

APRENDER MATEMÁTICA, HACIENDO MATEMÁTICA: INVESTIGACIÓN EN EL AULA

Ángel Homero Flores Samaniego, Adriana Gómez Reyes, Xochitl Chávez Pérez
ahfs@unam.mx; orodelsilencio@yahoo.com.mx; matematica60_xch@hotmail.com
Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM, México

Tema: Pensamiento matemático avanzado.

Modalidad: CB

Nivel Educativo: Medio

Palabras clave: Evaluación formativa; modelación en la enseñanza; Profesor-investigador.

Resumen

Aprender Matemática, Haciendo Matemática es un modelo de enseñanza centrado en el estudiante y su aprendizaje (Flores, 2007) que se ha venido instrumentando desde 2006 en el Colegio de Ciencias y Humanidades y en algunos posgrados en Educación Matemática, como parte de las actividades del Seminario de Evaluación Alternativa en Matemática (SEAM). Para documentar el Modelo y validar su planteamiento teórico-metodológico, el SEAM ha diseñado un proyecto de investigación en el aula que se viene desarrollando desde enero de 2010 con el auspicio de la Iniciativa de Fortalecimiento de la Carrera Académica del Bachillerato (Infocab: Proyectos PB100111, PB101213 y PB101512) de la Universidad Nacional Autónoma de México.

En este trabajo se presentarán los resultados obtenidos hasta la fecha, poniendo énfasis en el uso de instrumentos de evaluación como rúbricas, matrices de resultados y listas de cotejo como instrumentos de investigación, y en la formación de docentes-investigadores. En particular se presentarán algunos resultados sobre el uso de la modelación matemática en actividades de enseñanza.

Introducción

Aprender Matemática, Haciendo Matemática es un modelo de enseñanza que se ha estado instrumentando en el bachillerato de la UNAM y en algunos cursos de posgrado desde 2006 por parte del Seminario de Evaluación Alternativa en Matemática (SEAM) del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM (integrado por profesores de Bachillerato); el modelo parte de dos premisas:

- a) El estudiante es el centro de todo el proceso de aprendizaje; por tanto, es él quién debe pensar y hacer la matemática con el fin de aplicar lo que ya sabe a situaciones específicas y aprender la matemática que le permitirá resolver nuevos problemas y establecer nuevas relaciones entre conceptos.

b) El estudiante es un ser humano que se desempeña en compañía de otros seres humanos y se relaciona con ellos, por tanto necesita sentirse seguro y con confianza para aprender dentro de una comunidad.

En este sentido, decimos que el modelo de enseñanza está centrado en el estudiante. La enseñanza centrada en el estudiante, o en el aprendiz, se ha venido desarrollando desde la década de 1950. La educación centrada en el aprendiz pone énfasis, entre otras cosas, en la empatía del profesor con sus estudiantes, una preocupación incondicional por su aprendizaje y el fomento de un pensamiento crítico. Existe un acoplamiento entre el enfoque centrado en el aprendizaje en general y el aprendizaje individual. Se basa en cuatro dominios: metacognitivo y cognitivo; afectivo y motivacional; social y de desarrollo de competencias; y de factores de diferencias individuales en un contexto específico (Cornelius-White, 2007, pp. 113-115). En nuestro caso, los cuatro dominios se engloban en las actividades de enseñanza y evaluación y en la creación de un **ambiente de enseñanza-aprendizaje (MAE)** de colaboración armónica.

La aplicación más o menos exitosa del Modelo nos llevó a plantear un proyecto de investigación encaminado a documentar los aspectos positivos del modelo y determinar su influencia en el desempeño del estudiante en cuanto al aprendizaje de la materia y con respecto a su convivencia en el aula.

Debido a la magnitud de la investigación, ésta se dividió en varias líneas que cuentan con objetivos y preguntas de investigación propias. En general, nos basamos en los lineamientos de la **investigación cualitativa**, tomando algunos aspectos de la **Investigación Acción** (Lewin, 1946) y los planteamientos sobre **investigación en el aula** hecha por profesores, Teacher-Research, de Michael Roth (Roth, 2007).

En particular diseñamos **una serie de experimentos de enseñanza encaminados a investigar los diferentes aspectos del modelo**. En dichos experimentos se abordan algunos contenidos matemáticos de Álgebra, Geometría Euclidiana y Geometría Analítica. Los resultados de las actividades son consignados en hojas de trabajo y, cuando es necesario, se hacen entrevistas semiestructuradas. Los resultados fueron analizados mediante instrumentos de evaluación formativa como matrices de resultados, listas de cotejo, rúbricas y bitácoras, entre otros.

En un principio se pensó que el proyecto se podría desarrollar en un lapso de entre dos y tres años. Con esta idea en mente, se propuso el proyecto, *Aprender Matemática, Haciendo Matemática: Investigación en el aula*, de dos años 2010-2012 que fue auspiciado por la Iniciativa para el Fortalecimiento de la Carrera Académica del Bachillerato (INFOCAB, proyecto PB 100111). De manera paralela, ante la necesidad de dotar de tecnología al SEAM en primera instancia y al Colegio de Ciencias y Humanidades en segunda, se llevó a cabo el proyecto PB101512 titulado *Aprender Matemática, Haciendo Matemática: El uso de tecnología*. Estos dos proyectos están culminados, aunque se quedaron abiertas varias líneas de investigación para trabajos futuros.

Una de tales líneas tiene que ver con el uso de diferentes software de Geometría Dinámica como apoyo en las actividades de enseñanza. En este caso se quiere hacer una revisión de tres software de Geometría Dinámica para determinar cuál es el más adecuado para el objetivo que se tenga y el tipo de actividad que se proponga. Los software que se van a comparar son *GeoGebra*, *The Geometer's Sketchpad* y *Cinderella*. El proyecto, con una duración de dos años) se inició en enero de 2013 y tiene como título *Software Dinámico en la enseñanza de la matemática* (INFOCAB PB 101213).

La investigación en el aula

Para efectos del presente trabajo comentaremos sólo dos de las líneas de investigación y resaltaremos la labor de investigación que puede hacer el docente en el aula y para el aula. Es decir, es posible, a partir de la sistematización de la evaluación formativa, que el docente enfrente e intente resolver algunos problemas de aprendizaje que detecte en sus estudiantes siguiendo las directrices de una investigación educativa, incluyendo la socialización de sus resultados. Las líneas son:

- a) Modelación matemática y el entendimiento del concepto de función.
- b) Instrumentos de evaluación como medidores del conocimiento.

La intención en esta línea es determinar la confiabilidad de instrumentos de evaluación formativa como medidores del conocimiento; se decidió hacer esto en el contexto de la enseñanza de semejanza de triángulos en Bachillerato.

Para determinar el grado de conocimiento o de entendimiento de un concepto es posible utilizar una rúbrica, en nuestro caso diseñamos una referente al concepto de semejanza de triángulos tomando en cuenta el programa del Colegio de Ciencias y Humanidades de 2004.

	Básico	Intermedio	Experto
Triángulos semejantes	No distingue triángulos semejantes de los que no son.	Reconoce triángulos semejantes dependiendo de su ubicación y su orientación.	Reconoce triángulos semejantes en cualquier circunstancia .
Relación entre los elementos	No reconoce las condiciones que garantizan la semejanza de los triángulos.	Reconoce la proporcionalidad entre los lados y la igualdad de ángulos correspondientes como condiciones de semejanza. Tiene dificultad para identificar lados y ángulos correspondientes.	Puede aplicar bien la semejanza sin confundir lados y ángulos correspondientes.
Proporcionalidad entre los lados	No sabe que los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales.	Plantea la proporcionalidad más como una regla de tres que como la igualdad de dos razones.	Sabe que los lados son proporcionales y puede establecer esta relación determinando la razón de proporcionalidad.
Resolución de problemas	No puede resolver problemas de semejanza de triángulos.	Resuelve problemas de semejanza pero no siempre con resultados correctos debido a que no identifican lados correspondientes.	Puede resolver problemas de semejanza de triángulos sin que haya equivocaciones debidas a un mal planteamiento de la proporcionalidad.

Tabla 1. Rúbrica sobre semejanza de triángulos.

La información necesaria para determinar en qué nivel de la rúbrica se encuentra un estudiante o un cierto equipo se toma de lo consignado en las hojas de trabajo que entregan los estudiantes al final de cada actividad, pero la información se encuentra *en bruto*, es necesario procesarla utilizando ciertos instrumentos que nos permitirán hacer un análisis más fino del conocimiento adquirido y su forma de utilizarlo. Parte de tales instrumentos son la lista de cotejo y la matriz de resultados.

Una lista de cotejo nos permite determinar qué aspectos de la resolución de un problema o del desarrollo de una actividad se están tomando en cuenta por parte de los

estudiantes, ya sea que estén trabajando en equipo o no. En la Tabla 2 se presenta la lista de cotejo correspondiente a la resolución del siguiente problema:

Un método para encontrar la altura de un objeto es colocar un espejo en el suelo y después situarse de manera que la parte más alta del objeto pueda verse en el espejo.

¿Qué altura tiene una torre si una persona de 150 cm de altura observa la parte superior de la torre cuando el espejo está a 120 m de la torre y la persona está a 6 m del espejo?

Aspectos	E1	E2	E3	E4
Localizan correctamente el espejo	✓	✓	✓	✓
Hacen cambio de unidades	✗	✓	✓	✓
Ubican en el dibujo las medidas correspondientes	✓	✓	✓	✗
Reconocen triángulos semejantes	✗	✗	✓	✓
Establecen las relaciones entre los elementos de los triángulos semejantes	✗	✓	✓	✓
Establecen correctamente la proporcionalidad entre los lados	✗	✓	✓	✓
Despejan correctamente y encuentra los valores deseados	✗	✓	✓	✓
Interpretan correctamente el resultado	✓	✓	✗	✗

Tabla 2. Lista de cotejo para el problema del espejo.

Al revisar las columnas de la lista de cotejo es posible darse cuenta del proceso que un cierto equipo o estudiante ha seguido en la resolución del problema y determinar sus fallas o sus aciertos; mientras que al revisar los renglones es posible determinar el desempeño del grupo completo en un cierto aspecto de la resolución del problema.

Por su parte, la matriz de resultados permite comparar los procedimientos y la aplicación de conceptos que el profesor desea que utilicen sus estudiantes con aquellos que realmente usan. En la Tabla 3 se presenta la matriz de resultados con respecto al problema del espejo. En esta versión de la matriz se presenta en la segunda columna el resultado esperado, en la tercera el resultado obtenido y en la cuarta las observaciones

del profesor. En otras versiones se puede dejar el enunciado del problema y la resolución esperada fuera de la tabla y en ésta consignar solamente los resultados obtenidos y las observaciones.

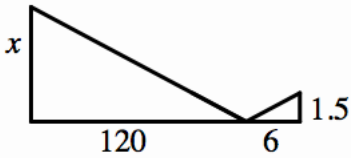
Enunciado	Resultado esperado	Resultados obtenidos	Observaciones
<p>Un método para encontrar la altura de un objeto es colocar un espejo en el suelo y después situarse de manera que la parte más alta del objeto pueda verse en el espejo.</p> <p>¿Qué altura tiene una torre si una persona de 150 cm de altura observa la parte superior de la torre cuando el espejo está a 120 m de la torre y la persona está a 6 m del espejo?</p>	 $\frac{120m}{6m} = \frac{x}{1.5m}$ $x = 30m$ <p>Por tanto, la torre mide 30 metros de altura.</p>	<p>E3</p> <p>Notamos que teníamos tres medidas, dos de ellas en el mismo triángulo y la otra en el triángulo restante, como observamos que eran triángulos semejantes, decidimos utilizar la regla de tres para sacar la altura del triángulo más grande.</p>	<p>Este equipo sí identificó que se trata de triángulos semejantes. Aunque no dicen por qué son semejantes. Usan la regla de tres para representar la proporcionalidad.</p>

Tabla 3. Matriz de resultados de problema del espejo.

Desde el punto de vista del profesor, el uso de estos instrumentos da la información necesaria para retroalimentar su enseñanza y mejorar todo el proceso; desde la perspectiva del investigador, da información sobre los resultados de un experimento de enseñanza.

Modelación matemática y el entendimiento del concepto de función

En esta línea de investigación, entre otras, se revisó la adquisición del concepto de función trigonométrica a través de la modelación matemática, entendida como el proceso de construcción de un modelo matemático que explique un fenómeno o reproduzca los datos obtenidos en un experimento.

En las figuras 1 y 2 se presenta una de las soluciones al siguiente problema:

La profundidad del agua en una playa varía con el tiempo debido a al fenómeno de las mareas. En una determinada playa se tiene una marea alta cada 12 horas y la profundidad del agua a 15 metros de la playa varía de 1.5 a 2.10 metros.

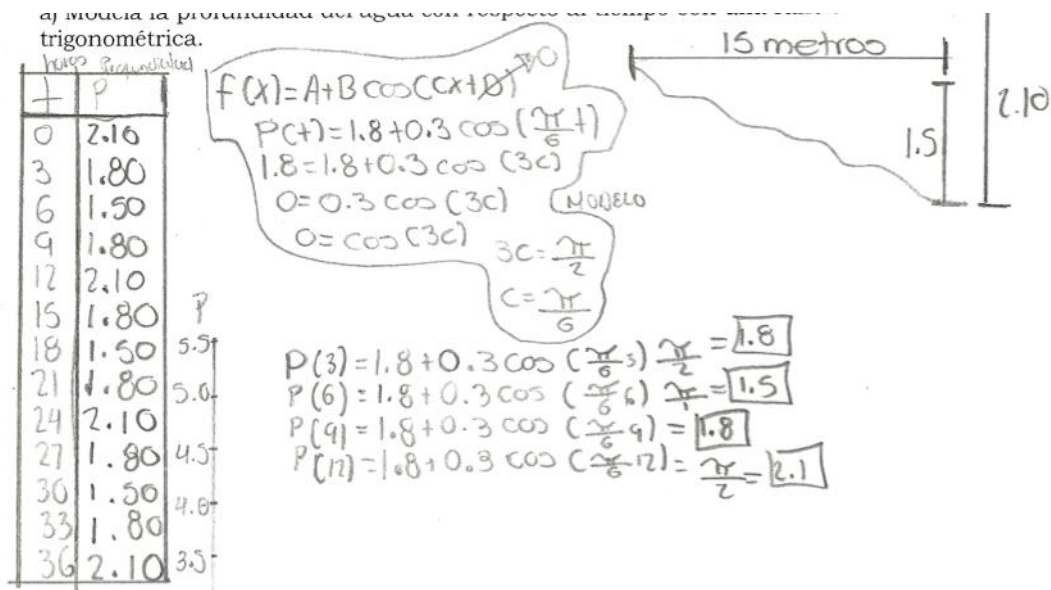


Figura 1. Respuesta al problema de la playa.

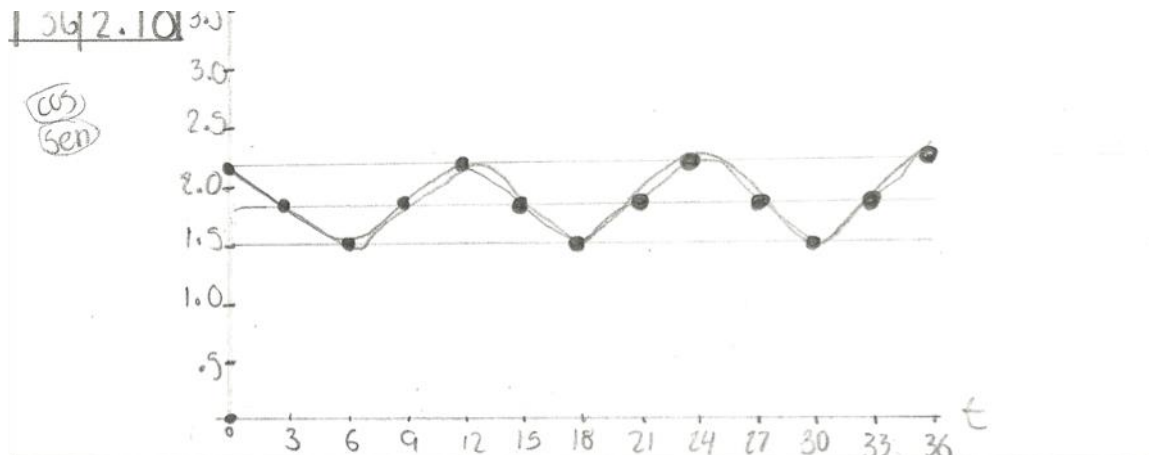


Figura 2. Gráfica correspondiente al problema de la playa.

La respuesta que se presenta es sólo un ejemplo de la forma en que los estudiantes utilizan la modelación matemática para resolver problemas. En este caso se trató de un procedimiento de ajuste de curvas en el cual el estudiante grafica algunos datos tomados del problema y después ajusta una curva. Aquí el objetivo del profesor es que el estudiante ponga en juego y aplique el conocimiento que tiene en la resolución de problemas para hacer una reflexión sobre el concepto de función trigonométrica; y para el estudiante el objetivo es modelar la situación que se le presenta, para ello debe hacer

una recapitulación del conocimiento que posee y del que necesita para encontrar el modelo (ya sea de manera individual o trabajando en equipo).

Conclusión

Los proyectos *Aprender Matemática*, *Haciendo Matemática* apuntan a documentar, mediante la investigación educativa, los aspectos positivos del modelo que lleva el mismo nombre. Pero más allá de esto, son un buen ejemplo de cómo se puede sistematizar la evaluación en el aula de modo que el profesor se convierta en un investigador educativo con la capacidad de plantear y resolver problemas de enseñanza y aprendizaje que surjan en el quehacer cotidiano de su docencia.

Llevar a cabo una evaluación formativa en el aula no es tarea fácil, pero ésta se va haciendo cada vez más sencilla en la medida en que se va conformando en parte integral de las actividades del docente en el aula.

Referencias

- Cornelius-White, J. (2007), Learner-Centered Teacher-Student Relationship are effective: a Meta Analysis, *Review of Educational Research*, vol. 77, No. 1, pp. 113-114.
- Flores, H., (2007) Aprender Matemática, Haciendo Matemática, *Acta Scientiae*, vol. 9, no. 1.
- Lewin, K., (1946). Action-Research and Minority Problems, *Journal of Social Issues*, 2, pp. 34-46.
- Roth, M-W., (2007) *Doing Teacher-Research: a handbook for perplexed practitioners*, Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.