiantes que no se pudieron recolectar con facilidad en los otros instrumentos. El diario del profesor diligenciado al finalizar la sesión de clases integró las estrategias utilizadas por los estudiantes y capacidades no previstas en la planeación. El diario del estudiante permitió complementar la información registrada por el profesor en su diario y lo registrado en los videos.

En el desarrollo de las primeras cuatro tareas encontramos cierta dificultad de los estudiantes para asociar dichas actividades con la tarea transversal. Esta relación no era explícita. Vimos, entonces, necesario hacer un llamado a las parejas para que tuvieran presente que cada actividad desarrollada tenía elementos que podían contribuir al desarrollo del Gran Premio de Brasil. En este sentido, consideramos que las actividades posteriores sí tuvieron como fortaleza ser más explícitas en su relación con la tarea transversal. El trabajo con

conceptos como velocidad, distancia y tiempo favorecieron mucho el desarrollo de nuestra tarea transversal.

En los estudiantes despertó más curiosidad la manipulación del material acetatos superpuestos que los mismos programas de computador, como Geogebra. Este material les dio una visión más dinámica del plano cartesiano, al poder realizar rotaciones, traslaciones y reflexiones, tanto de las rectas como del plano mismo.

Respecto al alcance de los objetivos, encontramos lo siguiente:

*Objetivo 1. Aplicación del método gráfico.* Observamos que los estudiantes no presentaron mayores dificultades en la resolución de las tareas. Como parte de los hábitos desarrollados en los temas previos, la mayoría de las parejas tomaron los sistemas de ecuaciones activando una primera capacidad que consistía en realizar una tabla de valores para luego trazar la gráfica. Pocos usaron los parámetros para pasar directamente a la gráfica.

*Objetivo 2. Comprensión del método.* Es justo mencionar que pocos lograron relacionar el número de soluciones con la posición relativa de las rectas. Centraron más su atención en hallar siempre “una solución”, sin considerar relevante la disposición de las rectas. En cambio, les resultó relativamente fácil comprender la equivalencia de sistemas.

*Objetivo 3. Modelación.* Los resultados obtenidos fueron bastante variados. Desde aquellos en los que los estudiantes solo lograron plantear las ecuaciones sin interpretarlas como un sistema, hasta aquellas parejas que lograron solucionar una situación abierta usando el método gráfico. Los siguientes son los resultados encontrados al evaluar la solución de la tarea Gran Premio de Brasil:

- El 100% de los grupos identificó las variables que intervienen en la tarea del Gran Premio de Brasil Fórmula 1.
- El 40% logró proponer sistemas de ecuaciones a partir de la información recogida, y de ellos, el 50% lo hizo de forma estándar.
- El 80% asoció la pendiente de la recta con la velocidad de los autos.
- El 40% sustituyó valores en las ecuaciones para formar una tabla.
- El 30% de los grupos usó el método gráfico para solucionar la tarea, y de ellos, el 20% usó adecuadamente escalas numéricas para representar las velocidades de los autos.

Pero no solo se obtuvieron resultados relacionados con los tres objetivos. También, encontramos que los estudiantes desarrollaron habilidades que facilitaron el trabajo cooperativo relacionado con la asignación de responsabilidades

y la dinámica de participación. Además, desarrollaron capacidades relacionadas con simplificación de modelos físicos, como el concepto de velocidad en el desarrollo de la tarea Bus y carro y del Gran Premio de Brasil. La representación lineal de la velocidad representó un verdadero reto para varias parejas, pues en la realidad esto no sucede así. También, tuvieron dificultades a la hora de ignorar o tener que promediar las aceleraciones y desaceleraciones que se dan en este tipo de competencias. Por último, los estudiantes manifestaron dificultades con las capacidades relacionadas con la sistematización de la información. En la tarea transversal, los datos dados no eran suficientes para su solución y se requería consultar y discriminar más información numérica —por ejemplo, establecer las distancias que separan los carros al partir—.

## 2. Valoración de las modificaciones

Finalmente, hacemos una evaluación de dos de las sesiones de la unidad didáctica en las que se hicieron algunas modificaciones.

*Sesión 9.* Aunque se logró la modelación del sistema de ecuaciones y la solución de la tarea, se perdió la oportunidad de utilizar uno de los recursos creados para la secuencia didáctica. Esta falta de implementación del recurso incidió en que los estudiantes presentaran mayores dificultades en el manejo de las escalas. Al realizarlo manualmente, este procedimiento requirió casi el doble de tiempo.

*Sesión 11.* Se modificó la redacción de la presentación de las ecuaciones en forma estándar. Los contextos se redactaron de manera que se relacionaran más con la tarea transversal. Se conservó la complejidad e intención de evaluación. Por otra parte, no fue posible implementar el recurso Ecuacartas, creado para la ejercitación lúdica, por limitaciones de tiempo.

## 7. Balance estratégico de la implementación

Como complemento al diseño e implementación de la unidad, a continuación presentamos un balance de la implementación, en el que identificamos sus fortalezas, oportunidades, debilidades y amenazas. El propósito de este apartado es ofrecer mayor información para futuras implementaciones.

### 1. Fortalezas

Una vez implementada la unidad didáctica, y teniendo en cuenta los resultados obtenidos con los estudiantes, consideramos que la secuencia propuesta posee

fortalezas especialmente relacionadas con el diseño, la fundamentación teórica, los contextos de las tareas y las dinámicas de clase.

La fortaleza relacionada con el diseño se refiere a las tareas de transición y la tarea transversal. Las tareas de transición permitieron consolidar capacidades del objetivo previo y sirvieron para desarrollar capacidades adicionales para el siguiente objetivo. Por su parte, la tarea transversal permitió que los estudiantes dieran sentido a las otras tareas, en cuanto plantearon sistemas de ecuaciones lineales, elaboraron tablas y aplicaron conceptos como el de velocidad. Estas tareas ofrecieron un repertorio de recursos para su solución, como los acetatos y el uso del programa Geogebra.

Respecto a la fundamentación teórica, resaltamos que el trabajo realizado desde la delimitación del foco de contenido y la revisión bibliográfica facilitó la determinación de las expectativas de aprendizaje, el diseño de las tareas y la inclusión de instrumentos para la recolección de datos —por ejemplo, los diarios, las parrillas de observación y la autoevaluación—.

Los contextos de las tareas representan una fortaleza sobresaliente. Se ofrece un conjunto de situaciones que no están enmarcadas únicamente en contextos matemáticos convencionales, como la representación de rectas en el plano o la determinación de rectas que pasan por un punto. Se incluyen situaciones sociales y laborales, como velocidades de autos y situaciones económicas de ventas y costos, todas ellas acompañadas del uso de recursos novedosos para los estudiantes.

El uso del diario del estudiante y la autoevaluación generaron la participación de los escolares en su proceso de aprendizaje, ya que sus reflexiones sobre el aprendizaje fueron parte fundamental de su proceso de evaluación.

Por último, la agrupación de los estudiantes y las dinámicas propuestas para cada sesión fueron también una fortaleza de la unidad didáctica. El trabajo por parejas y el papel dado al profesor permitieron a los participantes percibir una clase de matemáticas en la que el profesor no era la fuente única de información y en la que las parejas desempeñaban el papel de validadores del conocimiento. El uso dado a los recursos trasciende la mera mediación y consolida las capacidades. La manipulación no estuvo sujeta a unas instrucciones rígidas, sino abiertas a la intencionalidad del estudiante.

## 2. Oportunidades

Las fortalezas descritas anteriormente se complementan con unas circunstancias que hemos detectado como oportunidades para la unidad didáctica.



En primera instancia, la metodología en resolución de problemas propuesta es coherente con los lineamientos curriculares y la evaluación formativa mencionada en los estándares básicos de competencias. Además, el auge del constructivismo en los PEI de las instituciones brinda la oportunidad de implementar la unidad didáctica con las características que tiene. Así mismo, existe una política nacional (MEN, 2006b) que promueve el uso de TIC en el aula, con lo cual la unidad didáctica es propicia por la utilización de los recursos propuestos y las fuentes de información de la tarea transversal en la web. También, encontramos que los recursos elaborados se pueden utilizar en actividades de enseñanza de otros contenidos matemáticos relacionados con situaciones de variación lineal.

Por otra parte, existe un interés en los maestros de matemáticas por enriquecer los contextos en los que los estudiantes pueden resolver problemas. Por consiguiente, situaciones como el automovilismo permiten motivar a los estudiantes en el desarrollo de todas las capacidades descritas. Finalmente, la difusión de la unidad didáctica en posteriores versiones de MAD y en los grupos de profesores que conforman el área de matemáticas en las instituciones de los integrantes del Grupo 4 es una oportunidad cercana para posteriores implementaciones.

### 3. Debilidades

Así como hemos identificado fortalezas y oportunidades, también cabe reconocer ciertas debilidades que detectamos al evaluar la unidad. Al observar las dificultades que presentaron los estudiantes en el desarrollo de la tarea transversal, encontramos dos deficiencias: (a) las cuatro primeras tareas no se relacionan directamente con el contexto de la tarea transversal, y los estudiantes lo pueden percibir así; y (b) no hay escritos en los que se evidencien los procesos y reflexiones finales de las parejas en la solución de la tarea; con ellos habríamos obtenido más información relacionada con las estrategias usadas por cada pareja. Paralelamente, consideramos que faltaron espacios para la concreción de conceptos físicos como el de velocidad. Es decir, faltó diseñar tareas de profundización y refuerzo extraclase.

Respecto al examen final, encontramos que, a pesar de la reformulación, no nos brindó información concreta respecto a la capacidad de los estudiantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método gráfico. Además, no fue posible implementar el juego Ecuacartas por la falta de previsión de tiempo en la última sesión. Finalmente, notamos que la complejidad

en el diligenciamiento de instrumentos de seguimiento (diarios y parrillas de observación) dificultó la tarea del maestro. Por lo tanto, es pertinente simplificar su diseño.

#### **4. Amenazas**

Dentro de los impedimentos que pueden llevar a que la unidad didáctica no sea adoptada, tenemos amenazas de dos tipos: referentes a prácticas tradicionales en el aula y las que se refieren a la carencia de recursos. Respecto a las del primer tipo, encontramos prácticas de enseñanza tradicionales en las que el profesor es el centro del conocimiento, es el único que indica cómo se debe resolver una tarea y los problemas planteados tienen únicas soluciones; el error se castiga y no se ve como una oportunidad de reflexión. En cuanto a las dinámicas tradicionales de aprendizaje, no existen hábitos de registro de datos, se evidencia la dependencia al desarrollo de ejercicios de reproducción, hay pocos hábitos de trabajo en equipo y los estudiantes están acostumbrados a ser promovidos sin cumplir los objetivos propuestos para el año escolar. Sobre la carencia de recursos, cabe mencionar que el desconocimiento de las características de los contextos en algunas tareas lleva a no aprovechar efectivamente los recursos y a no disponer de tareas alternas que aporten a la consecución de los objetivos propuestos.

#### **5. Propuesta del nuevo diseño para futuras implementaciones**

El primer aspecto que proponemos para futuras implementaciones es extender el número de sesiones de la secuencia didáctica, para procurar mayor efectividad en el desarrollo del diagnóstico, la tarea transversal y la implementación del juego Ecuacartas. En el caso de la tarea diagnóstica, consideramos que el tiempo de ejecución y los requerimientos se pueden ampliar para atender las dificultades de tipo numérico y algebraico. También proponemos la aplicación de actividades extraclase que se relacionen con la secuencia didáctica. Por último, creemos acertado elaborar un examen final diversificado (escrito y expositivo), centrado en la aplicación del método gráfico para hallar la solución de sistemas de ecuaciones lineales. La figura 16 muestra la distribución de la secuencia didáctica por sesiones que proponemos para futuras implementaciones.

Se observa que se aborda la tarea transversal desde la sesión 3, con el objetivo de profundizar en el diagnóstico de los estudiantes y con la intención de reforzar procesos aritméticos, algebraicos y geométricos necesarios para tareas posteriores. La sesión 8 se dedica exclusivamente a socializar y exponer la

primera versión del plan de ejecución para resolver la tarea Gran Premio de Brasil F1. La sesión 13 se dedica únicamente a la ejercitación lúdica con el juego Ecuacartas. Se propone dedicar una sola sesión para el examen final al cierre de la unidad. También, hemos resaltado las primeras cuatro tareas para llamar la atención sobre la necesidad de su adaptación al contexto de la Fórmula 1 y, con ello, el refuerzo de conceptos como el de velocidad.



S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14
Aplicar			Comprender			Modelar						 2 a 4 jugadores 	Examen final	
FR	Refuerzo	SE	RP	ER	GP	BC	CO/HE	GP	GP					
Diagnóstico		Gran premio de Brasil												
	Motiv.	P/E	E	E	E/R	R	R	R	R	R				
Planteamiento(P)			Ejecución(E)			Resolución(R)								

Figura 16. Propuesta de la secuencia para futuras implementaciones

## 8. Conclusiones

El análisis didáctico nos permitió diseñar una unidad didáctica estructurada y coherente. Las expectativas de aprendizaje cubren el foco de contenido y abordan el estándar seleccionado. La secuencia de tareas pone en juego los diferentes sistemas de representación del tema, los contextos a partir de su estructura semántica, las situaciones y competencias propuestas en PISA. Igualmente formulamos la espina de pescado como una representación en la que se permite relacionar los caminos de aprendizaje con los errores y las posibles actuaciones del maestro. Se elaboró material y se adaptaron programas como Geogebra y Excel a los objetivos de la unidad didáctica.

Es también valioso mencionar, que el diseño de la unidad didáctica representa una novedad en su género, pues vincula dos tipos especiales de tareas

como las de transición entre objetivos y la transversal. Las capacidades relacionadas en estas tareas abordan principalmente la competencia modelar. Su desarrollo se facilitó por la forma en que la tarea transversal fue pensada. Esta tarea retoma las capacidades desarrolladas en otras tareas para luego aplicarlas en un contexto real y abierto con el objetivo que el estudiante modele situaciones como la velocidad de un móvil.

El trabajo desarrollado por las parejas mostró compromiso e interés por las tareas. Sus presentaciones evidenciaron creatividad y motivación por hacer el trabajo lo mejor posible. Se identificaron con facilidad los roles que se asumieron al interior de las parejas: unos dedicados a la consulta de información, otros dedicados a la elaboración de la presentación y, en conjunto, dando solución a la tarea transversal.

Por lo anterior, podemos afirmar que los logros en las capacidades de los estudiantes son consecuencia de la disposición que se hizo de las nueve tareas. El sistema de evaluación, que se apoya en el análisis del logro de expectativas de aprendizaje, tomando como indicadores las capacidades que el alumnado desarrolla y manifiesta, es coherente con el resto de los análisis.

## 1. Reflexiones

El diseño e implementación de la unidad representa un valioso crecimiento profesional para los miembros del grupo. Este crecimiento se refiere especialmente a la posibilidad de realizar planificaciones basadas en dimensiones del currículo más allá de los meros contenidos y en la posibilidad de establecer coherencia entre los distintos objetivos y entre objetivos, tareas y el sistema de evaluación. Es también de gran satisfacción haber logrado avances y aportes al análisis didáctico con el establecimiento de redes conceptuales como lo fueron las subestructuras matemáticas y la creación de materiales y recursos para el desarrollo de las tareas.

El diseño e implementación de la unidad didáctica permitió replantear dinámicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En particular, nos referimos a aquellas relacionadas con cambios en algunos paradigmas. Es el caso de considerar las situaciones matemáticas asociadas a una única solución, asumir el rol del maestro como el único poseedor del saber y asociar el aprendizaje de las matemáticas con la mecanización de algoritmos. En palabras de Skovsmose (2000), “la educación matemática crítica enfatiza el hecho de que las matemáticas no son simplemente una materia que debe enseñarse y aprenderse... Construir una crítica a las matemáticas como parte de la educación matemática

es una preocupación central de la educación matemática crítica. Parece que tales preocupaciones se pueden manejar de una manera más apropiada por fuera del paradigma del ejercicio”.

Los estudiantes y profesores de matemáticas de la Institución Compartir también manifestaron su satisfacción con la unidad. Ella representó una oportunidad de aprendizaje y el reconocimiento de nuevas formas de enseñar y aprender las matemáticas escolares. Los maestros del área de matemáticas percibieron en los grafos de los caminos de aprendizaje la necesidad de considerar al menos dos caminos de aprendizaje en el momento de abordar una temática en clase. Conocieron las bondades de una situación problema abierta en la que la información está en disponibilidad por fuera del maestro. Además, ellos pudieron reflexionar sobre los límites que impone un modelo matemático a la realidad percibida por el estudiante, como lo fue el concepto de velocidad desde un sistema de ecuaciones lineales.

## 9. Referencias

- Bordas I., & Cabrera F. (2001). Estrategias de evaluación de los aprendizajes entrados en el proceso. *Revista española de pedagogía*, LIX, enero-abril. N218.
- Grupo Azarquiel (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Institución Educativa Compartir Bochica (2010). *PEI: Formación en valores y en empresa para el desempeño en sociedad*. Bogotá DC, Colombia: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006a). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá DC, Colombia: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1994). *Ley General de Educación 115*. Bogotá DC, Colombia: Autor.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, & P. Gómez. *Educación Matemática* (pp. 69-108). México DF, México: Grupo Editorial Iberoamérica y “una empresa docente”.
- Rodríguez-Domingo, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólica por estudiantes de secundaria* (Tesis de Maestría, Universidad de Granada). Granada, España.
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26. Recuperado de [http://funes.uniandes.edu.co/1122/1/70\\_Skovsmose2000Escenarios\\_RevEMA.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1122/1/70_Skovsmose2000Escenarios_RevEMA.pdf)

## 10. Bibliografía

- Institución Educativa Compartir Bochica (2010). *PEI: Formación en valores y en empresa para el desempeño en sociedad*. Bogotá DC, Colombia: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá DC, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1996). *Resolución 2343*. Bogotá DC, Colombia: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1994). *Decreto 1860*. Bogotá DC, Colombia: Autor.
- Rico, L. (2005). *La competencia matemática en PISA*. Conferencia impartida en el VI Seminario de Primavera: la Enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA. Madrid, España.
- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la Educación Matemática crítica*. Bogotá: una empresa docente.

## 11. Anexos

Los anexos de este capítulo se encuentran disponibles en <http://funes.unian-des.edu.co/1893/>

1. Relación competencias MEN y PISA
2. Fenomenología del foco de contenido
3. Planeación semanal 9º IE Compartir Bochica
4. Primeras tareas por objetivo
5. Grafos de caminos de aprendizaje por objetivos
6. Resumen expectativas y limitaciones de aprendizaje
7. Materiales y recursos
8. Parrillas de observación de las tareas
9. Rúbricas de valoración de tareas de transición y transversal
10. Examen final de la secuencia
11. Criterios de logro por objetivo
12. Análisis de tarea transversal – niveles de complejidad PISA
13. Planilla de corrección de tarea transversal
14. Categorización de los instrumentos de evaluación