



II CEMACYC

II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

29 octubre al 1 noviembre. 2017

Cali, Colombia

ii.cemacyc.org



CIAEM
CME
desde - since 1961



El número real en la obra matemática de René Descartes

María Alexandra Fregueiro

Consejo de Formación en Educación (CFE)

Uruguay

suresmeralda@hotmail.com

Resumen

Las actividades que se proponen en este taller están orientadas a docentes y futuros docentes. Su diseño se fundamenta en un análisis histórico-epistemológico del uso de los números reales en la obra *La geometría* de René Descartes. El objetivo es presentar una interpretación geométrica de los números reales a partir de la noción de segmento de recta y de las operaciones aritméticas definidas en el contexto geométrico. Se exponen algoritmos geométricos para la suma, multiplicación, división y extracción de la raíz cuadrada asociadas al número real en el contexto geométrico. Las tareas que componen el taller están diseñadas para familiarizar a los participantes con una interpretación geométrica del número real y los algoritmos geométricos de las operaciones mencionadas, buscando enriquecer los significados asociados a este saber a partir del tránsito entre los contextos geométrico, aritmético y algebraico.

Palabras clave: Número real, Epistemología, Uso cartesiano del número, Historia de la matemática.

Introducción

El número real es considerado como pilar fundamental para el desarrollo del cálculo y del análisis en estudios superiores (Bergé 2006, Bergé y Sessa 2003, Artigue 1998, Romero 1995, Mora y Torres 2004). Para hacer posible la institucionalización de este saber en el aula, éste debe sufrir diversas transformaciones para que su transposición esté cargada de significados para el estudiante. Esto nos lleva como docentes a analizar y discutir posibles significados asociados al concepto de número real que permitan ser construidos significativamente en el ámbito escolar acorde a las necesidades que cada nivel educativo requiera.

El tránsito entre contextos (aritmético, algebraico, geométrico) se produce de manera natural en la matemática escolar, ya sea para calcular longitudes, áreas y volúmenes de figuras geométricas o para asociar algunas expresiones algebraicas con curvas geométricas, con

tangentes y normales a ciertas curvas, como también para construir expresiones algebraicas que representen diversas figuras geométricas en el contexto algebraico.

En el Libro I de *La Geometría* de René Descartes encontramos evidencia del tránsito entre los contextos aritmético, algebraico y geométrico de ciertos números reales, lo cual puede enriquecer los significados asociados a este saber, puesto que el transitar por diversos contextos con un mismo saber permite que el estudiante adquiera una visión holística acerca de los significados asociados. Consideramos que la manera como Descartes usa el número posibilita un acercamiento a conocer un momento de la historia donde se evidencia un posible origen vinculado a este tránsito entre contextos que hoy empleamos con naturalidad y que nos permite en cierta forma comprender la validez del mismo.

Se busca entonces considerar a esta parte de la obra de Descartes, y en particular el uso del número real que despliega, como una fuente de significados para la matemática escolar. Para ello, el análisis que se ha realizado parte de reconocer la obra socioculturalmente en un tiempo y un espacio, con una cierta intencionalidad y producto del hombre haciendo matemáticas. Con la finalidad de enfatizar estas características epistemológicas, se hablará del *uso cartesiano del número* y de la *obra cartesiana*.

A partir de considerar el uso cartesiano del número, se presentan actividades que buscan ponerlo en juego, dando lugar a analizar el tránsito entre contextos y a la reflexión sobre posibles validaciones del mismo.

Usos cartesianos del número

El uso de un conocimiento matemático es un constructo teórico dentro de la Socioepistemología¹ que permite dar una explicación acerca de la construcción social del conocimiento matemático. Cordero y Flores (2007) y Buendía (2012) proponen evidenciarlo a partir del funcionamiento y la forma del conocimiento matemático particular que es posible identificar cuando este se pone en juego para resolver una situación específica sociocultural e históricamente situada. El funcionamiento de un conocimiento matemático hace referencia a la utilidad que tiene para el grupo humano dicho conocimiento con el fin de resolver la situación planteada. La forma de un conocimiento matemático alude a cómo actúa, cómo argumenta, cómo percibe dicho conocimiento el grupo humano en cuestión.

El análisis histórico epistemológico llevado a cabo del Libro I de la obra cartesiana *La Geometría* permitió identificar tres situaciones particulares donde el número real se pone en juego (Fregueiro, 2014).

Las situaciones identificadas son:

S1: La construcción de algoritmos geométricos para las operaciones aritméticas.

S2: La construcción de algoritmos geométricos para la resolución de ciertas ecuaciones algebraicas.

S3: La representación en lenguaje algebraico de problemas que tienen origen en el contexto geométrico.

En cada una de las situaciones mencionadas se identificaron diversas formas y funcionamientos que permiten evidenciar el uso cartesiano del número real:

Uso geométrico-aritmético asociado a S1. Las tareas que se identifican en esta situación

¹ La Socioepistemología es un enfoque teórico ubicado dentro de la Matemática Educativa cuyo objetivo principal radica en problematizar el saber matemático reconociendo su construcción social y su difusión institucional. El análisis del saber problematizado se lleva a cabo considerando de manera sistémica cuatro dimensiones, la epistemológica, la didáctica, la cognitiva y la social.

están ligadas a la construcción de algoritmos para la multiplicación, la división, la extracción de la raíz cuadrada y la potenciación de un número en el contexto geométrico. Es posible identificar formas asociadas a segmentos de recta, que aparecen ligadas en general a lados de triángulos y radios de circunferencias y permiten visualizar el número como producto, cociente, raíz cuadrada y potencia. A través de ellas se evidencia el funcionamiento de los números reales positivos construibles por el método euclídeo², del segmento unidad, de la multiplicación.

Uso geométrico-algebraico asociado a S2, donde se identifican tareas como la representación de expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones en el contexto geométrico. Se evidencian formas como las presentadas en el uso anterior, letras asociadas a los segmentos y a las operaciones que se han definido, expresiones algebraicas definidas en el contexto geométrico. Los funcionamientos están asociados a la construcción geométrica de soluciones. La construcción de estas soluciones pone en funcionamiento la estructura aritmética definida y en particular la suma, la multiplicación y la extracción de la raíz cuadrada.

Uso geométrico-analítico asociado a S3. La tarea que se evidencia es expresar en lenguaje algebraico problemas que tienen origen en el contexto geométrico: en la obra de Descartes se evidencia la necesidad de presentar una solución general para el problema de Pappus³. Se identifican formas asociadas a segmentos de recta vinculados por determinadas relaciones, letras y expresiones algebraicas definidas en el contexto geométrico, la presencia incipiente de ejes coordenados. Dichas formas están asociadas a funcionamientos tales como la igualación de expresiones, la identificación de relaciones de proporcionalidad, la sustitución de expresiones equivalentes y la construcción de soluciones para la expresión algebraica encontrada.

El diseño de las actividades que se proponen en este taller surge como resultado de los usos identificados en la obra cartesiana.

El taller

El taller se desarrollará en tres momentos: presentación de los algoritmos geométricos para las operaciones aritméticas de suma, diferencia, multiplicación, división y extracción de la raíz cuadrada. A continuación se entregará a los participantes las actividades para ser trabajadas en grupos de dos o tres integrantes, generando espacios para la discusión y la puesta en común. El taller finaliza con el análisis de los tránsitos entre contextos que sea posible evidenciar asociados al número real y analizando la validez de los algoritmos aritméticos definidos en el contexto geométrico.

Primer momento

Se entrega a los participantes una hoja con los algoritmos geométricos para las operaciones de suma, diferencia, multiplicación, división entre segmentos y la extracción de la raíz cuadrada de un segmento. Se realizará una explicación detallada de cada uno de estos algoritmos, esta primera parte es fundamental que quede clara para que los talleristas puedan abordar las actividades diseñadas.

² La construcción de números reales usando el método euclídeo hace referencia al uso exclusivo de regla sin graduar y compás.

³ En términos actuales el problema de Pappus se puede traducir:

“Dadas $2n$ rectas, encontrar el lugar de los puntos tales que el producto de sus distancias, bajo ángulos dados, a n de esas rectas está en una relación dada con el producto de las distancias, bajo ángulos también dados, a las otras n rectas.” (Hernández 2002, pág. 40, citado por Fregueiro 2014).

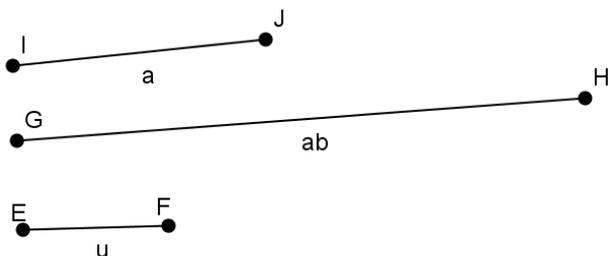
Segundo momento

Se entregará a los participantes una hoja con todas las actividades a ser abordadas en el taller, todas están vinculadas a la construcción de figuras geométricas, dichas construcciones será posible realizarlas solo usando los algoritmos geométricos presentados en el primer momento del taller. Es fundamental la participación activa de los presentes, luego de cada resolución ser realizará una puesta en común para discutir las formas de resolución utilizadas e ir enfatizando el uso de los números reales en el contexto geométrico. Los ejercicios requieren del tránsito entre los contextos geométrico, algebraico y aritmético para ser resueltos. Las actividades no son cerradas, pueden ser resueltas de diversas maneras, pero todas ellas requieren el uso de los algoritmos geométricos para las operaciones aritméticas.

Las actividades

Actividad 1

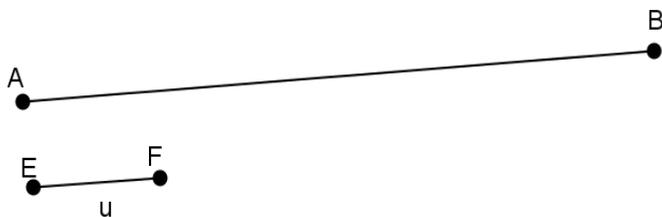
Construye un rectángulo conociendo el segmento $[I,J]$ correspondiente a uno de sus lados y el segmento $[G,H]$ asociado al área del mismo. $[E,F]$ corresponde al segmento unidad.



La resolución de esta actividad requiere hacer uso del algoritmo para la división puesto que para ser construido el rectángulo se debe construir el segmento asociado al lado no conocido de éste. La representación geométrica del número queda en evidencia al asociar el valor del área del rectángulo con el segmento $[G,H]$.

Actividad 2

a.- Construye un triángulo rectángulo sabiendo que $[A,B]$ es un segmento asociado al cuadrado de la hipotenusa y que uno de sus ángulos mide 60° , con $[E,F]$ como segmento unidad. Fundamenta tu construcción.



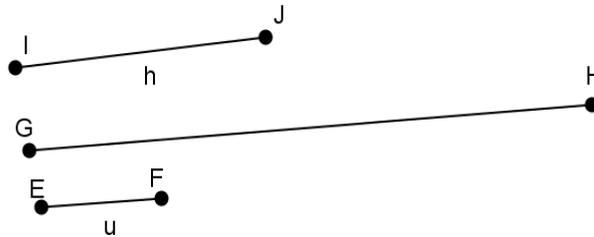
b.- Construye el segmento asociado al valor de su área.

Esta actividad pone en juego el algoritmo geométrico para la extracción de la raíz cuadrada y la multiplicación. Nuevamente, la representación geométrica del número real queda

evidenciada tanto en la construcción de un segmento asociado al valor del área como también en tener como dato inicial el valor del cuadrado de la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Actividad 3

a.- Construye un triángulo isósceles conociendo el segmento $[G,H]$ asociado al valor del área y el segmento $[I,J]$ correspondiente al cuadrado de la altura respecto de la base, siendo $[E,F]$ el segmento unidad. Fundamenta tu construcción.

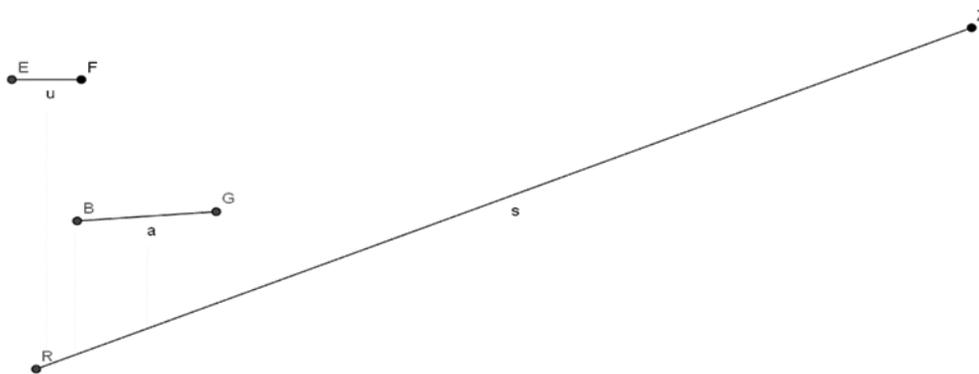


b.- Construye el segmento asociado al valor del perímetro.

Este ejercicio aumenta la complejidad y requiere el uso de los algoritmos de multiplicación, división y extracción de la raíz cuadrada para su resolución. La representación geométrica del número se evidencia asociando segmentos a valores de áreas y perímetros.

Actividad 4

Construir un pentágono regular conociendo $[R,Z]$, uno de los segmentos asociado a su área, y $[B,G]$, un segmento que representa su apotema, con $[E,F]$ como segmento unidad.



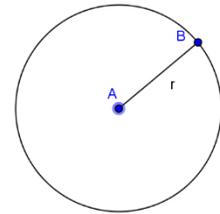
Esta actividad requiere del uso de los algoritmos de división y multiplicación. Para lograr la construcción pedida, se deberá realizar un esbozo y plantear una ecuación vinculada al cálculo del área de un pentágono regular.

Actividad 5

Considera la $\mathcal{C}_{A,r}$

a.- ¿Es posible construir un segmento que represente la longitud de la misma?

b.- ¿Y que represente el área del círculo?



Esta actividad invita a analizar qué números reales son factibles de representar en el contexto geométrico usando solo regla sin graduar y compás, lo que nos llevará a plantear una clasificación de los números reales en construibles y no construibles por el método euclidiano.

La resolución de los ejercicios propuestos requiere del tránsito entre los contextos aritmético, algebraico y geométrico. Los participantes deberán realizar esbozos de figuras geométricas y realizar manipulaciones operatorias para lograr construir las figuras pedidas.

Tercer momento

Luego de realizar la puesta en común de los ejercicios planteados, donde analizaremos las distintas formas de resolución que adoptaron los participantes, observaremos que para realizar las construcciones se requirió de un tránsito entre contextos. Este tránsito quedará evidenciado en la necesidad de realizar esbozos de las figuras pedidas y el uso y resolución de ecuaciones algebraicas sencillas para encaminar la construcción de segmentos necesarios para la construcción de las figuras geométricas. Observaremos que la representación de los números reales se observa tanto en la presencia de segmentos asociados a áreas y perímetros como también al uso de datos del contexto geométrico en el contexto aritmético-algebraico.

Se abordarán las siguientes cuestiones: ¿Cómo podemos probar la validez de los algoritmos geométricos para las operaciones aritméticas usados? ¿Qué conocimientos matemáticos se ponen en juego cuando probamos la validez de los mismos?

La demostración de la validez de los algoritmos geométricos presentados pondrá en juego conocimientos matemáticos como el teorema de Thales, el teorema de la altura, semejanza de triángulos entre otros que pueden surgir durante el desarrollo del taller.

El análisis de los conocimientos matemáticos puestos en juego para demostrar la validez de los algoritmos nos permitirá discutir si es factible presentar alguno de ellos en el aula de matemática y de qué forma puede hacerse.

Conclusiones

Las actividades propuestas buscan mostrar una forma de representar geoméricamente a algunos números reales y algunas operaciones vinculadas a él, analizando qué números reales es factible representar, identificar algunas de sus características e indagar cómo se dan los tránsitos entre los contextos geométrico, aritmético y algebraico. La propuesta está diseñada con la intención de que se requiera el tránsito entre contextos para ser resueltas, buscando abrir caminos para el diseño de actividades que promuevan dichos tránsitos. Propiciando así, generar un espacio de discusión donde podamos reflexionar sobre las potencialidades didácticas que puede aportar asociar un significado geométrico para el número real y las operaciones aritméticas.

Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de la investigaciones didácticas y los cambios curriculares?. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1(1), 40-55.
- Bergé, A. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes para una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(3), 163-197.
- Bergé, A. (2006). Análisis institucional a propósito de la noción de completitud del conjunto de los números reales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9(1), 31-64.
- Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, 24(2), 5-31.
- Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.
- Fregueiro, A. (2014). *Usos y resignificación del número real en la obra matemática de René Descartes*. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN. México.
- Romero, I. (1995). *La introducción del número real en Educación Secundaria* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Granada. España.