

## CAPÍTULO 7

# RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

MAURICIO BECERRA, FREDY ARENAS, FREDY MORALES,  
LEONARDO URRUTIA, PEDRO GÓMEZ

### 1. Introducción y formulación del problema

Este documento es nuestro informe final de la unidad didáctica sobre razones trigonométricas. Es el trabajo final de MAD, la concentración en Educación Matemática, de la maestría en Educación, de la Universidad de los Andes.

Este trabajo nace de constatar que muchos profesores de matemáticas de grado décimo usan las razones trigonométricas como herramienta para solucionar ejercicios de resolución de triángulos, aplicados a problemas, sin tener en cuenta el contexto propio del estudiante. Por otro lado, la implementación en el aula de recursos o materiales para la enseñanza de la trigonometría se ha restringido al uso de la calculadora de funciones para determinar ángulos y longitudes en función de una razón trigonométrica particular. Desde esta problemática, diseñamos, implementamos y evaluamos la unidad didáctica de razones trigonométricas como propuesta de innovación en la Institución de Educación Distrital (IED) José Joaquín Castro Martínez. Esta unidad didáctica promueve la construcción del concepto razones trigonométricas a partir de situaciones que tienen sentido para el estudiante y que son cercanas a su propio contexto.

En el primer apartado presentamos la introducción y formulamos el problema. En el segundo apartado, presentamos la fundamentación de la unidad didáctica desde los contextos curricular, académico y socioeconómico. En el tercer apartado, caracterizamos el análisis didáctico como fundamento central del diseño, implementación y evaluación de la unidad didáctica. En el cuarto apartado, presentamos la descripción general de la secuencia de tareas. En el quinto apartado, justificamos el diseño de la unidad didáctica desde dos perspectivas: (a) las condiciones socioeconómicas de los estudiantes y (b) la conveniencia, pertinencia y coherencia de la unidad didáctica desde el análisis del foco de contenido. En el sexto apartado, presentamos la descripción de la

implementación. En el séptimo apartado evaluamos la implementación a partir de las modificaciones menores y significativas, y de un estudio de caso. En el octavo apartado, realizamos el balance de la unidad didáctica a partir del análisis de debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades (DAFO), y presentamos una nueva propuesta de la unidad didáctica. En el último apartado, exponemos algunas conclusiones.

## 2. Fundamentación desde los contextos

Fundamentamos el diseño de la unidad didáctica atendiendo a los contextos curriculares, académicos y socioeconómicos. A continuación se presenta cada uno de los contextos, al caracterizar los documentos curriculares y la población de estudiantes con quienes se implementó la unidad didáctica.

### 1. Contexto curricular

Para la planificación del grado décimo se debe atender a los *Lineamientos curriculares de Matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998), los *Estándares básicos de competencias en Matemáticas* (MEN, 2006) y el Decreto 1290 (MEN, 2009).

Los *Lineamientos curriculares de Matemáticas* permiten organizar la planificación a partir de tres aspectos: (a) los conocimientos básicos, (b) los procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje y (c) los contextos. De esta manera, para nuestra planificación tendremos en cuenta el pensamiento espacial y los sistemas geométricos (para los conocimientos básicos); la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la ejercitación de procedimientos, la modelación y el razonamiento (para los procesos generales); y las situaciones problemáticas que estén relacionadas con la vida diaria y las matemáticas mismas (para los contextos).

Los estándares “permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los y las estudiantes en el transcurrir de su vida escolar” (MEN, 2006, p. 12). El estándar que abordaremos para el desarrollo de las razones trigonométricas es “Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas” (MEN, 2006, p. 88).

Tendremos en cuenta tres competencias para organizar el estándar: (a) formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana y de las matemáticas mismas; (b) utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar

ideas matemáticas; y (c) dominar procedimientos y algoritmos matemáticos (MEN, 2006, p. 51).

El Decreto 1290 reglamenta la evaluación y la promoción de los estudiantes de los niveles de educación básica y media en las instituciones. Este decreto permite establecer los criterios de evaluación, la escala de valoración, el proceso de autoevaluación y las acciones para el seguimiento de los desempeños de los estudiantes y los procesos evaluativos. Atendemos a estos criterios en el diseño e implementación de nuestra unidad didáctica.

## 2. Contexto académico

El plan de estudios del IED José Joaquín Castro Martínez plantea una visión de las matemáticas fundamentada en los *Lineamientos curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998), basada en seis propósitos generales pensados alrededor del fortalecimiento de los cinco procesos generales contemplados en ese documento. El proceso general del campo matemático busca desarrollar el pensamiento matemático por medio del establecimiento de las relaciones entre los sistemas numérico, métrico, geométrico, algebraico y analítico, y de datos. Como subproceso para el quinto ciclo (al que pertenece el grado décimo) se plantea la modelación de los conceptos matemáticos a partir de la elaboración de representaciones de la realidad. La estructuración y la distribución del campo específica, para el quinto ciclo, una intensidad horaria semanal de cuatro horas, dividida en cuatro sesiones de sesenta minutos cada una.

El diseño de nuestra unidad didáctica aporta al desarrollo del primer logro promocional de grado décimo, en el que se busca que el estudiante comprenda la naturaleza y los campos de aplicación de las matemáticas. Cada uno de los cuatro logros promocionales tiene el mismo valor porcentual dentro de la evaluación global del campo matemático. Esto quiere decir que el Sistema Institucional de Evaluación (SIE) del colegio establece que la promoción de un estudiante a undécimo grado requiere que el estudiante haya dado buena cuenta de los cuatro logros promocionales abordados durante todo el año escolar.

Las sesiones de clase de matemáticas generalmente se desarrollan en pequeños grupos y sin contar con ningún libro de texto permanente como referencia. Estos elementos se tuvieron en cuenta para el diseño de nuestra unidad didáctica.

## 3. Contexto socioeconómico

Nuestra unidad didáctica se diseñó para ser implementada en el IED José Joaquín Castro Martínez, ubicado en el suroriente de Bogotá, en el barrio Bello

Horizonte, de la localidad cuarta, San Cristóbal. Los barrios de esta localidad pertenecen a los estratos 1 y 2, y presentan unas condiciones socioeconómicas bajas, con problemas de inseguridad, violencia y pobreza, entre otros.

Los estudiantes de grado décimo de esta institución tienen entre 15 y 17 años. La gran mayoría de estos estudiantes ha hecho todos sus estudios de bachillerato en la institución, porque viven en los alrededores del colegio, y una minoría de ellos proviene de zonas rurales del país en situación de desplazamiento. Las características individuales de los estudiantes afectan de distinta forma su rendimiento académico. Pese a que existen notables diferencias de tipo conceptual entre los estudiantes, ellos logran complementar su trabajo a partir de la discusión y la argumentación que se da en los grupos que ellos mismos organizan. La conformación de estos grupos se basa en la idea que sus integrantes manejan de la amistad, la confianza y la responsabilidad. Por otro lado, sus motivaciones se centran en la idea de un ejercicio académico en pro de una mejor vida que afecte de forma directa su estado socioeconómico actual. Por tanto, el estudio de las matemáticas, para un buen número de ellos, es tan solo una meta en la extensa carrera de obtener un título que los acredite como bachilleres académicos.

### **3. Análisis didáctico de las razones trigonométricas**

El análisis didáctico es un procedimiento de planificación local (de una unidad didáctica o una hora de clase), compuesto por los análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. El análisis didáctico permite al profesor de matemáticas diseñar, implementar y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2007). Presentamos a continuación cada uno de estos análisis como fundamentación para el diseño de la unidad didáctica sobre las razones trigonométricas.

#### **1. Análisis de contenido**

El análisis de contenido es un procedimiento que permite al profesor de matemáticas identificar, organizar y seleccionar los diferentes significados de un concepto de las matemáticas escolares. Se configura alrededor de tres organizadores del currículo: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología (Gómez, 2007, p. 37). En este apartado describimos el análisis de contenido de las razones trigonométricas. En la primera sección, identificamos y describimos la estructura conceptual. En la segunda sección, caracterizamos y

ejemplificamos los sistemas de representación. Y, en la tercera, definimos la fenomenología a partir de los contextos, situaciones o problemas que pueden dar sentido al concepto.

### *1. Estructura conceptual*

La estructura conceptual de un concepto de la matemática escolar se caracteriza a partir de tres aspectos: (a) estructuras matemáticas involucradas, (b) relaciones conceptuales y (c) relaciones de representación. De esta manera, al estudiar un concepto matemático, se debe tener en cuenta tres tipos de elementos —los objetos, los conceptos y la estructura matemática— y dos tipos de relaciones —las verticales o conceptuales, que se refieren a la relación de los objetos, los conceptos y la estructura matemática, y las relaciones horizontales o de representación, que se refieren a las relaciones de los signos en sus diferentes sistemas de representación— (Gómez, 2007, p. 45).

En la figura 1 presentamos la estructura conceptual de las funciones trigonométricas. Está configurada por los objetos (ángulos, triángulos, etc.), conceptos (razones trigonométricas) y la estructura matemática (funciones trigonométricas). Respecto a las relaciones, se presentan relaciones verticales o conceptuales, porque la relación horizontal o de representación se presenta en el siguiente apartado. Se pueden distinguir dos focos principales. El primero hace referencia al desarrollo de las razones trigonométricas y el segundo, a la construcción de las funciones trigonométricas desde los números reales. Seleccionamos el primer foco para realizar el diseño e implementación de nuestra unidad didáctica.

Escogimos las razones trigonométricas como foco principal por dos razones: (a) en el plan de estudios se aborda inicialmente este tema y (b) quisimos establecer un estudio de las razones trigonométricas a partir de las relaciones proporcionales que se presentan en los triángulos. Como mostramos en la figura 2, las razones trigonométricas se basan en la resolución de dos tipos de triángulos: los que son rectángulos y los que no lo son. La resolución de triángulos rectángulos establece la relación con conceptos previos como ángulos (menores de  $90^\circ$ ), el teorema de Pitágoras, las razones y proporciones, y el teorema de Thales. Estos conceptos son necesarios para el desarrollo de las razones trigonométricas. La resolución de los triángulos no rectángulos incluye los teoremas del seno y del coseno. Cabe aclarar que la resolución de los triángulos también implica los conceptos de identidades trigonométricas, el álgebra de las razones y las ecuaciones trigonométricas. No abordaremos estos conceptos en este trabajo.



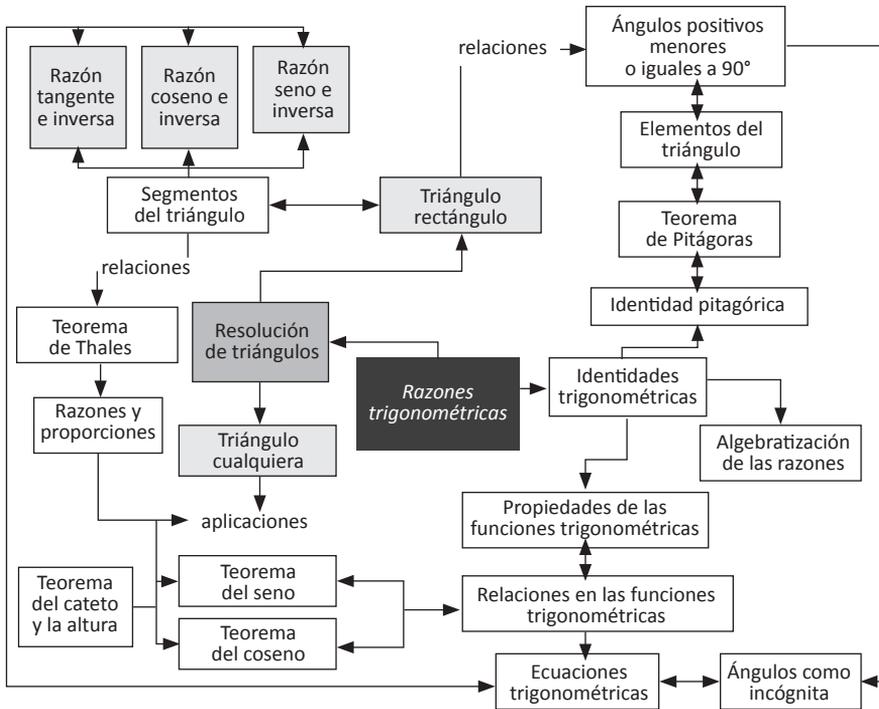


Figura 2. Mapa conceptual del foco de contenido

La estructura conceptual del foco de contenido que presentamos en la figura 2 está compuesta por un campo conceptual en el que se distinguen por lo menos tres niveles: hechos, conceptos y estructuras conceptuales. El primero se refiere a unidades de información —convenios, términos, entre otros— que se relacionan con las razones trigonométricas; por ejemplo, los triángulos, la altura de un triángulo y los elementos de un triángulo rectángulo se clasifican en este nivel. El segundo nivel se refiere a las relaciones del conjunto de los hechos; por ejemplo, las razones trigonométricas de un ángulo agudo se encuentran en este nivel, ya que surgen de la relación entre los triángulos y las relaciones existentes de sus elementos. El tercer nivel se refiere a la relación entre conceptos; en este se encuentran las razones trigonométricas.

Pero este no es el único campo que se presenta en esta estructura conceptual. También, se establece un campo procedimental, que se organiza en tres niveles: destrezas, razonamientos y estrategias. El primer nivel se refiere al procesamiento de hechos y manipulaciones de los símbolos; por ejemplo, clasificamos en este nivel la identificación de los catetos, la hipotenusa, el ángulo de

elevación y depresión de un triángulo rectángulo. El segundo nivel se refiere a los razonamientos que se ejecutan sobre los conceptos; por lo tanto, clasificamos el razonamiento deductivo en este nivel. El tercer nivel se refiere a las estrategias que se ejecutan sobre la estructura conceptual; por ejemplo, clasificamos la resolución de triángulos rectángulos conociendo algunos datos (lados y ángulos) en este nivel. Debemos aclarar que los dos campos, conceptual y procedimental, configuran el contenido y tienen el mismo grado de importancia para el desarrollo de la estructura conceptual de las razones trigonométricas, sin que uno esté supeditado al otro.

En la tabla 1 presentamos los campos conceptual y procedimental de las razones trigonométricas organizados en sus diferentes niveles.

Tabla 1  
*Campos conceptual y procedimental de las razones trigonométricas*

Campo conceptual	Campo procedimental
Hechos	Destrezas
Triángulos	Identificar los elementos geométricos de un sólido (vértices, aristas, caras, medidas angulares diagonales, entre otros)
Altura de un triángulo	
Elementos de un triángulo rectángulo: catetos, hipótesis y ángulos	Identificar los catetos, la hipotenusa y el ángulo de elevación y depresión de un triángulo rectángulo
Semejanza y congruencia	
Medida del ángulo: radianes y grados	Construir las alturas de un triángulo
Medida de una magnitud	Realizar conversiones de unidades de medida (radianes a grados)
Clase de ángulos	Medir las magnitudes y el ángulo
	Clasificar los triángulos a partir de sus ángulos y lados
	Calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo
	Interpretar y relacionar los valores numéricos obtenidos, como la solución de problemas trigonométricos
	Usar los recursos tecnológicos (calculadora, tablas entre otros)

Campo conceptual	Campo procedimental
Conceptos	Razonamientos
Razones trigonométricas de un ángulo agudo Relaciones entre razones trigonométricas	Deductivo: Aplicación de teoremas a partir de la evaluación de los datos conocidos y desconocidos de un triángulo rectángulo
Estructura	Estrategias
Razones trigonométricas	Resolución de triángulos rectángulos conociendo algunos datos. (lados y ángulos)  Resolución de cualquier triángulo conociendo algunos datos. (lados y ángulos)  Resolución de cualquier triángulo, usando la medida de la altura para realizar triángulos rectángulos

## 2. *Sistemas de representación*

En el análisis de contenido se usan los sistemas de representación para organizar los símbolos presentes en el tema y establecer las distintas representaciones que se le da a un mismo concepto, teniendo en cuenta un conjunto de normas. En la estructura conceptual definimos las razones trigonométricas (resolución de triángulos) como el foco de contenido para el diseño e implementación de la unidad didáctica. En el desarrollo del foco, como muestra la figura 3, identificamos cinco sistemas de representación que se hacen presentes en la relación entre hechos (términos) de la estructura conceptual. Los sistemas de representación que hemos establecido son el verbal, el simbólico, el numérico, el gráfico y el manipulativo.

A continuación mostramos cómo estos sistemas de representación permiten presentar las relaciones de los elementos de la estructura conceptual y destacan propiedades importantes y particulares del tema.

### *Sistema de representación verbal*

El sistema de representación verbal se caracteriza por el uso del lenguaje oral y escrito, permitiendo enunciar hechos relacionados con el foco de contenido. Este sistema de representación cobra relevancia porque permite expresar situaciones de la vida real con mayor claridad que otros sistemas de representación.



Así, por ejemplo, se puede decir “la altura de un objeto, cuando la sombra mide 5 metros y el ángulo de elevación con la horizontal hasta la punta del objeto es de treinta y cinco grados”.

#### *Sistema de representación simbólico*

El sistema de representación simbólico se identifica por el uso de símbolos para presentar los elementos y relaciones del foco de contenido. En este sentido, es un requerimiento importante en el desarrollo de la estructura conceptual, porque permite representar contenidos como las razones trigonométricas para cualquier ángulo. Por ejemplo, en el proceso de resolución de triángulos rectángulos, se debe notar que los parámetros e incógnitas presentadas en el sistema verbal y gráfico se pueden relacionar por medio de una razón trigonométrica, usando el sistema de representación simbólico para expresar la razón (figura 4).

$$\text{Tan}\beta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

Figura 4. Representación simbólica

#### *Sistema de representación numérico*

El sistema de representación numérico desempeña un papel importante en la presentación de foco de contenido, al establecer las razones trigonométricas a partir de los datos del triángulo rectángulo. La representación numérica permite expresar los valores numéricos de los ángulos y las longitudes de los lados en la resolución de triángulos y ecuaciones. Además, permite tabular los valores numéricos para la representación cartesiana de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, la expresión verbal “en un triángulo rectángulo uno de los catetos mide veintinueve centímetros y el ángulo adyacente es de treinta y ocho grados, halle el cateto faltante”, se representa numéricamente como se muestra en la figura 5.

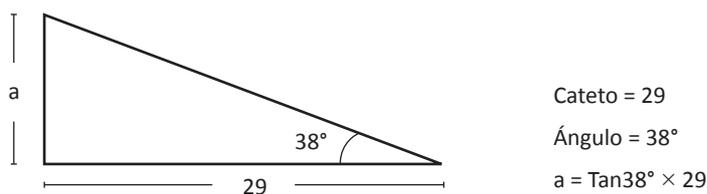


Figura 5. Representación numérica

*Sistema de representación gráfico*

La representación gráfica es un recurso fundamental en los temas de trigonometría, porque usa relaciones métricas y espaciales geométricas que son muy difíciles de identificar sin la ayuda de una representación apropiada. Las razones trigonométricas requieren la representación gráfica, teniendo en cuenta que el desarrollo de sus conceptos y nociones presentan una gran influencia del contexto geométrico.

En el sistema de representación gráfico podemos distinguir dos subsistemas: el sistema de representación gráfico cartesiano y el sistema de representación gráfico geométrico. El primero se presenta en el plano cartesiano y utiliza las herramientas de tipo gráfico y numérico, junto con las propiedades contenidas en este sistema de referencia. Mientras que el segundo implementa el uso de los procedimientos y el lenguaje propios de la geometría. Los dos sistemas tienen relación a partir de sus características geométricas descritas en distintos lenguajes.

Por ejemplo, en la razón trigonométrica “coseno de  $60^\circ$  es igual a 1 sobre 2”, la representación geométrica considera el uso de un triángulo equilátero de lado uno y el trazo de su respectiva altura para mostrar el valor de la razón en función del ángulo dado (figura 6). La representación gráfica cartesiana se puede ver en la función coseno del círculo unitario a partir de la coordenada cartesiana  $(\pi/3, 1/2)$  (figura 7).

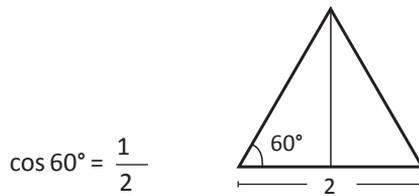


Figura 6. Representación geométrica

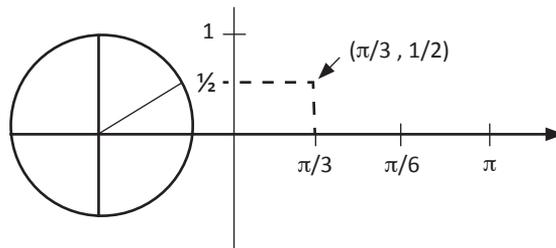


Figura 7. Representación cartesiana

*Sistema de representación manipulativo*

El sistema de representación manipulativo permite hacer construcciones geométricas de las razones trigonométricas con ayuda de recursos tecnológicos, como el *software* Cabri Geometry. El uso de estas representaciones permite ver algunas propiedades geométricas del tema y posibilita que los estudiantes manipulen las construcciones hechas y visualicen nuevas propiedades que no son evidentes en otras representaciones.

*Relación entre los sistemas de representación*

En los sistemas de representaciones encontramos dos relaciones importantes: (a) la traducción entre sistemas de representación, que se caracteriza por el tránsito entre los diferentes sistemas de representación de un elemento del foco de contenido, y (b) la transformación sintáctica, que se caracteriza por la transformación de elementos del foco de contenido en el mismo sistema de representación. Para la primera relación establecemos el siguiente ejemplo: “Expresar la razón trigonométrica  $\tan \beta = 4/3$  a partir de la representación geométrica” (traducción entre los sistemas de representación gráfica y numérica). Para la segunda relación proponemos el siguiente ejemplo, “El valor del ángulo  $\alpha = 60^\circ$  luego de la transformación en el mismo sistema de representación ( $\alpha = 60^\circ \cdot \pi/180$ ) es equivalente a  $\alpha = \pi/3$ ”.

En la figura 8 mostramos las dos relaciones que se presentan en los sistemas de representación. Por ejemplo, podemos evidenciar en el foco de contenido la razón trigonométrica “Tangente de beta igual a cuatro (cateto opuesto) sobre tres (cateto adyacente)”. Esta razón cobra significado cuando la representamos de distintas formas, usando los distintos sistemas de representación. Inicialmente, tenemos la expresión de forma verbal “Tangente de beta igual a cuatro sobre tres”. Es posible traducir esta expresión a la representación simbólica así:

$$\text{Tan}\beta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}},$$

y a partir de los datos dados (parámetros e incógnitas), se puede traducir esta expresión simbólica en numérica:

$$\text{Tan}\beta = \frac{4}{3} .$$

Por último, establecemos la traducción entre la representación numérica y la gráfica donde se ubican, y se relacionan los valores numéricos en el triángulo rectángulo. El sistema de representación manipulativo se usa cuando se hace la representación del triángulo rectángulo en el *software* Cabri Geometry.

Respecto a la transformación sintáctica, presentamos un ejemplo del sistema de representación numérico, donde pasamos de la razón trigonométrica tan  $\beta = 4/3$  a la obtención del ángulo  $\beta$  ( $\beta = 53,13^\circ$ ).

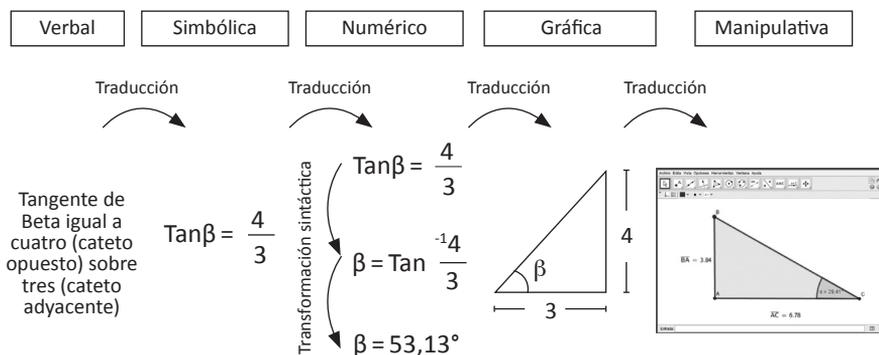


Figura 8. Relaciones de los sistemas de representaciones

#### 4. Fenomenología

Las matemáticas permiten organizar y estructurar partes de la realidad (fenómenos), haciendo que buena parte de los conceptos matemáticos surjan por medio de la abstracción, organización y estructuración de grandes familias de fenómenos. En este sentido, la fenomenología consiste en describir cuáles son los fenómenos que son organizados por los conceptos matemáticos y determinar la relación que tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos.

La noción de contexto se usa para agrupar fenómenos teniendo en cuenta características estructurales que consideramos relevantes desde un punto de vista matemático. Al trabajar con las razones trigonométricas y pensar para qué se utiliza esta estructura matemática, es posible identificar una variedad de fenómenos asociados con ella. Algunos de estos fenómenos son la determinación de la altura de un objeto, de las coordenadas polares de un punto, de la dirección y del desplazamiento de un cuerpo en un sistema de coordenadas, el rastreo de un satélite, el cálculo de distancias inaccesibles, el cálculo de áreas y perímetros, el cálculo de ángulos de elevación y depresión, y la construcción

de componentes vectoriales. En la tabla 2 presentamos los contextos que hemos identificado para organizar los fenómenos. Estos contextos hacen referencia a los elementos del triángulo (lados y ángulos) con los cuales se formulan las razones trigonométricas.

Tabla 2  
*Relación entre la subestructura matemática y los contextos que organizan los fenómenos*

Subestructura	Contexto	Descripción del contexto
$\text{sen}\theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	1	Datos conocidos: el cateto opuesto y la hipotenusa
	2	Datos conocidos: el ángulo y el cateto opuesto
$\text{cos}\theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	3	Datos conocidos: cateto adyacente y la hipotenusa
	4	Datos conocidos: el ángulo y el cateto adyacente
$\text{tan}\theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$	5	Datos conocidos: cateto opuesto y el cateto adyacente
	6	Datos conocidos: el ángulo y el cateto opuesto

La identificación de los contextos y la organización de una familia de fenómenos a partir de la relación que tiene con una estructura matemática específica contenida entre las razones trigonométricas permitieron definir como subestructuras a cada una de las razones trigonométricas. En este sentido, la razón seno, como subestructura, organiza un grupo particular de fenómenos. Por ejemplo, el contexto 1, que agrupa los fenómenos para los que se conocen el cateto opuesto y la hipotenusa, corresponde a la subestructura  $\text{sen}\theta = \frac{CO}{h}$ , mientras que el contexto 2, que agrupa los fenómenos para los que se conoce el ángulo y el cateto opuesto, corresponde a la subestructura  $h = \frac{CO}{\text{sen}\theta}$ . De esta manera, se establece que el grupo de fenómenos que organiza la subestructura razón coseno o la subestructura razón tangente son diferentes.

Así mismo, desde la perspectiva PISA, cada uno de los fenómenos se puede reagrupar a partir de una nueva clasificación: las situaciones de tipo personal, científica, pública y educativa. Las situaciones organizan los fenómenos desde el sentido que toman en un entorno específico. Por ejemplo, el cálculo de distancias inaccesibles podría estar enmarcado en una situación científica si esta hace referencia al cálculo de la distancia de la Tierra al Sol, mientras que el cálculo de ángulos de elevación y depresión estaría caracterizada por una

situación personal, si se hace referencia al cálculo del ángulo de elevación de una persona para observar una pantalla puesta a una distancia arbitraria. En la tabla 3 mostramos esta organización, estableciendo las relaciones entre fenómenos, subestructuras, situaciones y contextos.

Tabla 3  
*Relación entre fenómenos, subestructuras, situaciones y contextos*

Fenómeno	Subestructura	Situación	Contexto
Determinación de la altura de un poste conociendo la distancia de la sombra que proyecta en el suelo y el ángulo de elevación	$\cos\theta = \frac{CA}{h}$	Personal	Datos conocidos: CA y h Datos conocidos: el ángulo y CA
Ángulo de referencia para la coordenada polar de un punto	$\tan\theta = \frac{CO}{CA}$	Educativa	Datos conocidos: CO y CA Datos conocidos: el ángulo y CO
Cálculo de la componente vectorial y, de un vector a partir del ángulo director y la norma	$\sin\theta = \frac{CO}{h}$	Científico	Datos conocidos: CO y h Datos conocidos: el ángulo y CO

## 2. Análisis cognitivo

El análisis cognitivo se centra en el aprendizaje del estudiante. Con este análisis “el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenta a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje” (Gómez, 2007, p. 29). Estas hipótesis se pueden desarrollar a partir de la identificación y formulación de las capacidades que los estudiantes ponen en juego para contribuir al logro del objetivo de aprendizaje que el profesor se propone. En la primera sección de este apartado, describimos los objetivos de la unidad didáctica; en la segunda sección, identificamos, formulamos y caracterizamos las capacidades; en la tercera sección, describimos los caminos de aprendizaje; y, en la cuarta sección, identificamos, formulamos y caracterizamos las dificultades y errores.

### 1. *Objetivos*

Planteamos los objetivos teniendo en cuenta dos propósitos: (a) que se desarrollen las competencias formular y resolver problemas, y el dominio de procedimientos y algoritmos matemáticos, para alcanzar el estándar “Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas” (MEN, 2006) y (b) que incluyan el desarrollo del foco de contenido escogido (estructura conceptual), los sistemas de representación y sus dos relaciones (traducciones y transformaciones sintácticas), y que posibiliten el trabajo con las distintas familias de fenómenos de las razones trigonométricas (análisis fenomenológico).

Los objetivos propuestos para el desarrollo de la unidad didáctica son los siguientes:

*Objetivo 1.* Halla la medida de ángulos y lados de un triángulo rectángulo usando las razones trigonométricas.

*Objetivo 2.* Reconoce elementos, relaciones y aplicaciones de las razones trigonométricas en un triángulo cualquiera, aplicándolas para resolver problemas.

*Objetivo 3.* Resuelve problemas reales usando las razones trigonométricas para el cálculo de distancias y ángulos.

En el primer objetivo se presentan procedimientos sobre la medida de ángulos y longitudes, la identificación de los elementos de un triángulo y el uso y cálculo de las razones trigonométricas. En el segundo objetivo se presentan procedimientos sobre la identificación y reconocimiento de los elementos de un triángulo, la clasificación de triángulos a partir de sus lados y ángulos, y el uso y cálculo de las razones trigonométricas para resolver cualquier triángulo. En el tercer objetivo establecimos los mismos procedimientos que para el primer y segundo objetivos. Estos procedimientos sustentan las capacidades que los escolares deben activar para lograr los objetivos. Enumeramos y caracterizamos esas capacidades en el siguiente apartado.

### 2. *Caracterización de las capacidades*

De acuerdo con los objetivos planteados, diseñamos una secuencia de tareas no rutinarias que contribuyeran a su desarrollo. Caracterizamos las tareas no rutinarias como problemas o situaciones problema que se proponen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Las tareas rutinarias son los ejercicios. Tomamos las tareas no rutinarias, porque nos proporcionan condiciones para un desarrollo cognitivo que permite: (a) construir nuevo conocimiento que

tiene que comenzar de manera subjetiva, (b) reconocer y evaluar conocimientos adquiridos antes, (c) generar nuevas interpretaciones y nuevas relaciones, y (d) reorganizar y reestructurar el conocimiento en un cuerpo más amplio y consolidado (Flores, Gómez y Marín, 2010). Consideramos que una tarea no rutinaria se puede descomponer en una cadena de tareas rutinarias, cada una de las cuales se puede asociar con una capacidad.

Definimos la capacidad como una expectativa del profesor sobre la actuación exitosa de un estudiante respecto a una tarea de tipo rutinaria asociada con un tema matemático. Las capacidades se manifiestan mediante conductas observables de los estudiantes, por lo cual es importante que estén enunciadas de forma que quede clara cuál es la información de partida y cuál es la información que se genera al poner en juego la capacidad (González, Gómez y Lupiáñez, 2010).

Clasificamos las capacidades que los estudiantes ponen en juego al momento de desarrollar las tareas en tres categorías, de acuerdo con el énfasis sobre el cual se concentra su acción (tabla 4): (a) geométricas; (b) generales, que incluyen las habilidades previas al desarrollo de la trigonometría e involucran algunas destrezas algebraicas y métricas; y (c) trigonométricas.

Tabla 4  
Capacidades

C.	Definición
<b>Capacidades geométricas</b>	
C1	Construye las alturas de un triángulo
C2	Comprende que para un paralelepípedo la longitud máxima es la que corresponde al segmento que une un vértice con el opuesto al de la cara contraria
C3	Identifica los elementos geométricos de un sólido (vértices, aristas, caras, medidas angulares, diagonales, entre otros)
C4	Conserva los elementos geométricos de un sólido al momento de representarlo bidimensionalmente
C5	Usa el teorema de la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo euclideo
C6	Clasifica los triángulos según la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos
C7	Conoce y menciona los elementos del triángulo rectángulo y los utiliza en la aplicación del teorema de Pitágoras
C8	Construye modelos geométricos rectangulares en tercera dimensión en el <i>software</i> Cabry Geometry, en función de la solución del problema

C.	Definición
<b>Capacidades generales</b>	
C9	Realiza conversiones de medidas
C10	Reconoce las propiedades necesarias en el despeje de ecuaciones (lineales, razones trigonométricas, cuadráticas “sencillas”, entre otras)
C11	En la ecuación trigonométrica, asigna los datos dados (parámetros) del problema
C12	Establece una representación gráfica del problema
C13	Ubica los datos conocidos y desconocidos dentro de la representación gráfica
C18	Ubica los datos conocidos en la ecuación del teorema de Pitágoras
C23	Representa visualmente un problema
C25	Calcula longitudes y ángulos a partir de instrumentos de medida en situaciones concretas
<b>Capacidades trigonométricas</b>	
C14	Expresa un problema como la razón trigonométrica tangente (representación simbólica)
C15	Reconoce que la relación existente entre los parámetros e incógnitas que aparecen en la representación gráfica del problema (el triángulo), es una relación trigonométrica
C16	Reconoce el valor numérico de las razones trigonométricas como longitudes de segmentos
C17	Halla ángulos teniendo en cuenta los valores numéricos obtenidos en las razones trigonométricas y su inversa
C19	Identifica el cateto adyacente, el opuesto y la hipotenusa, a partir del establecimiento del ángulo
C20	Usa los recursos tecnológicos (calculadora, tablas, entre otros) en función de la solución de un problema trigonométrico
C21	Identifica ángulos de elevación y depresión de acuerdo a la información de la tarea
C22	Interpreta y relaciona los valores numéricos obtenidos, como la solución de problemas trigonométricos
C26	Expresa un problema como la razón trigonométrica seno (representación simbólica)
C27	Expresa un problema como la razón trigonométrica coseno (representación simbólica)

C.: Capacidad

El nivel de complejidad de algunas capacidades varía dependiendo del tipo de acción, lo cual genera la siguiente clasificación: (a) básicas (C1, C2, C3, C4, C6, C9, C12, C13, C19, C23, C25), (b) transitorias (C15), (c) básicas avanzada

(C5, C7, C8, C10, C11, C16, C17, C19, C20, C21, C22) y (d) superiores (C14, C26, C27). Por ejemplo, despejar la ecuación trigonométrica es básica avanzada, mientras que el despeje de la ecuación con una sola incógnita es básica.

Como se puede observar, las capacidades tienen una estrecha relación con la estructura conceptual. Las capacidades pueden ser descritas desde el campo procedimental como estrategias o destrezas, y desde el campo conceptual como un hecho o concepto. En la tabla 5 clasificamos las capacidades desde los campos procedimental y conceptual, que configuran la estructura conceptual del foco de contenido razones trigonométricas.

Tabla 5  
*Relación de las capacidades y la estructura conceptual del foco de contenido*

C.	Campos		
	Procedimental		Conceptual
	Destreza	Estrategia	Hechos / Conceptos
C1	✓		Altura de un triángulo
C2		✓	Teorema Pitágoras
C3		✓	Sólidos
C4	✓		Sólidos
C5		✓	Teorema de la suma de los ángulos internos
C6		✓	Triángulos
C7	✓	✓	Teorema de Pitágoras
C8	✓		Sólidos
C9	✓		Conversión de medidas
C10	✓		Despeje de ecuaciones
C11		✓	Evaluación de ecuaciones
C12	✓		
C13	✓		
C14	✓		Razones trigonométricas
C15	✓		Razones trigonométricas
C16		✓	Razones trigonométricas
C17	✓		Razones trigonométricas
C18	✓		Teorema de Pitágoras
C19	✓		Teorema de Pitágoras
C20		✓	
C21	✓		Ángulos de elevación y depresión
C22		✓	Razones trigonométricas
C23	✓	✓	

C.	Campos			
	Procedimental		Conceptual	
	Destreza	Estrategia	Hechos	Conceptos
C24	✓		Despeje de ecuaciones	
C25	✓		Medida de ángulos y longitudes	
C26	✓			Razones trigonométricas
C27	✓			Razones trigonométricas

C.: Capacidad

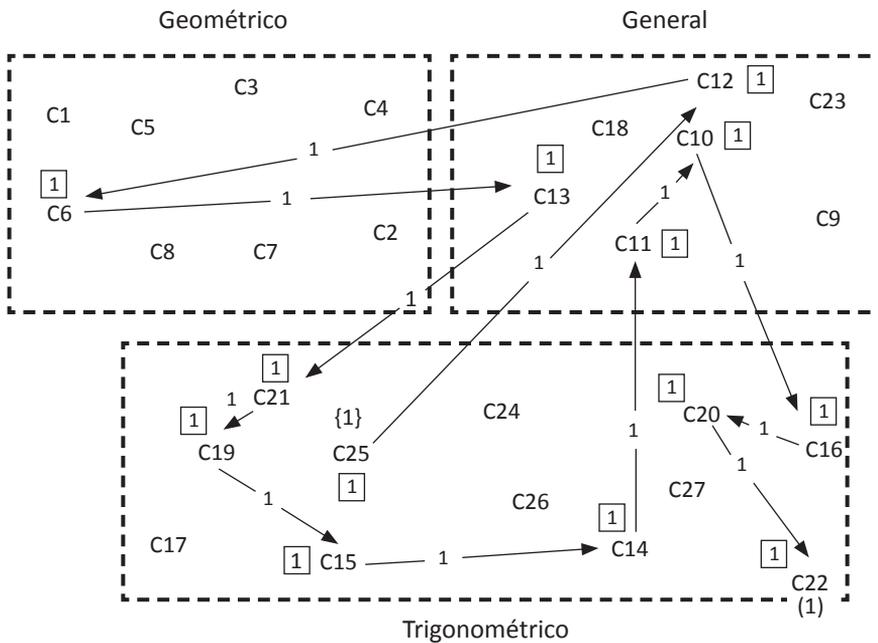
### 3. Caminos de aprendizaje

A partir de la identificación, formulación y caracterización de las capacidades, establecemos los caminos de aprendizaje de las tareas. Estos caminos de aprendizaje se caracterizan por la secuencia de capacidades que los estudiantes ponen en juego para resolver la tarea. El camino de aprendizaje permite prever el desarrollo del aprendizaje del estudiante en la solución de la tarea.

A continuación presentamos como ejemplo el camino de aprendizaje de la tarea de la sombra. Esta tarea consiste en hallar la altura de un árbol a partir de la distancia de la sombra que proyecta y la medida de su ángulo de elevación. El camino de aprendizaje que los estudiantes pueden realizar es el siguiente: calcula la longitud y el ángulo de elevación a partir de la cinta métrica y el goniómetro (C25), y realiza la representación gráfica del problema (C12), en la que clasifica el triángulo (obtenido de la representación gráfica), según la longitud de sus lados y la medida de su ángulo (C6), para ubicar los datos conocidos y desconocidos en la representación gráfica (C13). Identifica el ángulo de elevación (C21) y establece el cateto adyacente, el cateto opuesto y la hipotenusa (C19), reconociendo que la relación existente entre los parámetros e incógnitas que aparecen en la representación gráfica es una relación trigonométrica (C15). La expresa como la razón trigonométrica tangente (C14). Después, asigna en la ecuación trigonométrica los datos dados (parámetros) del problema (C11) y halla la incógnita despejando la ecuación trigonométrica (C10), reconociendo que el valor numérico que va a obtener es la longitud de un segmento (C16). Obtiene este valor numérico usando la calculadora de funciones (C20). Lo interpreta y relaciona como la solución del problema trigonométrico. Por consiguiente, el camino de aprendizaje es el siguiente:

C25 - C12 - C6 - C13 - C21 - C19 - C15 - C14 - C11 - C10 - C16 - C20 - C22

Este camino de aprendizaje se puede analizar a partir del grafo presentado en la figura 9, en la que se establecen los énfasis y las relaciones de las capacidades utilizadas. Además, se establecen las capacidades donde empieza y termina el camino, y la cantidad de veces que se repite una capacidad. Este análisis no solo sirve para este camino propuesto, sino para los posibles caminos de aprendizaje que los estudiantes realicen al abordar las tareas. Podremos evaluar el proceso de aprendizaje con base en este tipo de análisis.



Entre corchetes: número de veces que la capacidad es origen. Entre paréntesis: número de veces que la capacidad es final. El número que aparece en cada flecha es la cantidad de veces que se produce esa relación. El número que aparece en cada cuadrado es la cantidad de veces que se pone en juego la capacidad.

Figura 9. Grafo del camino de aprendizaje de la tarea de la sombra.

#### 4. Dificultades y errores

Clasificamos las dificultades bajo dos líneas de profundización: la primera se relaciona con la estructura conceptual de las razones trigonométricas de un ángulo y la segunda se refiere a la relación entre los sistemas de representación. En la primera línea de profundización, hacemos énfasis en los conceptos, procedimientos y destrezas que requiere un estudiante para llegar a la solución de

una tarea. Por lo tanto, se establece: *dificultad para reconocer, construir y representar propiedades y elementos geométricos asociados con problemas, en los que se involucran las razones trigonométricas.*

En la segunda línea de profundización se hace énfasis en las relaciones generadas en las distintas traducciones de los sistemas de representación. De esta manera, se consideran dos situaciones en las que el estudiante puede presentar dificultades: una en el sentido de las traducciones entre las representaciones y otra en la línea de las transformaciones sintácticas en una misma representación. Por lo tanto, las dos dificultades que se establecen son: primero, *dificultad para realizar las traducciones entre las distintas representaciones de las razones trigonométricas, a partir de los datos dados en el problema.* Segundo, *dificultad para construir transformaciones sintácticas de las razones trigonométricas entre una misma representación, a partir de los datos dados en el problema.*

Teniendo en cuenta las dificultades que se les pueden presentar a los estudiantes en la solución de las tareas y los posibles caminos de aprendizaje que estos pueden llegar a realizar para la solución de la tarea, identificamos una serie de errores en los que el estudiante podría incurrir. Algunos errores están relacionados con datos mal utilizados, interpretación incorrecta del lenguaje, falta de verificación en la solución y errores técnicos (Movshovitz-Hardar, Zaslavsky e Inbar, 1987, citados por Rico, 1995), entre otros. De acuerdo con el tipo de error, se hace una relación con las dificultades descritas inicialmente. Esta relación (que también tiene en cuenta los posibles caminos de aprendizaje para el desarrollo de la tarea) le permite al profesor planificar ayudas, de forma que el estudiante logre superarlos. En la tabla 6 presentamos los errores organizados de acuerdo con las tres dificultades: estructura conceptual, traducción entre las representaciones y transformaciones sintácticas.

Tabla 6  
*Errores*

E.	Descripción
<b>Estructura conceptual</b>	
E1	No reconoce los triángulos rectángulos
E2	No distingue correctamente la hipotenusa de los catetos
E3	Confunde el ángulo recto con los ángulos agudos en un triángulo rectángulo
E4	No traza correctamente las alturas en triángulos
E5	No reconoce que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a $180^\circ$

E.	Descripción
E6	No identifica correctamente los lados del triángulo respecto a un ángulo, impidiéndole construir las razones trigonométricas
E7	Representa en lo bidimensional figuras de tercera dimensión sin la perspectiva adecuada
E8	No asigna correctamente los ángulos en la representación gráfica de un problema trigonométrico
E9	No identifica las longitudes dadas en un problema dentro de su representación gráfica
<b>Traducción entre las representaciones</b>	
E10	Establece de forma equivocada la razón trigonométrica a partir del modelo gráfico del problema
E11	Establece de forma equivocada la razón trigonométrica a partir del modelo gráfico del problema
E12	En la representación gráfica del problema coloca equivocadamente los datos conocidos
E13	No interpreta ni relaciona correctamente los valores numéricos obtenidos dentro de la solución del problema
E14	A pesar de que el estudiante conoce la razón trigonométrica para encontrar el ángulo pedido en el problema, no determina su valor al hacer uso de la herramienta tecnológica
<b>Transformaciones sintácticas</b>	
E15	Al determinar la razón trigonométrica que resuelve el problema, no asigna correctamente los datos conocidos en ella
E16	No despeja correctamente las variables pedidas en las razones trigonométricas
E17	Halla la amplitud de un ángulo, afirmando que el valor obtenido por una razón trigonométrica lo representa
E18	No utiliza de forma correcta las herramientas tecnológicas para resolver el problema

E.:Error

### 3. Análisis de instrucción

En este apartado describimos el análisis de instrucción. Este es el procedimiento con el que “el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción” (Gómez, 2007, p. 29). En la primera sección, presentamos el planteamiento general de las sesiones de la unidad didáctica; en la segunda sección, establecemos el papel y agrupación de los estudiantes; y en la última sección, describimos el papel del profesor.

**1. Planteamiento general de las sesiones de la unidad didáctica**

En la tabla 7 presentamos las tareas no rutinarias (de aquí en adelante las denominaremos tareas) que hacen parte de la secuencia didáctica, especificando para cada una de ellas sus principales características, en términos de la descripción, la meta y el tiempo utilizado. En el tercer apartado se presentará en detalle la secuencia y las tareas propuestas.

Tabla 7  
*Presentación general de las sesiones de la unidad didáctica*

Tarea	S.	Tiempo	Descripción	Meta
La medida del triángulo Parte 1	1	60 min	Aplicación de la conversión de medidas (radianes a ángulos), las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras, para calcular las longitudes de los triángulos rectángulos	Calcular longitudes y ángulos de los triángulos rectángulos
La medida del triángulo Parte 2	2	60 min	Aplicación de medidas de magnitudes y de ángulos, razones trigonométricas y modelación, para calcular longitudes y ángulos en contextos inaccesibles	Calcular longitudes y ángulos en contextos inaccesibles, haciendo uso de las razones trigonométricas y en la parte 2, validar el problema de la sombra usando el <i>software</i> Cabri Geometry
La sombra Parte 1	3	60 min	Aplicación de ecuaciones trigonométricas, sistema de ecuaciones, razones trigonométricas y modelación, para calcular longitudes y ángulos en contextos inaccesibles	Calcular longitudes y ángulos en contextos inaccesibles haciendo uso de las razones trigonométricas
La sombra Parte 2	4	80 min	Aplicación de razones trigonométricas, modelación, para hallar ángulos en contextos inaccesibles	Resolver un problema en un contexto real, usando las razones trigonométricas para hallar el ángulo
La cometa	5	60 min		
	6	60 min		
Las moscas	7	60 min		
	8	80 min		

S.: Sesión

El tiempo previsto para la mayoría de sesiones se distribuye de la siguiente manera:

1. Socialización de criterios de logros específicos de la actividad (10 minutos).
2. Diligenciamiento del diario de grupo (10 minutos).
3. Discusión y solución de la tarea no rutinaria (para algunas será de 25 minutos; para otras será de 35 minutos).
4. Socialización de los grupos pequeños al gran grupo (de 15 a 25 minutos).

### *2. Papel y agrupamientos de los estudiantes*

Los estudiantes resolverán la mayoría de las tareas de acuerdo con tres tipos de agrupamiento. En una primera fase trabajarán de forma individual; después lo harán en grupos pequeños; en la tercera fase se trabajará con el gran grupo. A continuación presentamos las acciones que realiza el estudiante en cada instante.

*Individualmente.* El estudiante debe prestar atención a las indicaciones dadas por el profesor (de forma verbal y escrita) y desarrollar las tareas propuestas.

*En pequeños grupos.* Se espera que el estudiante logre (a) involucrarse en uno de los grupos realizados (G1 a G6); (b) participar activamente en su grupo con la socialización de lo hecho en la sesión; (c) aportar elementos conceptuales y procedimentales para la solución de la tarea; y (d) colaborar en la realización de la exposición para el gran grupo.

*En gran grupo.* El estudiante debe estar atento a registrar los datos y soluciones establecidas por los otros grupos y participar en la discusión con los otros grupos, realizando preguntas sobre las dudas, inquietudes o errores que presentan los resultados de los otros grupos.

### *3. Papel del profesor*

El profesor orientará las acciones de los estudiantes de la siguiente forma: primero, dará una breve instrucción verbal de las tareas, así como las condiciones específicas que permiten su desarrollo; después, propondrá de forma escrita el problema; por último, conformará los seis grupos pequeños que desarrollarán la unidad didáctica, y realizará el seguimiento y acompañamiento correspondiente.

El profesor deberá mantener una postura dinámica, con preguntas frente a las acciones y discusiones de los diferentes grupos, de tal manera que sea él quien controle cuándo y hasta dónde debe dejar a los diferentes grupos de estudiantes mediar con las dificultades que se presenten durante el desarrollo y posible solución de la tarea. La intervención del profesor debe proporcionar a

los estudiantes una orientación, siguiendo como ruta el camino de aprendizaje previamente elaborado. Cuando los estudiantes se enfrenten a un error o a una dificultad, el profesor debe redirigir a los estudiantes con preguntas que provoquen una argumentación de las acciones desarrolladas, para poder superar el error. A continuación, el profesor debe gestionar el orden y las condiciones para las exposiciones de los grupos pequeños. Él debe indagar acerca del desarrollo generado por los estudiantes durante el proceso de solución de la actividad y producir finalmente una institucionalización a partir de las preguntas y argumentos hechos por los estudiantes. En la tabla 8 presentamos las actuaciones particulares del profesor para superar los errores en los que incurrieron los estudiantes a la hora de resolver la tarea.

Tabla 8  
*Actuaciones del profesor frente al error*

E.	A.	Descripción
E1 E2 E3	A1	El profesor presenta a los estudiantes representaciones gráficas de triángulos (rectángulos y no rectángulos) para que ellos identifiquen los triángulos rectángulos a partir de sus propiedades, los catetos y la hipotenusa. Estas clasificaciones se realizan por escrito en el cuaderno del estudiante.
E4	A2	El profesor les pedirá a los estudiantes que dibujen diferentes tipos de triángulos y, haciendo uso de la regla y el compás, construirán las tres alturas de cada triángulo. Esta actividad será desarrollada individualmente en casa si el error se presenta con un grupo pequeño de estudiantes o en el aula de clase si el error se presenta con más del 40% de los estudiantes.
E5	A3	El profesor presenta representaciones geométricas de triángulos (rectángulos y no rectángulos) y formula preguntas relacionadas con la medida de los ángulos, cuyas respuestas les permite concluir a los estudiantes que la suma de los ángulos internos de todo triángulo siempre es igual a $180^\circ$ . El profesor propone que los estudiantes socialicen sus respuestas para que los grupos de estudiantes se realimenten y se ayuden entre sí.
E9 E10 E11	A5	El profesor pregunta sobre los elementos que se pueden identificar en el problema que permitan realizar un modelo gráfico. Después propone la discusión y la socialización de los modelos gráficos construidos por cada uno de los grupos, acordando, en conjunto, cuál de ellos se ajusta más con las condiciones requeridas por la tarea.
E6 E7 E8	A6	El profesor explica a los estudiantes a partir de la representación gráfica de un triángulo rectángulo, los conceptos de cateto adyacente y cateto opuesto a un ángulo.

E.	A.	Descripción
E12	A7	El profesor caracteriza cada uno de los elementos geométricos, algebraicos y trigonométricos contenidos en la tarea, describiéndolos a partir de cualidades propias de estos elementos, como un ejercicio que propicie en los estudiantes establecer diferencias claras en cada uno de ellos a luz de una representación gráfica.
E13	A8	El profesor, en conjunto con el grupo, establece una correspondencia entre los valores obtenidos con aspectos propios de la tarea, descartando, con ayuda de los estudiantes y mediante ensayo y error (por absurdo), aquellas que no muestran ninguna relación coherente con los datos suministrados en la tarea.
E14 E18	A9	El profesor instruye a los estudiantes sobre el correcto uso de la herramienta tecnológica (calculadora y <i>software</i> Cabri Geometry) y propone ejercicios de refuerzo, en los que los estudiantes deban determinar las razones de los valores de las razones trigonométricas de diferentes ángulos, haciendo uso de la calculadora.
E15	A10	El profesor establece las relaciones respectivas entre los nombres de los elementos trigonométricos involucrados en la tarea y el elemento físico contenido en la representación geométrica de la razón trigonométrica, de modo que el estudiante usa este modelo como referencia en la asignación de los datos a una razón trigonométrica contenida en un modelo geométrico.
E16	A11	El profesor propone una secuencia de ecuaciones en primer grado con el propósito que el estudiante ejercite los algoritmos de despeje y solución de ecuaciones usando en un nivel superior expresiones con variables trigonométricas.
E17	A12	El profesor formula preguntas con respecto a la amplitud de un ángulo, cuyas respuestas les permitan concluir a los estudiantes que el valor obtenido por una razón trigonométrica es diferente a la amplitud del respectivo ángulo. En la explicación el profesor demostrará que la suma de los ángulos internos de todo triángulo, siempre es igual a $180^\circ$ . El profesor permitirá que los grupos de estudiantes se ayuden entre sí, socializando sus respuestas.

A.: Actuación; E.: Error.

#### 4. Análisis de actuación

El análisis de actuación es el procedimiento con el que “el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento” (Gómez, 2007, p. 29). El propósito de la evaluación en el análisis de actuación está relacionado con la valoración del nivel de resultados obtenidos y con la apreciación de los procesos seguidos que permitieron alcanzar estos resultados. A continuación describimos el sistema de evaluación aplicado en el diseño y la implementación de la unidad didáctica. Identificamos los criterios de evaluación adoptados, presentamos los

instrumentos de evaluación utilizados y describimos el modelo de evaluación para la unidad didáctica.

### 1. Criterios de evaluación

Los criterios de logro tienen como propósito principal obtener información concreta respecto al nivel de consecución y desarrollo alcanzado por los estudiantes frente a los objetivos de aprendizaje. Hemos clasificado los criterios de logro generales en tres categorías, según se refieran a: (a) las actitudes; (b) la aplicación y el uso de la competencia comunicativa; y (c) la evolución y desarrollo progresivo de los procesos. En la tabla 9 presentamos los criterios de logro generales, de acuerdo con las categorías propuestas.

Tabla 9  
*Criterios de logros generales*

C.	Descripción
<b>Actitudinales</b>	
AT1	Muestra cohesión e interactúa con cada uno de los miembros de su grupo.
AT2	Desarrolla un interés visible por algunos de los elementos conceptuales descritos en una o más tareas.
AT3	Respeto los tiempos establecidos para la entrega y elaboración de las tareas.
AT4	Valora y respeta con su silencio los aportes realizados por sus compañeros durante los espacios de discusión y socialización, a nivel de grupo y gran grupo.
AT5	Desarrolla las tareas en los espacios sugeridos y con el uso de los recursos requeridos para las mismas.
<b>Competencia comunicativa</b>	
CM1	Participa activamente en discusiones y socializaciones logrando expresar de forma apropiada sus ideas.
CM2	Registra en forma ordenada y clara, los procesos abordados en el desarrollo de una tarea.
CM3	Interpreta y explica una situación dando un enfoque propio sin distorsionar aspectos trascendentales de la situación.
CM4	Argumenta de forma clara y comprensiva el uso de conceptos dentro del desarrollo de una tarea haciendo uso de ayudas comparativas como ejemplos u otros elementos.
CM5	Está en condiciones de explicar y justificar las razones que produjeron el desarrollo de un procedimiento en la solución de una tarea haciendo registros escritos y argumentando oralmente.
CM6	Produce gráficos o esquemas representativos para interpretar y modelar situaciones.

C.	Descripción
<b>Evolución de procesos</b>	
EP1	Muestra un avance evidente comparado con el desarrollo primario de la tarea.
EP2	Propone e investiga recursos y conceptos que le posibilitan superar un obstáculo.
EP3	Muestra interés por superar sus dificultades proponiendo preguntas al profesor con las cuales pueda reorientar su proceso.

C.: Criterio

Los criterios particulares que hacen referencia al desarrollo de los elementos del foco de contenido están caracterizados teniendo en cuenta relaciones con una o más capacidades; por tanto, el desarrollo de un logro podría implicar la activación de un grupo de capacidades o de una capacidad específica. En la tabla 10 presentamos el conjunto de logros descritos, de manera que sea posible comprender las acciones que son capaces de realizar los estudiantes al cierre de la unidad didáctica.

Tabla 10  
*Criterio de logros particulares*

C.	Descripción
CL1	Identifica el triángulo rectángulo a partir de un ángulo recto y dos agudos, sus catetos y la hipotenusa
CL2	Reconoce que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es de $180^\circ$
CL3	Establece las partes del triángulo rectángulo a partir de los ángulos (elevación y depresión)
CL4	Utiliza correctamente, los instrumentos de medida, las tablas y la calculadora científica, en la solución del triángulo rectángulo
CL5	Reconoce, identifica e interpreta los elementos geométricos de figuras planas y de los sólidos (vértices, aristas, caras, medidas angulares, diagonales, entre otros)
CL6	Construye y verifica la construcción de las alturas de un triángulo cualquiera
CL7	Identifica los datos conocidos y desconocidos en el problema propuesto
CL8	Reconoce propiedades necesarias en el despeje de ecuaciones (lineales, razones trigonométricas, cuadráticas “sencillas”)
CL9	Interpreta y establece los valores numéricos obtenidos, como la solución del problema

Continúa

C.	Descripción
CL10	Pasa de grados a radianes y de radianes a grados
CL11	Establece la razón trigonométrica (seno, coseno y tangente) necesaria para resolver el triángulo rectángulo
CL12	Reconoce la relación trigonométrica entre los parámetros e incógnitas en la representación gráfica
CL13	Reconoce la relación trigonométrica entre los parámetros e incógnitas en la representación gráfica
CL14	Realiza una representación gráfica del problema y ubica los datos conocidos y desconocidos
CL15	Realiza la representación gráfica del problema, conservando los elementos geométricos de las figuras planas y de los sólidos (problema de las moscas) y ubica los datos conocidos y desconocidos en ésta
CL16	Modela el problema con el <i>software</i> Cabri Geometry, en función de la solución del problema

C.: Criterio

Estos logros concretan de algún modo el camino para el desarrollo del conjunto de objetivos de aprendizaje que se han descrito en el análisis cognitivo, al cubrir todo el desarrollo del foco de contenido. Los primeros seis hacen referencia a los elementos de tipo geométrico que se relacionan con el uso de las razones trigonométricas en la solución de un triángulo rectángulo. Los tres siguientes tienen que ver con aspectos generales de la solución y evaluación de ecuaciones, así como con la interpretación de resultados. Les siguen a estos, tres logros que tienen que ver con la representación de los problemas como situaciones de uso trigonométrico. Por último, cierran aquellos que hacen referencia directa a elementos de uso trigonométrico, relacionados con la aplicación de las razones trigonométricas en el desarrollo de un triángulo rectángulo.

## 2. Instrumentos de evaluación

Hemos previsto el uso de diferentes instrumentos para facilitar la recogida de la información, teniendo en cuenta que el número de las capacidades propuestas para la implementación de la unidad es considerable y que, para su evaluación, es necesaria la observación del nivel de complejidad en el cual se activan. Estos instrumentos son el diario del profesor, las actividades de corrección de las tareas, el diario del grupo y la evaluación final. Los describimos brevemente a continuación.

*Los registros del diario del profesor*

Los descriptores actitudinales del diario del profesor permiten registrar el comportamiento de los estudiantes, al evaluar el interés puesto en la solución de una tarea, sus actuaciones, la participación durante la sesión de clase, así como las sugerencias y los aportes que hace para la solución de esta. Su diseño consta de una tabla que, al ser diligenciada por los profesores, les permitirá registrar una variada información relacionada con tres aspectos principales; a saber:

*Diseño metodológico.* Este aspecto hace referencia a todos los pasos, fases, partes o apartados en los que se divide y ejecuta la tarea. Se incluye además el tiempo de cada paso o fase en las que se divide, se ejecuta y se desarrolla una tarea.

*Aspectos relacionados con la enseñanza.* Con esta parte del instrumento se busca consignar aquella información que de cuenta de los aspectos particulares de la presentación y las características de la comunicación de la actividad, la distribución de los estudiantes en grupos, y las previsiones sobre la función de la tarea en la secuencia didáctica y su complejidad cognitiva. Estos aspectos se evalúan en términos del cumplimiento, cumplimiento parcial o el no cumplimiento del mismo.

*Aspectos relacionados con el aprendizaje.* La intención de esta parte del diario es consignar aquella información que de cuenta de los aspectos particulares relacionados con la dimensión cognitiva del contenido; es decir, los tipos de contenido y el desarrollo de la estructura conceptual, los sistemas de representación y las relaciones que la actividad promueve, así como los niveles de complejidad en las competencias MEN (2006). Estos aspectos se evalúan en términos del cumplimiento, cumplimiento parcial o el no cumplimiento del mismo.

*Informe escrito contenido en la carpeta y el diario de grupo*

Cada uno de los grupos debe realizar una carpeta donde se presenten todas las tareas que desarrollaron en grupo. Además, deben anexar al final de las tareas el diario de grupo. El profesor realizará una revisión periódica de la carpeta para establecer el desarrollo y la solución de cada una de las tareas, permitiéndole establecer y corroborar el camino de aprendizaje utilizado por el grupo. El profesor evaluará la carpeta utilizando como criterios de evaluación la verificación de los procedimientos registrados, la elaboración de las gráficas con criterios geométricos, la construcción detallada de los algoritmos y, en general, la presentación final de la carpeta (presentación de todas las soluciones de las tareas y los diarios de grupo resueltos).

El diario de grupo es un instrumento que nos permite establecer los momentos tenidos en cuenta por los estudiantes para solucionar la tarea. Estos momentos caracterizarán las dificultades y los grados de satisfacción de los estudiantes al momento de solucionar la tarea. Proponemos dos tablas y un grafo para el diario de grupo. En la primera tabla, pedimos a los estudiantes que caractericen entre 4 y 10 momentos tenidos en cuenta para la solución de la tarea y que mencionen cada uno de ellos usando una marca representativa (nombre o frase); además, describir las razones para llamarlo de esa manera en un párrafo que no exceda 40 palabras. En la segunda tabla, los estudiantes deben ordenar cada uno de los momentos construidos, teniendo en cuenta en forma descendente el nivel de satisfacción o agrado que les produjo durante la solución de la tarea, y describir allí las razones que dan lugar a esta clasificación. Después, los estudiantes se remiten al grafo (figura 10) y señalan con puntos el nivel de dificultad que se les presentó en cada momento. Al terminar la evaluación de momentos por grados de dificultad, unen los puntos con un segmento de recta, estableciendo la variación de los grados de dificultad en los momentos. Nuevamente, recurren al grafo y señalan en cada uno de los momentos el nivel de satisfacción o agrado producido en cada uno de ellos al momento de resolver la actividad. Al terminar la evaluación de momentos por niveles de satisfacción, los estudiantes deben unir los puntos con un segmento de recta usando un color distinto al del nivel de dificultad. Por último, deben describir las razones que los llevaron a establecer los niveles de variación en el grafo de dificultad, argumentado las causas, dificultades o comprensiones que han producido una variación en estos grados. De no haber variaciones, deben presentar las razones que produjeron tal situación.

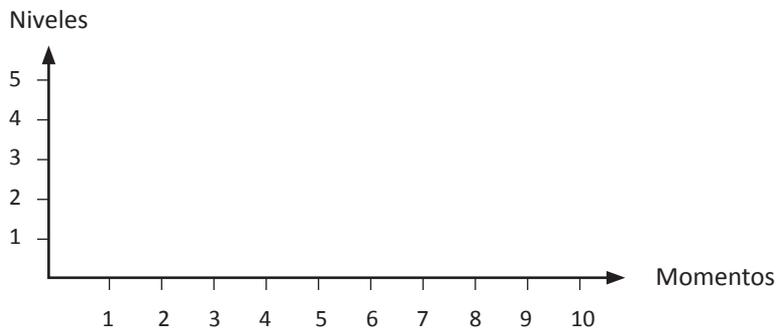


Figura 10. Grafo del diario de grupo

*Evaluación escrita al cierre de la unidad*

La evaluación escrita es una prueba que pretende establecer el nivel adquirido por los estudiantes en la aplicación de sus conocimientos y destrezas en una situación particular. Esta evaluación se realizará al final de la secuencia de actividades y pretende evaluar específicamente el desarrollo de los tres objetivos propuestos en la secuencia de actividades. La evaluación tiene tres ítems, y en cada uno se desarrolla un objetivo de la secuencia. Su descripción se presenta en el siguiente apartado.

*Parrilla de observación*

El uso de la parrilla de observación como un instrumento de evaluación tiene que ver con la verificación de las capacidades activadas en un camino de aprendizaje. También, permite establecer con claridad cuáles son los errores más frecuentes en los que incurren los estudiantes, así como identificar cuáles son las capacidades que requieren un mayor tratamiento. Su propósito consiste en construir estrategias y tareas de corrección que nos permitan hacer énfasis en estos aprendizajes. En la figura 11, presentamos una hipótesis de dos caminos de aprendizaje. El primero se presenta con la línea gris para establecer el camino previsto por el docente (posible camino de aprendizaje que los estudiantes pueden realizar al resolver la tarea de manera correcta) y el segundo se presenta con la línea negra para establecer el camino que el grupo de estudiantes realiza al resolver la tarea.

En el caso del ejemplo de la figura 11, el punto de inflexión muestra que el grupo de estudiantes generó un camino alternativo de solución o que incurrieron en un error. El análisis posterior del camino de aprendizaje realizado por los estudiantes le permitirá al profesor determinar cuál de estas dos opciones es la que se presentó. En el caso de ser un error, este podrá ser fácilmente constatado en el grupo de dificultades que están categorizadas para la tarea; así, será más certera la asignación de la actuación del profesor, la cual hará que el grupo de estudiantes retome el camino de aprendizaje correcto para la solución de la tarea y, por tanto, supere el error.

La verificación continua de los indicadores, junto con el uso reiterado de los instrumentos de evaluación durante la implementación, hace que consideremos la evaluación como un proceso dinámico y permanente.

Pasos	Camino propuesto	Observaciones Grupo 1: tarea La sombra																									
		Capacidades																									
		CP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	C25																										
2	C12 E11																										
3	C6 E1																										
4	C13 E9																										
5	C21 E8																										
6	C19 E2																										
7	C15																										
8	C14 E10																										
9	C11 E15																										
10	C10 E16																										
11	C16 E13																										
12	C20 E18																										
13	C22																										

Figura 11. Parrilla de observación de la tarea La sombra

### 4. Descripción de la unidad didáctica

En este apartado presentamos la descripción de la unidad didáctica. Inicialmente describimos la secuencia didáctica, con sus fases, objetivos y sesiones; después, exponemos las tareas que componen la secuencia didáctica.

## 1. Secuencia didáctica

En la tabla 11 presentamos de forma general la secuencia de tareas, atendiendo a la relación entre la fase, el objetivo, la sesión, la tarea y el contenido.

Tabla 11  
*Distribución de fases y sesiones de clase de la unidad didáctica*

Tarea	S.	Función	Objetivo	Contenido
<b>Fase inicial</b>				
Diagnóstica	1	1. Averiguar los conocimientos previos de los alumnos	Halla la medida de ángulos y lados de un triángulo rectángulo usando las razones trigonométricas	Propiedades geométricas de los triángulos (bidimensional)
La medida de los triángulos		2. Presentar el tema de razones trigonométricas		Medida de los ángulos (amplitud) y lados (distancia)
Parte 1	2			Conversión de medidas
Diagnóstica				Sistemas de ecuaciones
La medida de los triángulos				Razones trigonométricas
Parte 2				
<b>Fase de desarrollo</b>				
La sombra	3	1. Fomentar la interrogación y el cuestionamiento	Reconoce elementos, relaciones y aplicaciones de las razones trigonométricas en un triángulo cualquiera, aplicándolas para resolver problemas	Medida de los ángulos (amplitud) y lados (distancia)
Parte 1				Sistemas de ecuaciones
La sombra	4	2. Elaborar y construir el significado de las razones trigonométricas, a partir de la traducción de las distintas representaciones y la transformación sintáctica entre una misma representación		Razones trigonométricas
Parte 2				
La cometa	5	3. Aplicar sus conocimientos	Resuelve problemas reales usando las razones trigonométricas para el cálculo de distancias y ángulos	Longitudes (distancia)
	6	construidos, con problemas similares o más complejos al desarrollado		Amplitudes (ángulos)
				Razones trigonométricas
				Sistemas de ecuaciones

Tarea	S.	Función	Objetivo	Contenido
<b>Fase de cierre</b>				
Las moscas	7	1. Fortalecer los aprendizajes que se han construido	Resuelve problemas reales usando las razones trigonométricas	Propiedades geométricas de figuras tridimensionales
	8	2. Analizar la tarea a partir del análisis conceptual	para el cálculo de distancias y ángulos	Medida de los ángulos (amplitud) y lados (distancia).
		3. Realizar una evaluación, que permita establecer si los estudiantes cumplieron con los objetivos propuestos en la secuencia de actividades de razones trigonométricas		Sistemas de ecuaciones  Razones trigonométricas
Evaluación	9		Evaluar los tres objetivos	Evaluar los contenidos

S.: Sesión

## 2. Tareas

Después de caracterizar de forma general la secuencia de tareas, presentamos a continuación la descripción en detalle de cada una de ellas.

### 1. Prueba diagnóstica: la medida de los triángulos (parte 1)

La formulación de la prueba diagnóstica es la siguiente.

#### *Problema 1*

Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 30 metros. Su ángulo opuesto mide 0,5 radianes. Determine la medida de los ángulos (expréselos en grados) y los lados faltantes del triángulo.

#### *Problema 2*

Se tiene un triángulo rectángulo cuya medida de uno de sus ángulos es de  $61,35^\circ$  y la medida del cateto adyacente es de 30 metros. Determine la medida de los ángulos (expréselos en radianes) y los lados faltantes del triángulo.

Los estudiantes contarán con lápiz, borrador, hoja de diagnóstico y calculadora de funciones, y realizarán la actividad de forma individual (véanse acciones

en el análisis de instrucción). El desarrollo de esta tarea permite que los estudiantes (indiferentemente del camino de aprendizaje recorrido para su solución) establezcan las longitudes y ángulos de un triángulo rectángulo. El profesor orientará las acciones dando inicialmente una breve instrucción verbal de la prueba, así como las condiciones específicas que permiten su desarrollo. Después, propondrá que, de forma escrita, realicen la prueba diagnóstica.

El camino de aprendizaje que los estudiantes pueden realizar de los problemas 1 y 2 es el siguiente. Realiza la representación gráfica del problema (C12), ubica los datos conocidos y desconocidos en la representación gráfica (C13), pasa el ángulo de radianes a grados (C9), utiliza la calculadora para hallar la medida (C20), usa el teorema de la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo euclídeo (C5) para hallar el ángulo restante, realiza un despeje de la ecuación establecida anteriormente (C10) y halla el ángulo. Después, establece el cateto adyacente, el cateto opuesto y la hipotenusa (C19) en la representación gráfica, y reconoce que la relación existente entre los parámetros e incógnitas que aparecen en la representación gráfica es una relación trigonométrica (C15). Expresa la relación como la razón trigonométrica seno (C26), le asigna a la ecuación trigonométrica los datos dados (parámetros) del problema (C11), halla la incógnita despejando la ecuación trigonométrica (C10), obtiene un valor numérico usando la calculadora de funciones (C20), reconociendo que el valor numérico que va a obtener es la longitud de un segmento (C16). De esta manera, relaciona dicho valor como una de las soluciones del problema trigonométrico (C22). Después de haber obtenido dos lados del triángulo, utiliza el teorema de Pitágoras (C7) para hallar el tercer lado, ubicando los datos conocidos en la ecuación del teorema de Pitágoras (C18), halla la incógnita despejando la ecuación (C10). Obtiene, de esta manera, un valor numérico usando la calculadora de funciones (C20) y relaciona este valor como la solución final del problema trigonométrico (C22). Las figuras 12 y 13 presentan los caminos de aprendizaje (tablas 4, 6 y 8).

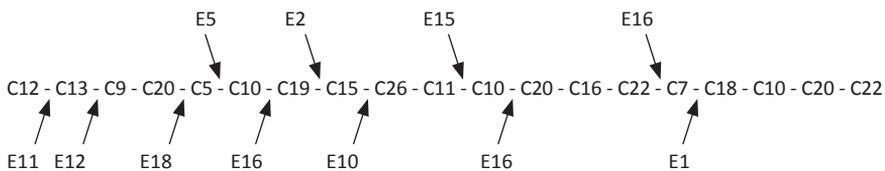


Figura 12. Camino de aprendizaje del problema 1

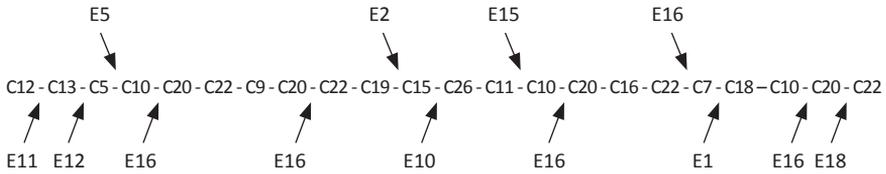
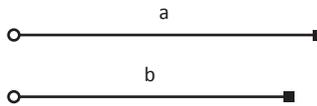


Figura 13. Camino de aprendizaje del problema 2

## 2. La medida de los triángulos (parte 2)

La formulación de esta tarea es la siguiente:

Si un estudiante tiene dos cuerdas de distinta longitud



Construya un triángulo rectángulo y halle el perímetro y la amplitud de cada uno de sus ángulos teniendo en cuenta las siguientes especificaciones:

La cuerda  $a$  es opuesta al ángulo recto ( $90^\circ$ ) y su medida es de 35,5 cm.

La cuerda  $b$  mide 30 cm.

No se conoce la medida de la cuerda  $c$ .

No se conocen las amplitudes de los otros dos ángulos del triángulo rectángulo.

Los estudiantes contarán con lápiz, papel, compás, la calculadora de funciones, la calculadora gráfica TI 92 plus y el *software* Cabri. Esta parte de la prueba diagnóstica será resuelta por cada estudiante en casa. Para la segunda sesión de la prueba diagnóstica, el profesor recogerá los trabajos de todos los estudiantes y socializará algunos de ellos. A lo largo de la socialización, el profesor les recordará a los estudiantes lo que “tienen que saber y saber hacer”, en relación con los problemas planteados a lo largo de toda la prueba diagnóstica e incluirá algunos ejemplos en forma de ejercicios tipo. Según sus respuestas, planificará ayudas individuales para los que las necesiten. El desarrollo de la tarea implica que los estudiantes (indiferentemente del camino de aprendizaje recorrido para su solución) hallen las longitudes y ángulos de un triángulo rectángulo y establezcan diferentes relaciones entre los datos dados en la tarea y los resultados obtenidos.



árbol, y donde se establezca la longitud de la altura del árbol invariante. Teniendo en cuenta estas especificaciones y los datos tomados en la tabla, realice las siguientes acciones:

Varíe el ángulo de elevación en la representación hecha en Cabri y establezca la relación entre la longitud de la sombra y el árbol.

En cada una de las variaciones hechas al ángulo aplique la razón trigonométrica para verificar la altura del árbol.

Los estudiantes contarán con el goniómetro casero, la cinta métrica, lápiz, papel, la calculadora de funciones, la calculadora gráfica TI 92 plus y el *software* Cabri. Con la intención de que el estudiante se familiarice con la tarea y que tenga claro cómo debe desarrollarla, se le darán unas instrucciones de forma oral, para que ellos realicen preguntas sobre (a) los materiales (recursos didácticos), (b) la planeación del tipo de tarea a la que se va a enfrentar y (c) la formulación de preguntas al profesor. Estas preguntas buscan orientar el tipo de conocimiento matemático que deberán poner en juego los estudiantes. Las acciones (las instrucciones y las preguntas) que se realizan en esta tarea también las haremos con la tarea de La cometa y Las moscas.

Los estudiantes realizarán la actividad en un primer momento de forma individual y en un segundo momento en grupos pequeños y en el gran grupo (véanse acciones en el análisis de instrucción). Teniendo en cuenta que uno de los papeles principales del profesor es orientar a los estudiantes en la construcción de los procesos requeridos para el desarrollo del tema, se establecen dos actuaciones del profesor para enfrentar dificultades y errores presentados en esta actividad: (a) preguntas orientadoras y (b) diseño de tareas extraclase, sustentadas desde la ruta que proporciona la construcción de los caminos de aprendizaje diseñados previamente.

La figura 15 presenta el camino de aprendizaje que los estudiantes pueden realizar de esta tarea (tablas 4, 6 y 8).

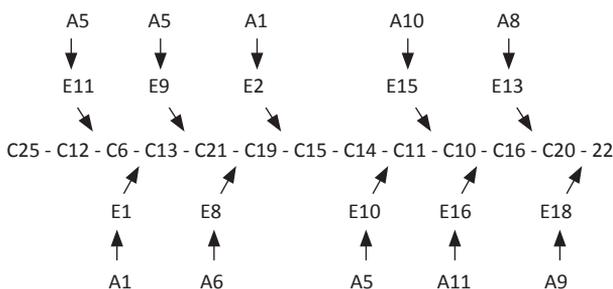


Figura 15. Camino de aprendizaje de la tarea La sombra

#### 4. La cometa

La formulación de esta tarea es la siguiente:

Dos estudiantes que juegan fútbol en la posición de arqueros observan una cometa que se desplaza justo encima de ellos, mientras se encontraban ubicados cada uno a una distancia de 30 metros en la línea de gol de las porterías de la cancha del colegio. Al determinar los ángulos de elevación en un momento preciso respecto a la cometa, se encontró que estos median  $87^\circ$  desde la visual de un arquero y  $84^\circ$  desde la visual del otro arquero.

- ¿A qué altitud sobre el nivel del suelo está la cometa en el momento en que son medidos los ángulos de elevación?
- ¿A qué distancia se encuentra la cometa respecto a cada uno de los estudiantes?

Los estudiantes contarán con regla, papel, lápiz, transportador, compás, calculadora de funciones, la calculadora gráfica TI 92 plus y el *software* Cabri. La resolución de la tarea será grupal (donde cada grupo de estudiantes asume la responsabilidad de dar cuenta de la tarea). El papel del profesor durante la resolución de la tarea debe ser el siguiente: presentar la tarea en hojas, previendo que la primera producción del estudiante sea una visualización y posteriormente un desarrollo algebraico y geométrico de la tarea; estimular en los estudiantes el uso de materiales previstos para el desarrollo de la tarea; y proponer un estado en el cual se socialicen los métodos por los cuales los estudiantes resolvieron la tarea.

La figura 16 presenta el camino de aprendizaje que los estudiantes pueden realizar del literal *a* (tablas 4, 6 y 8).

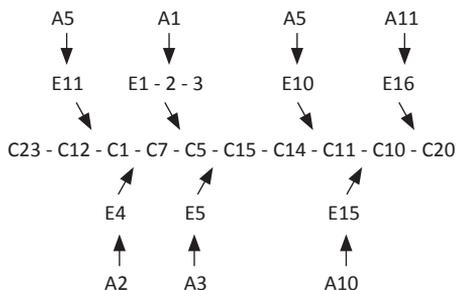


Figura 16. Camino de aprendizaje de la parte a) de la tarea La cometa

La figura 17 presenta el camino de aprendizaje que los estudiantes pueden realizar del literal *b* (tablas 4, 6 y 8).

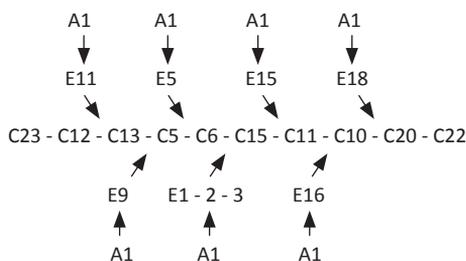


Figura 17. Camino de aprendizaje de la parte b) de la tarea La cometa

### 5. Las moscas

La formulación de esta tarea es la siguiente:

Dos moscas están a una distancia máxima en una caja, cuyas dimensiones son: 80 centímetros de largo, 60 centímetros de ancho y 20 centímetros de alto. Si una mosca observa a la otra:

¿Cuál es el ángulo de elevación cuando una mosca debe observar a la otra?

Los estudiantes contarán con lápiz, cuaderno de apuntes, calculadora de funciones, la calculadora gráfica TI 92 plus y el *software* Cabri. La tarea se desarrollará y resolverá de forma grupal (donde cada grupo de estudiantes asume la responsabilidad de dar cuenta de la tarea), aplicando el conocimiento matemático, así como los recursos didácticos con los que cuente. Una vez los grupos de estudiantes hayan dado cuenta de la tarea, expondrán a sus demás compañeros su solución. El profesor orientará la resolución de la tarea y estimulará en los estudiantes el uso de materiales previstos para el desarrollo de la tarea. Además, propondrá una socialización de la tarea para establecer los métodos por los cuales los estudiantes la resolvieron.

La figura 18 presenta el camino de aprendizaje que los estudiantes pueden realizar al abordar esta tarea (tablas 4, 6 y 8).

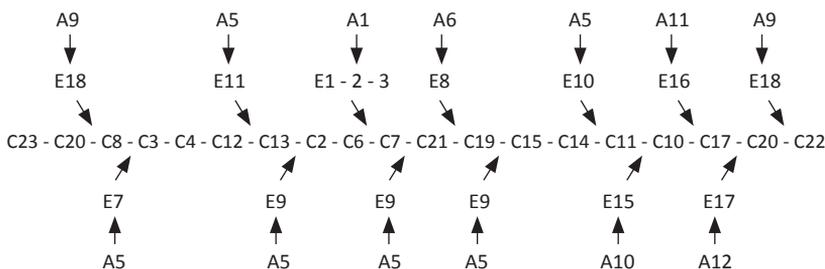
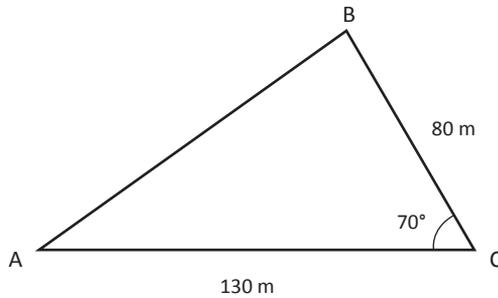


Figura 18. Camino de aprendizaje de la tarea Las moscas

### 6. Evaluación

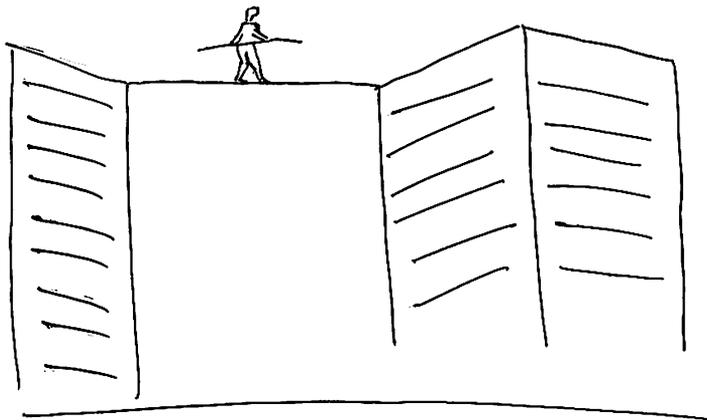
El examen es el siguiente:

1. Calcule el lado, los ángulos y la altura del triángulo, sabiendo que dos de sus lados miden 80 metros y 130 metros, y forman entre ellos un ángulo de  $70^\circ$ .



*Figura A*

2. Un acróbata desea caminar por un cable tensionado entre las terrazas de dos edificios que tienen 100 metros de altura. Se sabe que el ángulo de elevación producido por la altura de uno de los edificios hasta el extremo máximo del otro es de  $65^\circ$ . Determine la distancia aproximada que tendrá que recorrer el acróbata para desplazarse de un extremo de uno de los edificios al otro.



*Figura B*

3. Dos barcos pesqueros están separados 120 metros entre sí; se extiende desde cada barco una línea de pesca hasta la boya y cada una de las líneas de pesca mide 212 metros. ¿Cuál es el ángulo que forman las líneas de pesca en la boya?

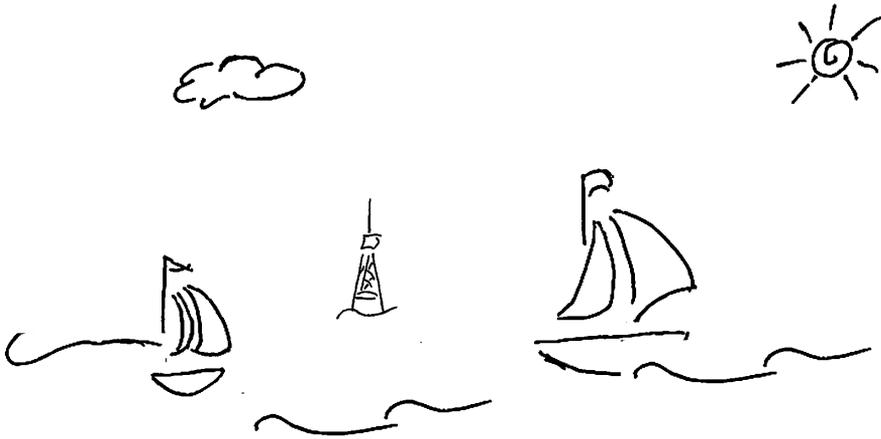


Figura C

Los estudiantes contarán con hoja de evaluación, lápiz, regla, transportador, compás, calculadora de funciones y calculadora gráfica TI 92 plus. Los estudiantes realizarán la actividad de forma individual (véanse acciones en el análisis de instrucción). Los estudiantes, al desarrollar la tarea, tendrán que usar las razones trigonométricas para el cálculo de distancias y ángulos. El profesor orientará las acciones de los estudiantes dando inicialmente una breve instrucción verbal de la evaluación, así como las condiciones específicas que permiten su desarrollo. Después, entregará la hoja de la evaluación a cada estudiante para que la desarrolle; además, estará atento a dar respuesta a las preguntas, dudas e inquietudes que tengan los estudiantes.

La figura 19 presenta el camino de aprendizaje que los estudiantes pueden realizar al abordar la pregunta *a* de esta evaluación (tabla 4).

C6 - C1 - C6 - C19 - C15 - C26 - C11 - C10 - C16 - C22

Figura 19. Camino de aprendizaje de la parte a) de la evaluación

La figura 20 presenta el camino de aprendizaje que los estudiantes pueden realizar al abordar la pregunta *b* (tabla 4).

C23 – C12 – C13 – C19 – C15 – C14 – C11 – C10 – C20 – C16 – C22

*Figura 20.* Camino de aprendizaje de la parte b) de la evaluación

La figura 21 presenta el camino de aprendizaje que los estudiantes pueden realizar al abordar la pregunta *c* (tabla 4).

C12 – C13 – C6 – C1 – C15 – C26 – C11 – C10 – C17 – C20 – C22

*Figura 21.* Camino de aprendizaje de la parte b) de la evaluación

## 5. Justificación del diseño

Justificamos el diseño de nuestra unidad didáctica con base en las condiciones curriculares, académicas y socioeconómicas de los estudiantes, y en la conveniencia, pertinencia y coherencia de su diseño, a partir del análisis del foco de contenido.

### 1. Condiciones curriculares, académicas y socioeconómicas de los estudiantes

Nuestro diseño de la unidad didáctica se basa en los *Lineamientos curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998), los *Estándares básicos de competencias en Matemáticas* (MEN, 2006), el Decreto 1290 (MEN, 2009) y el plan de estudios del IED José Joaquín Castro Martínez.

Los *Lineamientos curriculares de Matemáticas* permitieron organizar la planificación atendiendo a los conocimientos básicos —con el estudio y desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos—, a los procesos generales y las situaciones problemáticas que están relacionadas con la vida diaria. Esta planificación nos permitió evaluar el estándar “Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas” (MEN, 2006, p. 88), a partir de los criterios de evaluación que construimos con base en los objetivos y las capacidades que se desarrollan en las tareas que componen la unidad didáctica. Estas disposiciones legales sustentan el plan de estudios del IED José Joaquín Castro Martínez; de esta manera, se

genera una coherencia entre las condiciones curriculares y el diseño de la unidad didáctica.

Para el diseño e implementación de la unidad didáctica se tuvo en cuenta la diversidad de la formación académica de los estudiantes, que se estableció a partir de sus niveles de competencias específicas en el área de matemáticas. Estos niveles se relacionan específicamente con la formación previa de los estudiantes. Por lo tanto, se categorizaron en niveles alto y medio a los estudiantes que han hecho todos sus estudios de bachillerato en el IED José Joaquín Castro Martínez —que son la gran mayoría—, mientras que los estudiantes que provienen de zonas rurales del país en situación de desplazamiento se encuentran en niveles medio y bajo. Este hecho nos llevó a realizar la medida de los triángulos como la primera actividad en la secuencia de la unidad didáctica, con el propósito de que los estudiantes alcanzaran los conocimientos previos necesarios para abordar el estudio de las razones trigonométricas.

Para promover la construcción de los conceptos y procedimientos, planificamos las discusiones y argumentaciones de cada una de las actividades en los pequeños grupos y en el gran grupo. Planteamos este tipo de interacción aprovechando el modelo de trabajo al que los estudiantes están acostumbrados en la clase de matemáticas. La conformación de los grupos se basó en la amistad, la confianza y la responsabilidad. Estas condiciones previas fueron tenidas en cuenta al momento de diseñar el diario de grupo y el diario del profesor, ya que respondían al modelo de sesión de clase habitual para los estudiantes.

Debemos destacar que esperábamos que el gusto por las actividades de tipo matemático en función de un reto personal propiciara resultados de un nivel superior en la clase de matemáticas y, en general, en el desarrollo habitual de las competencias escolares.

## **2. Conveniencia, pertinencia y coherencia de la unidad didáctica**

En este apartado justificamos el diseño de la unidad didáctica desde dos perspectivas: la primera se basa en la contribución de las tareas a las expectativas de aprendizaje (capacidades, objetivos y competencias) y la segunda se refiere a la coherencia de la secuencia de las tareas con base en su complejidad. En la tabla 12 presentamos la contribución de las tareas a cada objetivo. Para cada tarea, identificamos las capacidades que pueden ser activadas y las organizamos por énfasis. Realizaremos un seguimiento a la capacidad 15 en los diferentes caminos de aprendizaje. Esta es capacidad clave para el desarrollo de las razones trigonométricas.

Tabla 12  
 Contribución de las tareas a los objetivos

Tareas	Capacidades		
	Geométricas	Generales	Trigonométricas
<b>Objetivo 1</b>			
Medida de los triángulos, parte 1, problema 1	C5, C7	C9, C10, C11, C12, C13	C15, C16, C19, C20, C22, C26
Problema 2	C5, C7	C9, C10, C11, C12, C13	C15, C16, C19, C20, C22, C26
Medida de los triángulos parte 2	C5	C9, C10, C11, C12, C13	C14, C15, C16, C19, C20, C22, C27
<b>Objetivo 2</b>			
La sombra	C6	C10, C11, C12, C13, C25	C14, C15, C16, C19, C20, C21, C22
La cometa Pregunta a)	C1, C5, C7	C10, C11, C12, C23	C14, C15, C20, C22
La cometa Pregunta b)	C5, C6	C10, C11, C12, C13, C23	C15, C20, C22
<b>Objetivo 3</b>			
Las moscas	C2, C3, C4, C6, C7, C8	C10, C11, C12, C13, C23	C14, C15, C17, C19, C20, C21, C22

En la tabla 12 se aprecia que existe un gran desarrollo en las tareas de las capacidades del énfasis trigonométrico (C14, C15, C16, C17, C19, C20, C21, C22, C26, C27), que son nuestro propósito fundamental para el desarrollo de la unidad didáctica. La capacidad C15 (“Reconoce que la relación existente entre los parámetros e incógnitas que aparecen en la representación gráfica del problema [el triángulo], es una relación trigonométrica”) es crucial para el desarrollo de las tareas y el cumplimiento de los objetivos.

Desde la perspectiva del cubrimiento del contenido, observamos que hay unos conceptos previos que se abordan inicialmente: (a) teorema de la suma de los ángulos internos (C5), (b) teorema de Pitágoras (C2, C7, C19) y (c) conversión de medidas (C9). Las razones trigonométricas son el concepto por desarrollar (C14, C15, C26, C27). Los hechos conceptuales que se abordan son: (a) altura de los triángulos (C1), (b) propiedades de los triángulos (C6, C21), (c) propiedades de los sólidos (C4, C3, C8), (d) despeje de ecuaciones

(C10, C24) y (e) evaluación de las ecuaciones (C11). Por último, se destacan los procedimientos de medida (C23), de representación (C12, C13, C23) y de cálculo (C20).

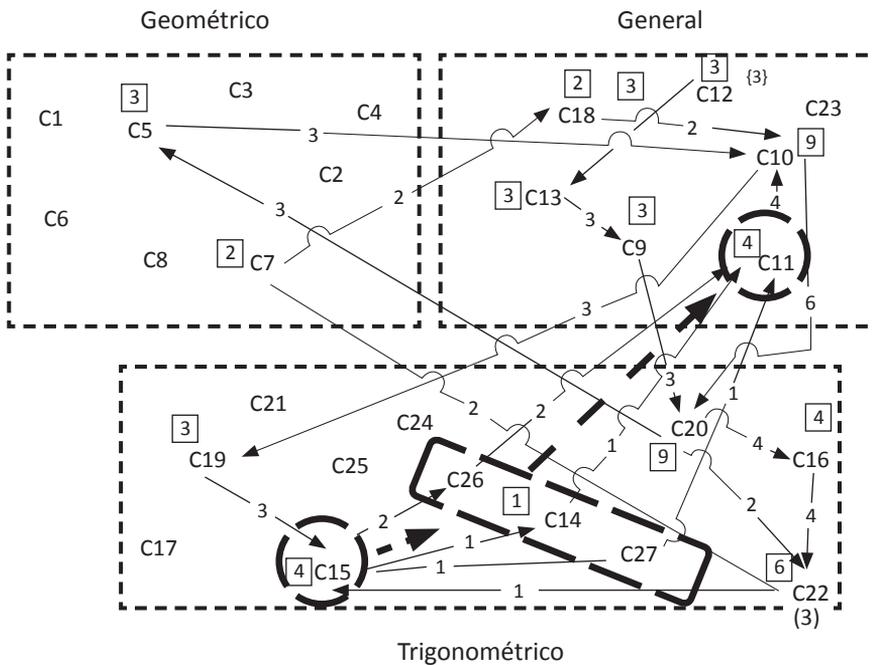
Justificamos la contribución de las tareas a los objetivos con base en su camino de aprendizaje. La reunión de esos caminos de aprendizaje permite construir el grafo de cada uno de los objetivos. A continuación, presentamos los grafos de los tres objetivos. En la figura 22 presentamos el grafo del primer objetivo, que incluye los caminos de aprendizaje de la tarea Las medidas de los triángulos partes 1 y 2.

El análisis de la información que arroja el grafo a partir de los tres caminos de aprendizaje que resuelven estas tareas permiten concluir que (a) los tres caminos de aprendizaje incluyen capacidades que hacen parte de los tres énfasis (geométrico, general y trigonométrico); (b) los caminos de aprendizaje parten de C12, que está incluida en el énfasis general; (c) la capacidad que les da sentido a los tres caminos de aprendizaje planteados es la C15, porque es justo el reconocimiento de la relación existente entre los parámetros (datos conocidos) e incógnitas (datos por hallar) que aparecen en la representación gráfica del problema (el triángulo), lo que permite hacer un buen uso de la razón trigonométrica específica; (d) las capacidades que posiblemente usaría el estudiante al querer resolver la tarea y que describen la razón trigonométrica son C14, C26 y C27; (e) las capacidades más frecuentes son C10 y C20 (9 veces), C22 (6 veces), C11 y C15 (4 veces), y C5, C9, C12, C13, C14, C16, C19, C26 y C27 (3 veces); (f) la secuencia más frecuente es C11–C10, C20–C16 y C16–C22 (4 veces); (g) las secuencias C20–C16 y C16–C22 están en el énfasis trigonométrico, mientras que la secuencia C11–C10 está en el énfasis general; y (g) los tres caminos de aprendizaje terminan en la C22, que está en el énfasis trigonométrico.

Los análisis anteriores permiten justificar que los caminos de aprendizaje y las capacidades activadas para la solución de las tareas son los pertinentes para lograr el primer objetivo. Las capacidades que más se desarrollan son las que se encuentran en el énfasis trigonométrico (C14, C15, C16, C19, C20, C22, C26 y C27) y que se refieren específicamente a las razones trigonométricas.

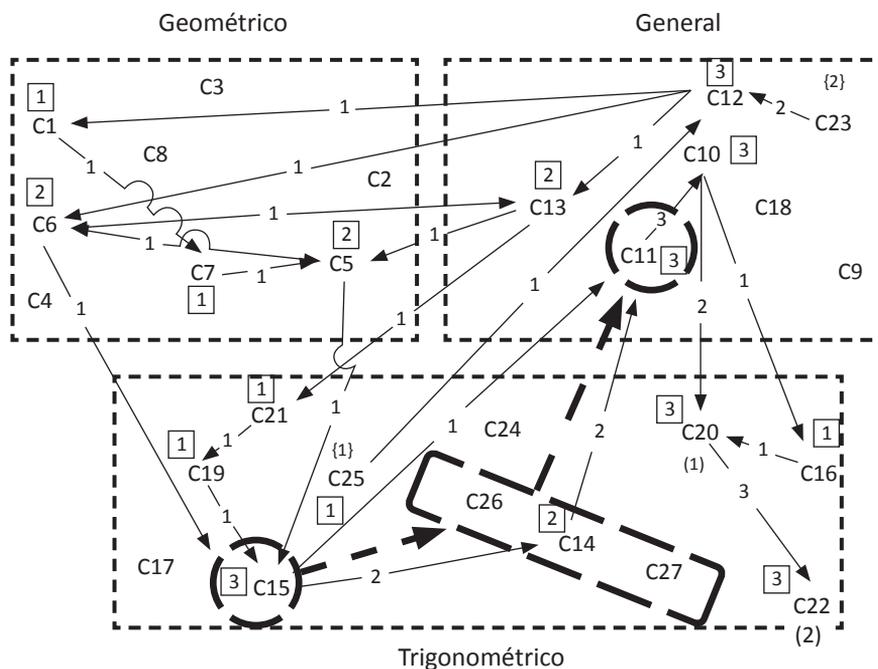
En la figura 23 presentamos el grafo del segundo objetivo, que incluye los caminos de aprendizaje de las tareas La sombra y La cometa. El análisis de la información que arroja el grafo, a partir de los tres caminos de aprendizaje que resuelven tales tareas, permite concluir que (a) los tres caminos de aprendizaje incluyen capacidades que hacen parte de los tres énfasis (geométrico, general y trigonométrico); (b) los caminos parten de C23 —énfasis general— y C25

—énfasis trigonométrico—; (c) nuevamente la capacidad que le da sentido a los tres caminos de aprendizaje planteados es la C15, porque es justo el reconocimiento de la relación existente entre los parámetros (datos conocidos) e incógnitas (datos por hallar) que aparecen en la representación gráfica del problema (el triángulo), lo que permite hacer un buen uso de la razón trigonométrica; (d) las capacidades que posiblemente usaría el estudiante al querer resolver la tarea y que describen la razón trigonométrica son C14, C26 y C27; (e) las capacidades más frecuentes son C10, C11, C12, C15 y C22 (3 veces), C5, C6, C13, C14, C23 y C26 (2 veces); (f) las secuencias más frecuentes son C11-C10 y C20-C22 (3 veces), y C23-C12 y C10-C20 (2 veces); (g) las secuencias C15-C14 y C20-C22 están en el énfasis trigonométrico, las secuencias C11-C10 y C23-C12 en el énfasis general, y la secuencia C10-C20 realiza un tránsito entre el énfasis general y trigonométrico; y (h) los tres caminos terminan en la C22, que está en el énfasis trigonométrico.



Entre corchetes: número de veces que la capacidad es origen. Entre paréntesis: número de veces que la capacidad es final. El número que aparece en cada flecha es la cantidad de veces que se produce esa relación. El número que se encuentra en el cuadro pequeño es la cantidad de veces que se pone en juego la capacidad.

Figura 22. Grafo de los caminos de aprendizaje del primer objetivo



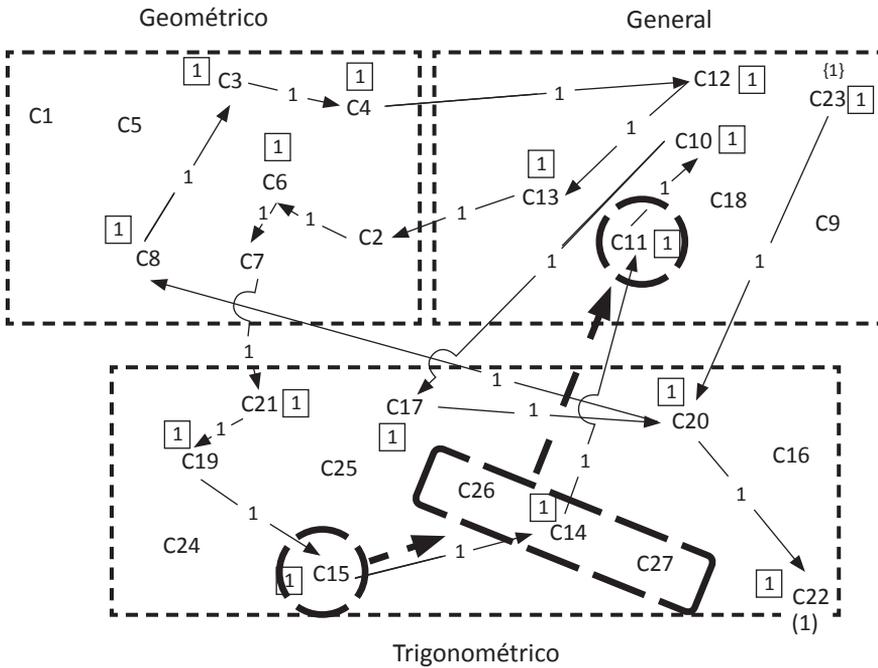
Entre corchetes: número de veces que la capacidad es origen. Entre paréntesis: número de veces que la capacidad es final. El número que aparece en cada flecha es la cantidad de veces que se produce esa relación. El número que se encuentra en el cuadro pequeño es la cantidad de veces que se pone en juego la capacidad.

Figura 23. Grafo de los caminos de aprendizaje del segundo objetivo

El análisis anterior permite justificar que los caminos de aprendizaje y las capacidades activadas para la solución de las tareas son los pertinentes para lograr el segundo objetivo. Las capacidades que más se desarrollan son las que se encuentran en el énfasis trigonométrico (C14, C15, C16, C20, C21, C22 y C25) y se refieren específicamente a las razones trigonométricas. Es importante resaltar que la secuencia C10-C20 realiza un tránsito entre el énfasis general y trigonométrico, que sería el mismo tránsito que el estudiante puede hacer de una capacidad a otra en los distintos énfasis.

En la figura 24 presentamos el grafo del tercer objetivo, que incluye el camino de aprendizaje de Las moscas. El análisis de la información que arroja el grafo, a partir del camino de aprendizaje que resuelve la tarea, permite concluir que: (a) el camino de aprendizaje incluye capacidades que hacen parte de los tres énfasis (geométrico, general y trigonométrico); (b) el camino de aprendizaje

parte de C23, que está incluida en el énfasis general; (c) la capacidad C15 le da sentido al camino de aprendizaje planteado, porque es justo el reconocimiento de la relación existente entre los parámetros (datos conocidos) e incógnitas (datos por hallar) que aparecen en la representación gráfica del problema (el triángulo), lo que permite hacer un buen uso de la razón trigonométrica; (d) la capacidad que posiblemente usaría el estudiante al querer resolver la tarea y que describe la razón trigonométrica es la C14; (e) todas las capacidades y secuencias se repiten una vez; (f) las secuencias C23-C20 y C10-C17 realizan un tránsito entre el énfasis general y trigonométrico, y la secuencia C7-C21 realiza un tránsito entre el énfasis geométrico y el trigonométrico; (g) el camino de aprendizaje termina en la capacidad C22, que está en el énfasis trigonométrico.



Entre corchetes: número de veces que la capacidad es origen. Entre paréntesis: número de veces que la capacidad es final. El número que aparece en cada flecha es la cantidad de veces que se produce esa relación. El número que se encuentra en el cuadro pequeño es la cantidad de veces que se pone en juego la capacidad.

Figura 24. Grafo de los caminos de aprendizaje del tercer objetivo

El análisis anterior permite justificar que los caminos de aprendizaje y las capacidades activadas para la solución de la tarea son los pertinentes para lograr

el tercer objetivo. Las capacidades que más se desarrollan son las que se encuentran en el énfasis trigonométrico (C14, C15, C19, C20, C21, C22 y C25) y que se refieren específicamente a las razones trigonométricas. Es importante resaltar que las secuencias que realizan un tránsito entre el énfasis general y trigonométrico (C23-C20 y C10-C17) y un tránsito entre el énfasis geométrico y trigonométrico (C7-C21) son muy importantes, porque permiten establecer cómo el estudiante puede activar las capacidades desde los distintos énfasis.

Las conclusiones que establecemos desde los tres análisis de los grafos permiten justificar las relaciones existentes entre los objetivos, las tareas y las capacidades, que son propuestos en esta unidad didáctica. Por último, abordaremos las competencias que se desarrollan al cumplir los objetivos, para terminar de justificar el diseño de la unidad didáctica desde las expectativas de aprendizaje.

En la tabla 13 relacionamos los objetivos y las tareas con las competencias de formulación, tratamiento y resolución de problemas, de sistemas de representación y de formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. Además, establecemos unos descriptores —construidos desde los lineamientos (MEN, 1998)— para cada competencia. Para la competencia de formulación, tratamiento y resolución de problemas, los descriptores son: (a) desarrollar habilidad para comunicarse matemáticamente; (b) provocar procesos de investigación; (c) comprender los conceptos y procesos matemáticos, y (d) proponer diversas estrategias. Para la competencia de sistemas de representación, los descriptores son: (a) pasar del lenguaje de la vida diaria al lenguaje de las matemáticas; (b) comprender e interpretar las ideas matemáticas de forma oral, escrita y a partir de la descripción visual; (c) construir y relacionar varias representaciones, y (d) hacer informes orales y escritos por medio de las representaciones. Para la competencia de formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, los descriptores son: (a) procedimientos aritméticos, (b) procedimientos métricos, (c) procedimientos geométricos, (d) procedimientos analíticos y (e) uso de recursos y materiales.

En la tabla 13 se aprecia el conjunto de descriptores que son activados a partir de una o más tareas específicas, y se establece la medida en que las tareas contribuyen a las competencias. Los totales medidos en porcentajes permiten establecer el grado de profundidad con el cual una competencia es potenciada a partir del conjunto de tareas. La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos es la competencia que presenta un mayor porcentaje (94,3%); por lo tanto, es la que tiene un mayor nivel de complejidad. Aunque la competencia formulación, tratamiento y resolución de problemas presenta un porcentaje de 71,5% y la competencia de sistemas de representación presenta un

porcentaje de 89,3%, estos porcentajes permiten establecer un nivel de complejidad medio para el desarrollo de las competencias. Es muy importante constatar que las tres competencias presentan descriptores muy significativos para el desarrollo de los objetivos. Justificamos la pertinencia y coherencia de la unidad didáctica con base en esta relación entre tareas, objetivos y competencias.

Tabla 13  
*Relación entre objetivos, tareas y competencias*

Tareas	Competencias													
	FTRP				SR				FCEP					
	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	e	
<b>Objetivo 1</b>														
Medida de los triángulos parte 1, problema 1	✓		✓			✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	
Problema 2	✓		✓			✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	
Medida de los triángulos parte 2	✓		✓			✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	
<b>Objetivo 2</b>														
La sombra	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
La cometa	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
Pregunta a	✓		✓			✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
Pregunta b	✓		✓			✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	
<b>Objetivo 3</b>														
Las moscas	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
Total por descriptores	20 de 28				25 de 28				33 de 35					
Total por competencia	71,5%				81,3%				94,3%					

FTRP: formulación, tratamiento y resolución de problemas; SR: sistemas de representación; FCEP: formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.

### 1. Complejidad de las tareas

Tendremos en cuenta dos aspectos: el primero se refiere a la relación establecida de las tareas, objetivos y competencias (tabla 13), y el segundo, al nivel de complejidad establecida por Ponte (2004).

Respecto al primer aspecto, se puede establecer que en las tareas de la medida de los triángulos parte 1 y 2 no se desarrollan los descriptores (b) y (d) de la competencia formulación, tratamiento y resolución de problemas, el descriptor (a) de la competencia sistemas de representación y el descriptor de la

competencia formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. En este caso, las tareas de La medida de los triángulos se encuentran en un nivel básico, porque no activan todos los descriptores propuestos para las competencias. Las tareas La sombra y La cometa no activan los descriptores (b) y (d) de la competencia formulación, tratamiento y resolución de problemas, ni el descriptor (e) de la competencia formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. Por lo tanto, estas tareas se encuentran en un nivel medio. La tarea de Las moscas activa todos los descriptores propuestos en las tres competencias. Por lo tanto, presenta un nivel alto de relación.

Desde el segundo aspecto, justificamos la elección de las tareas que hacen parte de la secuencia didáctica a partir de la coherencia interna que tiene cada una de ellas en torno al nivel de complejidad que presentan. Tal complejidad se basa en la propuesta de dimensiones de Ponte (2004). La determinación de las tareas pretende llevar a los estudiantes a resolver diversos tipos de situaciones que están basadas en las razones trigonométricas. Teniendo en cuenta que los factores clave que determinan el aprendizaje son la actividad que realizan los estudiantes, así como la reflexión que ellos mismos efectúan sobre sus acciones, a continuación describiremos cada tarea en términos de su complejidad.

En la tarea de La medida de los triángulos (parte 1) se presenta una actividad que, respecto a su complejidad, es de tipo “problema accesible abierto”. Esta tarea le plantea al estudiante desafíos cuando se le solicita expresar una situación particular en una situación matemática. En este caso, lo estimula a hacer transformaciones sintácticas en el sistema de representación verbal, usando expresiones verbales para resolver la tarea.

La tarea de La medida de los triángulos (parte 2) presenta una complejidad tipo problema, cerrado y desarrolla el raciocinio. Esta complejidad se establece porque las respuestas que da el estudiante a las preguntas incluidas en la tarea implican respuestas cerradas, pero entrañando un grado medio de dificultad. Por otra parte, el desarrollo de la tarea implica (independientemente del camino de aprendizaje recorrido para su solución) hallar las longitudes y ángulos de un triángulo rectángulo, y establecer diferentes relaciones entre los datos dados en la tarea y los resultados obtenidos por los estudiantes.

De las dos dimensiones de las tareas descritas por Ponte que hacen referencia al grado de dificultad y al grado de estructura, consideramos que la tarea de La sombra presenta una complejidad tipo problema, cerrado y desarrolla el raciocinio. Esta complejidad se da porque la respuesta que debe dar el estudiante a las dos preguntas incluidas en la tarea implican respuestas cerradas, pero entrañando un grado medio de dificultad.

Las tareas La cometa y Las moscas presentan una complejidad tipo problema, cerrado y desarrollan el raciocinio. Este tipo de complejidad se da porque la respuesta que debe dar el estudiante a las preguntas incluidas en la tarea implican respuestas cerradas, pero entrañando un grado elevado de dificultad. Por otra parte, el desarrollo de la tarea implica (independientemente del camino de aprendizaje recorrido para su solución) establecer diferentes relaciones entre los datos dados en la tarea y los resultados obtenidos por los estudiantes.

Consideramos que el planteamiento de las actividades que hacen parte de la secuencia didáctica ofrecen a todos los grupos de estudiantes las mismas oportunidades de aprendizaje. Somos conscientes de que el éxito o fracaso que tenga la implementación depende, entre otros aspectos, de la actitud de los estudiantes, así como de la actuación del profesor, del modo como se ejecute cada tarea, del modo de agrupar a los estudiantes y de los roles asumidos por los estudiantes y el profesor, entre otros. Consideramos que la elección de las tareas de la secuencia didáctica es apropiada en términos de la complejidad.

## 6. Descripción de la implementación

En este apartado presentamos la descripción general de la implementación de la unidad didáctica, a partir de cada una de las sesiones realizadas, y un análisis del trabajo en grupo realizado por los estudiantes al abordar las tareas. La unidad didáctica se implementó entre el 5 y el 26 de abril de 2011.

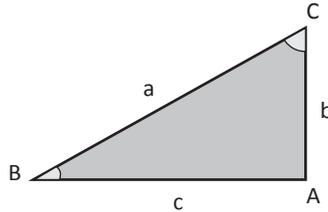
### 1. Implementación de la unidad didáctica

En la primera sesión, el profesor presentó a los estudiantes inicialmente todo el esquema de la unidad didáctica. Después, expuso el primer objetivo y logro —les entregó fotocopia—, y ejemplificó los criterios de logro (figura 25).

A continuación, el profesor les dio una guía con la primera tarea, La medida de los triángulos. Los estudiantes empezaron a resolver el primer problema, para ello realizaron la representación del problema y establecieron en la gráfica los datos dados en la tarea. Una primera pregunta o problema que se les presentó a algunos grupos fue la de pasar de radianes a grados, pero se les indicó que esta acción se había estudiado previamente a este tema, por lo que los estudiantes empezaron a revisar los apuntes y recordaron el proceso para aplicarlo al desarrollo del problema. Después de obtener el ángulo en grados empezaron a hallar las longitudes aplicando las razones trigonométricas. Con esta aplicación, dieron solución al problema.

5. Establecer la razón trigonométrica (seno, coseno y tangente) necesaria para resolver el triángulo rectángulo.

Establecer las razones trigonométricas respecto al ángulo B del triángulo.



$$\text{Sen } B^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \quad \text{Cos } B^\circ = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \quad \text{Tan } B^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

Figura 25. Quinto criterio de logro del primer objetivo

Cuando los grupos terminaron el primer problema, el profesor les entregó (en una guía) y explicó las instrucciones del diligenciamiento del diario de grupo. Luego les propuso empezar a llenarlo con el problema que habían desarrollado. La gran mayoría de grupos hicieron la primera tabla del diario de grupo al terminar el tiempo de la clase. El profesor les dejó de tarea terminar de resolver el diario de grupo y realizar el segundo problema.

En la segunda sesión, el profesor revisó inicialmente el diligenciamiento del diario de grupo y les propuso socializar la solución de los dos problemas. El grupo 3 presentó la solución del primer problema comentando que la dificultad que se les había generado era pasar de radianes a grados, pero que fue solucionada al revisar los apuntes. Este grupo presentó la gráfica y los procesos matemáticos correctos para la solución del problema. Los otros grupos no tuvieron preguntas frente al desarrollo ni grandes correcciones. Lo mismo pasó con la exposición realizada por el grupo 5, ya que presentaron correctamente la solución del segundo problema. Después de la socialización, el profesor les entregó las calculadoras TI-92 plus y les dio una breve introducción a las herramientas que podían utilizar para hacer las representaciones geométricas de los problemas propuestos. Inicialmente, los estudiantes graficaron los triángulos del problema 1 y 2, y rectificaron las medidas halladas en estos; así se terminó esta sesión.

En la tercera sesión, el profesor les presentó el segundo objetivo y logro, y les entregó (en fotocopia) y ejemplificó los criterios de este logro. Por el clima, no les pudo entregar la tarea La sombra. En cambio, les entregó la guía de la tarea La cometa. Los estudiantes empezaron a resolverla, pero algunos grupos tuvieron problemas al representarla, ya que no podían establecer la representación tridimensional en bidimensional, razón por la cual el profesor les explicó los elementos que debía tener la representación bidimensional (figura 26). Después, los estudiantes empezaron a ubicar los datos en la representación gráfica para las longitudes del triángulo, como la altura y los lados restantes del triángulo, pero a la hora de hallar los valores numéricos de las longitudes pedidas, los grupos no pudieron hacerlo, por dos razones: (a) no reconocieron en los tres triángulos el uso del teorema de la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo euclídeo y (b) no aplicaron los sistemas de ecuaciones de razones trigonométricas de dos incógnitas para hallar la altura del triángulo (se justifica y explica en el apartado 7). Como consecuencia, el profesor les dio la medida numérica de la distancia de un arquero hasta la cometa, debido a que no se tenía suficiente tiempo para que los estudiantes investigaran o aprendieran el desarrollo y solución de los sistemas de ecuaciones de razones trigonométricas de dos incógnitas. Al tener esta medida, los estudiantes resolvieron el primer triángulo. El segundo quedó de tarea, porque el tiempo de la clase se había acabado.

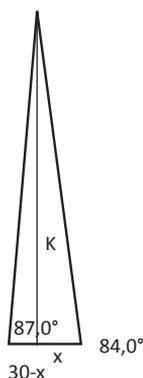


Figura 26. Representación bidimensional de la tarea La cometa

En la cuarta sesión se revisó la solución de la tarea La cometa y el profesor escogió el grupo 2 para que presentara la solución de la tarea, aplicando elementos como las gráficas y los procesos matemáticos. En esta sesión, los estu-

diantes volvieron a utilizar la calculadora TI-92 plus y trabajaron con el *software* Cabri Geometry, para establecer y representar geométicamente el problema. Por último, el profesor les dio la guía del diario de grupo para que fuese diligenciada y devuelta a él.

En la quinta sesión, las condiciones climáticas fueron las apropiadas para trabajar la tarea La sombra. Por lo tanto, el profesor entregó a cada uno de los grupos las guías de la actividad, en la que se presentaba una tabla que permitía registrar las medidas de la longitud de la sombra del árbol y del ángulo de elevación. También, se les entregaron los goniómetros y las cintas métricas que los estudiantes habían llevado al colegio para el desarrollo de la actividad. Después, realizaron la lectura de la tarea, que se socializó con el grupo de estudiantes. Surgieron dudas como “Si algunos grupos no tenemos cinta métrica, ¿podemos usar regla para medir la distancia de la sombra?”. La respuesta del profesor fue: “Pueden utilizar cualquier elemento para medir (regla, pasos, palmas...); lo importante es que esa unidad de medida la tengan en cuenta en todo el procedimiento del desarrollo de la tarea”. También, hicieron otras preguntas, por ejemplo: ¿cómo se utiliza el goniómetro? y ¿cómo determinamos el ángulo de elevación con goniómetro? Para estas dudas el profesor les explicó el uso del instrumento (figura 27).



Figura 27. Explicación del uso del goniómetro

En un parque cerca al colegio, el profesor pidió a los estudiantes que escogieran un árbol cualquiera y midieran la longitud de la sombra que proyectaba en el suelo. En el momento no había sol. Por lo tanto, el profesor les dio una

medida de seis metros (suponiendo que esa era la longitud de la sombra del árbol). Con esa medida y con ayuda del goniómetro, el profesor les pidió medir el ángulo de elevación. Empezó el trabajo en grupo. Los estudiantes delegaron funciones para la toma de datos: uno se encargaba de registrar los datos en la hoja guía de la tarea, mientras los otros dos, con ayuda de la cinta métrica y regla, medían la longitud de la sombra y el ángulo de elevación. A pesar de haber socializado con el curso previamente el uso del goniómetro, los estudiantes hicieron las siguientes preguntas:

- ¿Qué número del goniómetro tomamos?
- ¿Ponemos el instrumento desde la altura de los ojos o desde el piso? (figura 27).

En los grupos surgieron discusiones sobre los datos del ángulo de elevación, porque cuando cada uno de ellos tomaba la medida con el goniómetro, les daban medidas diferentes; la orientación por parte del profesor fue que tomaran una medida aproximada del ángulo, dependiendo de la ubicación de la sombra proyectada. Los estudiantes reflexionaron sobre la relación de la longitud de sombra con el ángulo de elevación en cada uno de los momentos de la mañana, reconociendo que la altura del árbol tenía que ser la misma, independiente de que la longitud de la sombra y el ángulo de elevación cambiaran (en hojas borrador, con ayuda de las razones trigonométricas, verificaban si la altura del árbol no cambiaba con los datos recopilados). En caso de que la altura cambiara mucho, procedían a medir de nuevo. Los resultados obtenidos se socializaron en el curso para que todos los estudiantes tuvieran por lo menos datos iguales en cada hora del día para aplicar la razón trigonométrica y hallar la altura del árbol. De esta manera se terminó esta sesión.

En la sexta sesión, el profesor dio las siguientes instrucciones sobre el desarrollo de la segunda parte de la tarea.

- Con los datos recopilados en el parque de la sombra y ángulo de elevación, encontrar la altura del árbol.
- Observar la relación de los datos en la tabla (longitud de sombra, ángulo de elevación, altura del árbol).

Los estudiantes identificaron la razón trigonométrica como objeto de estudio principal de la tarea. También, identificaron acertadamente propiedades de tipo algebraico, como despeje de ecuaciones, y las construyeron en función de la solución. Se discutió sobre la invariancia de la altura del árbol. Cuando obtuvieron una altura diferente en los momentos de la mañana (recogida de datos), se argumentó que no obtenían el mismo resultado porque era difícil calcular exactamente la medida de los ángulos de elevación. Después, los grupos

utilizaron la calculadora TI-92 plus y el *software* Cabri Geometry para poder modelar las diferentes respuestas que ellos le dan a la situación problema. Los estudiantes reconocieron la importancia del uso de las herramientas tecnológicas para poder verificar sus respuestas. En términos generales, manifestaron confianza y seguridad en el uso de las calculadoras graficadoras TI-92 Plus y el *software* Cabri Geometry. Por último, el profesor les entregó el diario del grupo y les pidió que lo diligenciaran para esta tarea (figura 28); también, les solicitó a los grupos que no alcanzaron a terminar de diligenciar el diario de grupo que lo terminaran para la siguiente sesión.



**I.E.D. JOSÉ JOAQUÍN CASTRO MARTÍNEZ**

Proyecto de Investigación. **ACORAT.**

Área: Matemáticas. Grupo 3 Actividad N° 2 Fecha \_\_\_\_\_

**Tabla 1.**

Nombre del Momento	Descripción del Nombre para el Momento
1. Traslación del Colegio al parque	nos dirigimos a un lugar con hay muchos árboles y buen sol para realizar la actividad.
2. Escogían un árbol	llegamos a buen lugar y escogimos el árbol más grande y mejor ubicado.
3. Anécdotas de diferentes puntos	tratamos de hallar los ángulos pero nos queda muy difícil pero después
4. Entrega del esoniometro y su uso	nos entregaron el esoniometro y nos explicaron como usarlo y se nos hizo mucho más fácil.
5. Hallamiento de la altura del árbol	después de encontrar los ángulos decidimos realizar las operaciones correspondientes.
6. Ángulos Faltos	Al ver que los resultados eran mucho mayores a simple vista, los profesores revisaron y los esoniómetros estaban mal colocados y los ángulos son faltos.
7. Reiniciar	Al ver este fallo los profesores decidieron comenzar de nuevo midiendo los ángulos en dos y realizar las operaciones correspondientes de nuevo.
8. MEDIDAS CLARAS	después de realizar todo lo correspondiente, la altura del árbol era clara y correcta.
9. ubicación de las medidas en la fotocopia	Después ubicamos con base de perfeccionar LA medidas faltantes a los Angulos y Triangulos.
10. Respuesta	Por último respondimos las preguntas y volvimos a analizar las medidas para plantear bien el problema.

Figura 28. Ejemplo diario de grupo

En la séptima sesión, el profesor presentó a los estudiantes el tercer objetivo y logro, y les entregó (en fotocopia) y ejemplificó los criterios de este logro. El profesor entregó y explicó a los estudiantes la guía con la tarea Las moscas. Los estudiantes construyeron inicialmente una caja con hojas de papel para simular la situación y después empezaron a establecer la distancia máxima de las moscas. Este modelo tridimensional les sirvió para realizar la representación bidimensional, aunque algunos grupos tuvieron que realizarla más de una vez, porque no conservaban los elementos geométricos de una figura tridimensional. Después de realizar la representación, empezaron a ubicar los datos dados en el problema y a analizar lo que tenían que realizar para dar respuesta a la pregunta. Establecieron que la medida que tenían que hallar era el ángulo, pero primero tenían que hallar las medidas de los lados que hacían falta. Hallaron la medida de los lados aplicando las razones trigonométricas y después aplicaron la razón trigonométrica tangente y despejaron la ecuación para hallar la medida del ángulo. La gran mayoría de grupos llegaron hasta esta acción. El profesor les dejó para la siguiente sesión que dieran respuesta a la pregunta.

En la octava sesión se revisó la solución dada a la tarea Las moscas y se designó al grupo 3 para que socializara los resultados con sus compañeros. Ellos establecieron que lo más difícil fue despejar el ángulo en la ecuación trigonométrica para hallar su valor numérico. No obstante, con la investigación que realizaron y las indagaciones a los profesores pudieron hallar la medida del ángulo. Después, los diferentes grupos empezaron a utilizar la calculadora TI-92 plus y el *software* Cabri Geometry para modelar la situación. Por último, el profesor les dio el diario de grupo, que fue diligenciado por la totalidad de los grupos.

En la novena sesión, el profesor entregó a los estudiantes las guías de la evaluación final. Los estudiantes tuvieron un tiempo de 110 minutos para realizar su evaluación.

## 2. Trabajo en grupo

El trabajo en grupo posibilitó la creación de un ambiente de aprendizaje confortable en el que los estudiantes se sintieron cómodos para expresar sus desempeños y dificultades sin prejuicio alguno. Se observaron roles en los estudiantes al momento de dar solución a cada una de las tareas. Destacaron aquellos que abordaron la construcción gráfica de la situación, teniendo en cuenta las observaciones verbales del grupo; otros, lideraron el proceso de solución a partir de sus destrezas en el ámbito matemático, mientras otros mostraron una

especial atención al dominio del recurso (calculadora), elaborando representaciones y modelos que contribuían con la interpretación gráfica del problema. Esto posibilitó que los equipos de trabajos se complementaran, activando la totalidad de las capacidades previstas.

Por otro lado, este tipo de organización permitió la discusión sobre estrategias de solución en cada una de las tareas, que, de forma conjunta, fueron evaluadas por los integrantes del grupo a partir de un ejercicio de argumentación. Ello les permitió seleccionar procedimientos específicos, teniendo la aprobación de la mayoría del grupo. Por consiguiente, los registros escritos fueron el producto de un consenso dentro del grupo.

## 7. Evaluación de la implementación

En este apartado describimos las modificaciones realizadas al diseño de la unidad didáctica y evaluamos las razones que las originaron durante la implementación. Para ello, hemos clasificado las modificaciones en significativas y menores. También, presentaremos la evaluación del diseño y la implementación a partir de un estudio de caso.

### 1. Modificaciones al diseño de la unidad didáctica

Clasificamos las modificaciones al diseño de la unidad didáctica en significativas y menores. Consideramos como significativas aquellas modificaciones que alteraron considerablemente el diseño inicial de la unidad. Las modificaciones menores se refieren a los cambios realizados a la unidad didáctica que no afectaron de forma directa el diseño anterior a la implementación.

#### *1. Modificaciones significativas*

Estas modificaciones implican cambios profundos en la unidad didáctica, que llegan a alterar sustancialmente su diseño original. En este sentido, la primera modificación significativa que hicimos en la secuencia didáctica fue la permutación entre las tareas La sombra (que originalmente se implementaría en las sesiones 3 y 4) y La cometa (que se implementaría en las sesiones 5 y 6). Esta modificación fue necesaria debido a las condiciones desfavorables del clima presentes para esa época. Este hecho impidió implementar bajo las expectativas diseñadas la tarea La sombra. Sin embargo, este cambio no afectó el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje diseñados para la secuencia, ya que las

tareas La cometa y La sombra formaban parte de la fase de desarrollo propuesto para la unidad didáctica. Por tanto, las dos tareas tenían como propósito común el cumplimiento del objetivo de la fase de desarrollo formulado para la unidad, bajo unos criterios de logro comunes.

Otra de las modificaciones significativas que realizamos tiene que ver con la asignación de una medida para evaluar una distancia en la tarea La cometa. Luego de representar gráficamente la tarea, los estudiantes identificaron que la representación no correspondía a un triángulo rectángulo. Por tanto, lo dividieron, trazando una de las alturas para formar dos triángulos rectángulos. Sin embargo, ellos no realizaron el cálculo del valor numérico de la altura a partir de la aplicación de las razones trigonométricas. Esto, entre otras posibles razones, tiene que ver con la dificultad que tienen los estudiantes para aplicar los sistemas de ecuaciones con razones trigonométricas de dos incógnitas en el cálculo de la altura del triángulo.

El siguiente esquema muestra este desarrollo:

$$\begin{aligned}\tan 6^\circ &= \frac{x}{k} \rightarrow x = \tan 6^\circ k \\ \tan 3^\circ &= \frac{30-x}{k} \rightarrow x = 30 - \tan 3^\circ k\end{aligned}$$

Solución del sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}\tan 6^\circ k &= 30 - \tan 3^\circ k \\ 30 &= \tan 6^\circ + \tan 3^\circ k \\ 30 &= (\tan 6^\circ + \tan 3^\circ) k \\ k &= \frac{30}{(\tan 6^\circ + \tan 3^\circ)} \\ k &= 190,46\end{aligned}$$

Decidimos asignar la medida de la distancia de un arquero hasta la cometa, porque los estudiantes no utilizaron el procedimiento anterior con el sistema de ecuaciones con razones trigonométricas para hallar esta medida. Después de haberles dado a los estudiantes esta distancia, ellos usaron las razones trigonométricas para encontrar la altura del triángulo (pregunta *a*), junto con la distancia del otro arquero a la cometa (pregunta *b*). En este sentido, la falta de una tarea de transición que evidenciara el trabajo con los sistemas de ecuaciones de

razones trigonométricas pudo ser la causa que produjo esta modificación. Por tanto, dentro del nuevo diseño pretendemos construir una tarea que potencie esta habilidad, con anterioridad a la solución de la tarea La cometa.

## *2. Modificaciones menores*

Las modificaciones menores hacen referencia a cambios en el diseño o la implementación de la unidad didáctica que no afectan los objetivos de aprendizaje formulados para una tarea o, en general, para la secuencia de tareas. Teniendo en cuenta lo anterior, la única modificación menor que hicimos fue asignar unas medidas específicas dentro de unas horas determinadas a las sombras proyectadas por los árboles en la tarea La sombra, con el fin de obtener las alturas de los árboles por medio de la aplicación de las razones trigonométricas. El cambio en la tarea se debió a las condiciones desfavorables del clima para ese día. La fuerte nubosidad y la lluvia habían hecho que se aplazara en reiteradas ocasiones. Por esto, con anterioridad, decidimos establecer unas medidas para las sombras, como una estrategia que permitiera desarrollar la tarea, sin considerar las condiciones del clima. El cambio en el diseño y la implementación de la tarea no alteró el orden en ninguna de las capacidades formuladas para el camino de aprendizaje. Los estudiantes usaron la regla y cinta métrica para establecer las medidas de la sombras, tomando como referencia estos puntos para determinar la amplitud del ángulo a partir del goniómetro. Esta habilidad se describe en la capacidad C25, la primera en hacer parte del camino de aprendizaje formulado para la tarea.

Pese a la modificación, el camino de aprendizaje no sufrió cambio alguno, pues mantuvo en su estructura el orden establecido, de modo que la capacidad C25 aún se conserva como la primera en activarse. Por otro lado, debido a que los datos propuestos en la modificación menor no alteran la altura de los árboles, la modelación en Cabri se dio sin problema alguno bajo las expectativas de aprendizaje diseñadas. Nada de esto impidió el cumplimiento efectivo del objetivo de aprendizaje formulado para la tarea.

## **2. Evaluación del diseño y la implementación. Estudio de caso de un grupo**

En este apartado presentamos un análisis del cumplimiento de las expectativas de aprendizaje de un grupo y los resultados encontrados al cierre de la implementación:

### 1. Contraste entre las expectativas de aprendizaje y los resultados de la tarea La sombra

En el apartado 3 presentamos el camino de aprendizaje previsto para la tarea La sombra. Nuestro propósito es comparar esta previsión con el camino de aprendizaje realizado por un grupo de estudiantes. Para ello, nos basamos en la información que recogimos con la parrilla de observación.

En la figura 29 presentamos el camino construido por los estudiantes en la solución de la tarea, resaltando con las flechas diagonales sus diferencias con el camino de aprendizaje previsto inicialmente. Por ejemplo, el grupo activó la capacidad C19 en el momento en el que nosotros previmos que activarían la actividad C21.

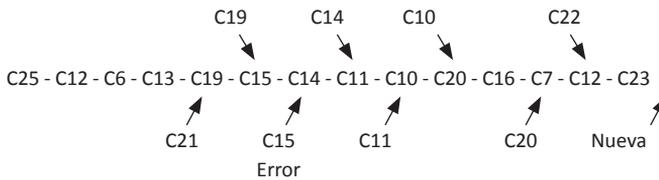


Figura 29. Camino de aprendizaje realizado por el grupo

Este camino de aprendizaje presenta notorias diferencias con el camino de aprendizaje previsto. Las diferencias son consecuencia del uso de una capacidad no considerada en un tramo del camino de aprendizaje (C21). En este sentido, los estudiantes identificaron los ángulos de elevación y depresión de acuerdo con la información de la tarea, antes de identificar los elementos del triángulo rectángulo a partir del reconocimiento del ángulo. Pese a ello, los objetivos de aprendizaje no se vieron afectados, y llegaron a buen término bajo las expectativas formuladas inicialmente. Aunque la agrupación de las capacidades a partir de características comunes no las hace equivalentes, sí las hace similares en elementos específicos. Para este caso en particular, las capacidades están contenidas en el grupo de capacidades que potencian directamente el conocimiento trigonométrico. Por tanto, el uso anterior de una de estas capacidades en un camino de aprendizaje no implica una modificación considerable del camino de aprendizaje establecido.

Teniendo en cuenta lo anterior, a pesar de que el diseño de la tarea pretendía el desarrollo estratégico de un grupo de capacidades, la tarea en sí misma no solo contribuyó con aspectos considerados previamente por nosotros, también lo hizo con elementos que no habían sido establecidos con anterioridad en las expectativas formuladas. Esto es probablemente una consecuencia de la

construcción elaborada de una tarea que potencia muchos más elementos que los puestos en discusión por nosotros como grupo. Seguramente descuidamos, en algún nivel, la caracterización específica de los caminos de aprendizaje, y no tuvimos en cuenta todos los elementos que podrían considerar los estudiantes.

Al abordar la tarea La sombra, los miembros del grupo desplegaron, con mayor o menor precisión, conocimientos en términos de conceptos, procedimientos y estrategias de resolución. Ellos comenzaron reconociendo previamente los elementos del triángulo rectángulo a partir de la identificación del ángulo. Sin embargo, los resultados en el examen reflejaron un nivel de desarrollo superior respecto al mostrado en la prueba diagnóstica. Por tanto, podemos afirmar que, por lo menos en este grupo, el desarrollo de la tarea La sombra contribuyó a su capacidad para abordar la pregunta del examen final.

## 8. Balance y propuestas

Hemos organizado este apartado a partir del análisis de las debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades (DAFO) encontradas al cierre de la implementación de la unidad didáctica. Este análisis nos permitirá proponer un nuevo diseño para implementaciones futuras de la unidad didáctica.

### 1. Análisis DAFO

Para desarrollar el análisis DAFO, hemos clasificado cada uno de sus cuatro elementos en generales y particulares. Los generales tienen que ver con aquellos que, a pesar de tener incidencia en nuestra unidad didáctica, podrían llegar a estar relacionados con aspectos atribuibles al diseño y a la implementación de otras unidades didácticas. Los particulares son aquellos que tienen una relación directa con nuestra unidad didáctica.

#### *1. Debilidades*

Presentamos como debilidades aquellos aspectos de la unidad didáctica que ocasionaron dificultades en su implementación.

##### *Generales*

Planificamos el tiempo para cada una de las sesiones de forma ideal. Pensamos únicamente en aquellos aspectos relacionados con la solución de la tarea: su organización y lectura, las discusiones en torno a su solución, la construcción de modelos y representaciones, entre otros. Sin embargo, no consideramos tiempos

necesarios para el diligenciamiento de los instrumentos de registro (por ejemplo, el diario del grupo y la parrilla de observación). El diligenciamiento del diario del grupo por parte de los estudiantes requirió mucho más tiempo que el planificado por nosotros. Construir acuerdos, verificar las soluciones, explicarlas y comentarlas eran algunas de las acciones que los estudiantes realizaron con anterioridad al diligenciamiento del instrumento. Por tanto, para la totalidad de los grupos, estas acciones hicieron que los tiempos no fuesen suficientes, modificando los considerados por nosotros para cada una de las sesiones.

Por otro lado, el diseño de la secuencia de las tareas fue pensado teniendo en cuenta los análisis de contenido y cognitivo. Sin embargo, en la implementación realizamos cambios respecto a esta organización, debido a factores externos al diseño de la unidad didáctica (clima). Además, para abordar satisfactoriamente la tarea La cometa, los estudiantes requerían la activación de una capacidad en particular (C10: “reconoce las propiedades necesarias en el despeje de ecuaciones lineales, trigonométricas, cuadráticas sencillas, entre otras”). Sin embargo, no propusimos una tarea que tuviera como énfasis el desarrollo de sistemas de ecuaciones de razones trigonométricas. Por tanto, la permutación de una tarea dentro de la secuencia, así como la falta de una tarea específica que permitiera el desarrollo de un contenido concreto, son aspectos que originaron una de las debilidades encontradas.

### *Particulares*

Al proponerse como tarea extraclase y no tener la supervisión del profesor, la construcción del goniómetro causó buena parte de las dificultades en la solución de la tarea La sombra. El diseño del instrumento por parte de algunos grupos no permitió establecer con claridad los ángulos buscados, mientras que otros grupos pudieron establecer con precisión el valor de los ángulos. Esto influyó directamente en la solución de la tarea, puesto que algunos grupos realizaron cálculos con medidas angulares inapropiadas. Del mismo modo, la utilización del goniómetro generó dificultades a la hora de resolver la tarea. Los grados que se establecían para la medida del ángulo fueron expresados únicamente en cantidades enteras, dejando de lado medidas aproximadas más cercanas, que tuvieran en cuenta valores decimales. Esto hizo que el valor para la altura del árbol se modificara considerablemente.

## *2. Amenazas*

Las amenazas incluyen aspectos que podrían generar riesgos en el desarrollo de la implementación de la unidad didáctica. Al igual que las debilidades, algunas

tienen que ver con el diseño específico de nuestra unidad, mientras que otras están en el orden general descrito para la implementación de cualquier unidad didáctica.

#### *Generales*

Pese a que el colegio cuenta con un cronograma de actividades institucionales, concertado con base en una programación al inicio del año escolar, existen actividades de último momento (reuniones, capacitaciones, salidas pedagógicas, entre otras) que no están incluidas en este cronograma. Estas actividades no planificadas nos obligaron a modificar la organización de las sesiones. Así mismo, al ser un establecimiento público, el cronograma de actividades se ve afectado por movimientos externos no programados por la institución, como jornadas sindicales y paros, que impiden el desarrollo habitual de las clases.

#### *Particulares*

En el desarrollo de algunas de las tareas se requería el uso de recursos tecnológicos (por ejemplo, el *software* Cabri). Aunque el colegio se comprometió a tener el programa disponible en la sala de informática, no fue posible contar con él durante la implementación. Esto generó una amenaza en el desarrollo de las actividades y, por tanto, debimos solicitar en préstamo las calculadoras TI-92 Plus del proyecto curricular de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Por otro lado, las condiciones del clima durante la implementación no favorecieron el desarrollo de una de las tareas. Las constantes lluvias y la ausencia de sol para el día programado hicieron que se cambiara el día de realización de la tarea, hasta tanto el clima fuese apropiado para su realización.

### *3. Fortalezas*

Las fortalezas describen los aspectos fuertes encontrados en la implementación de la unidad. Algunas de ellas se refieren a su diseño, mientras otras surgieron durante la implementación, sin que se hubiesen tenido en cuenta dentro de las expectativas del diseño.

#### *Generales*

El trabajo en grupo ha sido una de las principales fortalezas encontradas. Este tipo de agrupamiento posibilitó un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes se sintieron cómodos al expresar sus desempeños y dificultades. Cada uno de los grupos desarrolló una dinámica de trabajo particular, en la que sus

integrantes asumieron roles específicos a la hora de resolver las tareas. Unos abordaron la construcción gráfica de la situación teniendo en cuenta las observaciones verbales del grupo; otros lideraron el proceso de solución a partir de sus destrezas en el ámbito matemático; y otros mostraron una especial atención al dominio del recurso (calculadora), elaborando representaciones y modelos que contribuyeron con la interpretación gráfica de los problemas. Esta organización permitió también elaborar discusiones alrededor de estrategias de solución en cada una de las tareas. Los procedimientos fueron evaluados de forma conjunta por los integrantes del grupo partiendo de un ejercicio de argumentación, que les llevó a optar por una técnica de solución específica, a partir de acuerdos consensuados. Estos acuerdos se convirtieron después en los registros escritos consignados en la carpeta de los grupos de estudiantes.

#### *Particulares*

La parrilla de observación que diseñamos nos permitió establecer las capacidades que los estudiantes activaron al abordar las tareas. Con esta información, pudimos contrastar los caminos de aprendizaje realizados por los grupos con los que nosotros previmos inicialmente. Este era el propósito del instrumento. Sin embargo, su diseño habría sido insuficiente si no hubiésemos considerado unos criterios para el diligenciamiento de la información. El éxito del instrumento se debió, entonces, a la distribución de los miembros del grupo en dos equipos de trabajo: un equipo de observación y otro de enseñanza. Cada equipo tuvo unos propósitos específicos y diferentes. El primero, en su función de observador, tomó los registros escritos de los procedimientos desarrollados por los estudiantes en la parrilla de observación. El segundo mantuvo su rol de profesor, resolviendo las dudas e inquietudes de los estudiantes.

#### *4. Oportunidades*

Las oportunidades hacen referencia a los aspectos externos, no relacionados de forma directa con el diseño y la implementación de la unidad, que podrían contribuir con su desarrollo.

#### *Generales*

Los documentos curriculares en los que nos basamos para el diseño de la unidad didáctica hacen mención directa a los beneficios y las ventajas que promueve la metodología de resolución de problemas organizada por unidades didácticas o módulos de aprendizaje. En este sentido, el desarrollo de la unidad

didáctica tiene un soporte en las políticas de desarrollo curricular y, por consiguiente, puede ser implementada como un proyecto de innovación sostenible en cualquier contexto escolar del país.

La publicación de la unidad didáctica en escenarios de investigación (como coloquios y reuniones académicas), en versiones futuras de MAD y en las instituciones de los profesores integrantes del grupo, es una oportunidad que permite poner en discusión y reproducir la unidad didáctica en otras instituciones educativas.

### *Particulares*

El uso de las TIC como recurso de aprendizaje en el aula es una política nacional que tiene respaldo en el Plan Decenal de Educación consignado en el 2009, y supone, a futuro, que todas las aulas de informática han de considerar recursos tecnológicos específicos para cada una de las áreas. Por tanto, la utilización del *software* Cabri Geometry se respalda bajo esta política.

Los profesores y directivos docentes del IED José Joaquín Castro reconocieron la implementación de la unidad didáctica como una experiencia significativa para el diseño de los planes de área por ciclos de la institución. Ellos aprecian los beneficios de que estudiantes dispersos por diferentes condiciones académicas puedan llegar a trabajar sobre los mismos conceptos, potenciando su aprendizaje.

## **2. Propuestas para un nuevo diseño**

En el apartado anterior hemos identificado, con base en el análisis DAFO, las debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades de la unidad didáctica. A continuación, proponemos estrategias para abordarlas. A partir de ese análisis, proponemos un nuevo diseño para la secuencia de tareas.

### *1. Debilidades*

Proponemos las siguientes mejoras para abordar las debilidades de la unidad didáctica:

1. Realizar una sesión de introducción en que se muestre de forma general el número de tareas por realizar, la metodología propuesta para la implementación, las diferentes herramientas que se van a usar (*software* Cabri y goniómetro), la presentación del instrumento diario de grupo y las pautas para su diligenciamiento, y las condiciones para el registro de la solución a cada una de las tareas en la carpeta.

2. Destinar tiempo suficiente para el diligenciamiento del diario de grupo durante las sesiones y motivar para que la información del diario de grupo se registre paralelamente con el desarrollo de las tareas.
3. Incluir una tarea extraclasses orientada a la solución de sistemas de ecuaciones lineales con énfasis en el análisis y resolución de ecuaciones lineales con razones trigonométricas.
4. Suministrar los goniómetros a los grupos de estudiantes.

## 2. Amenazas

Proponemos la siguiente mejora para abordar las amenazas:

1. Garantizar con anterioridad la instalación del *software* Cabri en la sala de informática de la institución. Si el colegio no cuenta con los recursos económicos para adquirirlo, descargar la versión libre de internet por tiempo limitado, teniendo en cuenta la organización de las tareas y el número de sesiones.

## 3. Fortalezas

Proponemos aprovechar las fortalezas con las siguientes estrategias:

1. Buscar que los grupos de trabajo se consoliden, teniendo en cuenta afinidades de amistad para garantizar que los integrantes aporten significativamente al trabajo de su equipo.
2. Identificar los roles generados de los integrantes de los grupos para evaluar las dificultades y errores en los que podrían incurrir al momento de abordar una tarea.

## 4. Oportunidades

Proponemos abordar las oportunidades con las siguientes estrategias:

1. Socializar la experiencia del diseño y la implementación de la unidad didáctica en reuniones con pares académicos y encuentros de profesores de colegios públicos.
2. Presentar la unidad didáctica en eventos académicos.
3. Implementar la unidad didáctica en los colegios donde trabajan los integrantes del grupo.
4. Aprovechar los resultados que hemos obtenido con la implementación de la unidad didáctica y la política de las TIC para justificar el desembolso de recursos en proyectos de infraestructura tecnológica y compra de *software* en las instituciones.

### 3. Propuesta del nuevo diseño

En la figura 30 mostramos nuestra propuesta para la organización de las sesiones en la unidad didáctica, teniendo en cuenta las consideraciones hechas en el análisis DAFO.

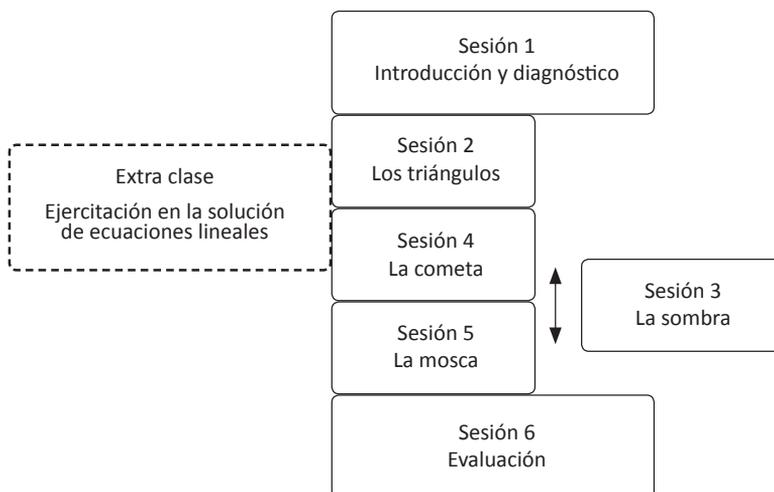


Figura 30. Nueva secuencia de la unidad didáctica

Debido a las condiciones del clima, proponemos que la ubicación de la tercera sesión no sea rígida dentro de la organización. La tarea La sombra se puede realizar entre las sesiones dos y seis, teniendo en cuenta el clima. Además, hemos agregado una tarea extraclase entre las sesiones dos y cuatro, con el propósito de ejercitar a los estudiantes en la solución de ecuaciones lineales. Esta es una actividad que no hace parte del diseño de la secuencia de tareas, debido a que su contenido no está relacionado de forma directa con el foco de contenido propio de la unidad didáctica. Sin embargo, su solución deberá ser anexada en los registros escritos de la carpeta de los grupos.

Los goniómetros que se utilizarán en la tarea La sombra serán verificados por el profesor con anterioridad. Del mismo modo, se debe verificar la disponibilidad del programa Cabri Geometry en el aula de informática, de modo que sea posible gestionar la instalación del programa con el recurso del *software* libre de internet.

Hemos destinado la primera sesión a la explicación de la forma de diligenciar el diario de grupo y al manejo de algunas de las herramientas (como

el goniómetro y el programa Cabri Geometry). Esta sesión también incluye la presentación general de las tareas y la metodología que se utilizarán a lo largo de la unidad didáctica.

## 9. Conclusiones

En este apartado presentamos un resumen de nuestro trabajo y destacamos las cuestiones que fueron clave para la implementación de la unidad didáctica. De igual forma, mostramos algunas de las reflexiones con motivo de nuestra experiencia. Estas reflexiones dan cuenta de algunos de nuestros logros en MAD. También, presentamos algunas observaciones de clase posteriores a la implementación de la unidad didáctica.

### 1. Resumen

La estructura del informe de la unidad didáctica tiene como fundamento el desarrollo de una secuencia de tareas orientadas por la formulación de unos objetivos de aprendizaje específicos. Para ello, hemos planteado un problema relacionado con el uso de las razones trigonométricas, teniendo cuidado de justificarlo a partir de una descripción general y de la presentación concreta de la forma en que fue abordado.

Hemos fundamentado el diseño de la unidad en el análisis didáctico. Para ello, desarrollamos el estudio de los análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. En el análisis de contenido establecimos como foco de estudio las razones trigonométricas que estructuramos conceptualmente desde los hechos (por ejemplo, ángulos, triángulos rectángulos y cualesquiera, lados), los conceptos (seno, coseno, tangente, razón, proporción, teorema de Pitágoras) y la estructura matemática (razones trigonométricas). Establecimos relaciones verticales entre estos. También, instauramos relaciones horizontales —traducción entre sistemas de representación y transformaciones sintácticas—. Además, establecimos las estructuras, los contextos y las situaciones que organizan los diferentes fenómenos relacionados con las razones trigonométricas. En el análisis cognitivo, mostramos la descripción y caracterización del estándar, los objetivos de aprendizaje y las capacidades. Clasificamos las capacidades de acuerdo con su énfasis.

En este análisis, también establecimos los caminos de aprendizaje, a partir de las capacidades que pueden ser activadas por los estudiantes al abordar las

tareas. La no activación de las capacidades propuestas o la activación de otras capacidades nos llevó a identificar los errores en los que los estudiantes pueden incurrir al abordar las tareas. Agrupamos estos errores en tres dificultades, que hacen referencia a la línea de profundización de la estructura conceptual, la traducción entre las representaciones y las transformaciones sintácticas.

En el análisis de instrucción, diseñamos la secuencia de tareas a partir de seis componentes y sus respectivas relaciones —fase, función de la tarea, objetivo, sesión, nombre de la tarea y contenido—. Describimos las tareas a partir de su enunciado, los recursos o materiales por utilizar, el agrupamiento de los estudiantes, las actuaciones del profesor en el desarrollo de la clase y su camino de aprendizaje. Desarrollamos todos los aspectos del diseño de la secuencia de tareas y describimos los diferentes elementos que intervienen en la dinámica de clase. Por último, presentamos los criterios de logro organizados en generales y particulares; también, expusimos la descripción y establecimos la finalidad del diario del profesor, del diario del grupo, de la evaluación final y de la parrilla de observación, como instrumentos de evaluación para recoger y analizar la información de la secuencia de actividades propuesta.

Justificamos el diseño de la unidad didáctica desde dos perspectivas: las condiciones curriculares, académicas y socioeconómicas de los estudiantes, y la conveniencia, pertinencia y coherencia de la unidad didáctica con las expectativas de aprendizaje. Destacamos el énfasis trigonométrico de las tareas, que se aprecia en el análisis de los grafos de los caminos de aprendizaje de los objetivos y los resultados del análisis de la complejidad de las tareas, y su contribución al desarrollo de las competencias.

Finalmente, presentamos la descripción y evaluación de la implementación. En la evaluación de la implementación nos basamos en la revisión de las modificaciones significativas y menores, y presentamos los resultados del análisis DAFO. Con base en ese análisis, propusimos una reestructuración del diseño de la unidad didáctica.

## 2. Reflexiones

Una de las principales contribuciones de MAD a nuestro desarrollo profesional tiene que ver con el desarrollo de una visión más compleja de los elementos de tipo didáctico con los que trabajamos a diario. El diseño y la planificación de tareas eran aspectos que antes de MAD no presentaban ninguna posibilidad de discusión, más allá de cuestiones puntuales propias de temas concretos, que se encontraban inmersos en planes de estudios que ahora

consideramos débiles en su fundamento didáctico. Los análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación nos han abierto la posibilidad de considerar nuevas herramientas conceptuales y metodológicas que nos permiten mejorar nuestra actuación como profesores en el aula.

Hemos desarrollado nuestra capacidad para lograr coherencia entre los objetivos de aprendizaje, las tareas que diseñamos para lograrlos y las actuaciones del profesor y los estudiantes en el aula. Por ejemplo, cuando los estudiantes abordaron la tarea La sombra, reconocieron los elementos, relaciones y aplicaciones de las razones trigonométricas en un triángulo cualquiera, aplicándolos para la solución de la tarea. Esto se hizo evidente en el análisis realizado con la parrilla de observación.

Por otro lado, ha sido muy satisfactorio escuchar las reacciones de los estudiantes a la propuesta de implementación de la unidad didáctica. Ellos destacan, por ejemplo, cómo el uso de la calculadora y del goniómetro les permitió descubrir escenarios distintos a los convencionales y observar algunas de las aplicaciones de las razones trigonométricas fuera del aula, con tareas no rutinarias.

## 10. Referencias

- Flores, P., Gómez, P., & Marín A. (2010). *Análisis de instrucción. Apuntes de MAD*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- González, M.J., Gómez, P., & Lupiáñez, J.L. (2010). *Análisis cognitivo. Apuntes de MAD*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2009). Decreto 1290. Recuperado de <http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-187765.html>.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal For Research in Mathematics Education*, 18(1), 3-14.

- Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Jiménez, L. Santos, & J. P. Ponte (Coords.) *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona, Graó.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, & P. Gómez. *Educación Matemática* (pp. 69-108). México DF: Grupo Editorial Iberoamérica y una empresa docente.