**_El pasaje del nivel medio al nivel universitario: un estudio en una asignatura de primer año del Profesorado en Matemática_**

*Susana Peparelli; Nora Zón; Sabina Bigolín; Noelia Matos*
*Universidad Nacional de Río Cuarto*

## 1. - Introducción

La currícula del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Río Cuarto contempla, en primer año, el dictado de la asignatura Matemática Discreta, que aborda fundamentalmente el trabajo en torno a relaciones de equivalencia y orden; números naturales, principio de inducción matemática, divisibilidad en enteros y relación de congruencia.

Durante los últimos años se han detectado algunos problemas que se considera se deben fundamentalmente a la desarticulación entre las *prácticas* utilizadas en el nivel medio y las necesarias para lograr algún grado de destreza en el trabajo algebraico. Entre los indicadores de esta problemática podemos mencionar el significativo porcentaje de deserción y serias dificultades en:

- ✓ La traducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico.
- ✓ Los procesos de validación y búsqueda de contraejemplos.
- ✓ La comprensión de conceptos tales como inducción y recurrencia.
- ✓ La utilización del recurso algebraico como herramienta útil en la resolución de problemas tanto externos como internos a la Matemática.

Ante esta situación consideramos que antes de diseñar una propuesta innovadora y ponerla a prueba, es necesario profundizar en el análisis de las diferentes vías de entrada al álgebra y conocer mejor lo que esta sucediendo en la enseñanza de las herramientas algebraicas tanto en la escuela media como en la universidad.

Teniendo en cuenta esta problemática y apoyándonos en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), desarrollada por Chevallard, resulta conveniente analizar las diferencias entre los niveles educativos mencionados en torno a tres dimensiones:

- ❖ Dimensión Curricular: que implica el planteo de interrogantes tales como
  - ✓ *¿Cuál es la dinámica de los saberes en cada institución?*
  - ✓ *¿Qué restricciones tiene el conocimiento matemático en cada institución?*
  - ✓ *¿Qué invariantes se observan?*
- ❖ Dimensión Fáctica**:** con los interrogantes
  - ✓ *¿Qué se hace efectivamente en el aula?*
  - ✓ *¿Cómo se gestiona la clase?*
  - ✓ *¿Qué distancia existe entre el saber enseñado y el saber de referencia?*
  - ✓ *¿Qué tipo de libros de textos viven en el aula y qué uso se hace de los mismos?*
- ❖ Dimensión Institucional: con los planteos
  - ✓ *¿Qué se entiende por enseñar y por aprender?*
  - ✓ *¿Cuáles son las imposiciones institucionales?*

El análisis en torno a los interrogantes de estas dimensiones, fundamentalmente la curricular y la fáctica, se torna particularmente importante en el caso de la enseñanza y aprendizaje del álgebra ya que supone una ruptura epistemológica significativa. Existe una relación interesante entre la aritmética y el álgebra, por una parte es necesario buscar una ruptura con la aritmética para que tenga sentido poner en funcionamiento el álgebra y por otra, la aritmética aparece como el anclaje natural en que los alumnos podrían apoyarse para tener alguna representación interna de aquello que expresa el álgebra. Esta ruptura se pone en juego en muchas de las nociones que los alumnos deben traer de la escuela media: leyes, relaciones, funciones, ecuaciones, inecuaciones, expresiones algebraicas, nociones de lógica, entre otras.

Para abordar este proyecto las docentes responsables del dictado de la asignatura incorporaron al estudio a dos alumnas del Profesorado en Matemática con un doble propósito; describir y analizar las propias vivencias en el cursado de la asignatura Matemática Discreta e iniciarlas en el proceso de elaboración de propuestas pedagógicas innovadoras.

En este trabajo compartiremos los avances realizados, a partir de lo realizado con dos grupos de alumnos, los ingresantes 2009 y 2010.

**2.- Acciones llevadas a cabo**
El conjunto de acciones desarrolladas, por sus características, pueden ser agrupadas en: actividades de formación; investigación y actividades desarrolladas con los alumnos

**2.1.- Actividades de formación**
Se realizaron seminarios en torno a investigaciones realizadas acerca de la problemática de la enseñanza del algebra y del trabajo sobre la validación matemática en el aula.

**2.2.- Actividades de investigación**
Se realizó un análisis de la currícula del nivel medio y de algunos libros de texto, en relación a los contenidos de la asignatura presentes en ese nivel, con el objetivo de determinar la dinámica de los saberes en cada institución. En los libros de textos el análisis estuvo centrado en las nociones de divisibilidad fundamentalmente en lo que se refiere a los procesos de validación.

**2.3.- Actividades con los alumnos**
La implementación de la asignatura se organizó en 6 horas de carácter teórico-práctico y 2 horas semanales, en las que se propusieron un conjunto de acciones que posibiliten la emergencia tanto de los sentidos construidos en la escuela media en torno a las herramientas algebraicas, como de las dificultades en el aprendizaje de los distintos conceptos involucrados en la asignatura. Entre estas acciones podemos mencionar:

- ✓ Tareas que aborden las diferentes formas de razonamiento matemático y la importante vinculación que tiene este razonamiento con los distintos lenguajes involucrados en la actividad matemática, seleccionadas a la luz de los siguientes interrogantes: *¿qué tareas proponer a los alumnos para que produzcan poco a poco razonamientos correctos?, ¿qué fases de aprendizaje manejar a partir de tareas propuestas?, ¿cómo analizar las producciones de los alumnos y evaluar habilidades, generales y propias en el campo algebraico?.*
- ✓ Diseño e implementación de situaciones que involucren procesos de generalización que pongan en juego cuestiones ligadas a la recurrencia y que posibiliten caracterizar, analizar e interpretar el fenómeno que surge cuando los alumnos se enfrentan a las mismas.

La implementación del conjunto de acciones mencionadas pretendió, además, contemplar en el proceso de estudio, los siguientes momentos:

- **momento del *primer encuentro*** que hace referencia a los objetos matemáticos, involucrados en un tipo de problemas.
- **momento *exploratorio*** que relaciona un determinado tipo de problemas con la construcción de una técnica adecuada para abordarlos.
- **momento del *trabajo con la técnica*** se refiere al dominio, puesta a punto y creación de nuevas técnicas.
- **momento *tecnológico-teórico*** que hace referencia a los dos niveles de justificación de la práctica matemática.
- **momento de *institucionalización*** que se refiere a la obra matemática en su conjunto.

**Actividad 1:** *Diagnóstico*
Para su elaboración se tuvieron en cuenta, fundamentalmente, las dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje del algebra, siguiendo los señalados por Socas y otros en "Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria". Debido a que una de las causas principales de los errores en el aprendizaje del algebra son los que tienen su origen en la ausencia de significado, se presentaron en el diagnóstico (Anexo 1) ítems vinculados a los siguientes tipos errores:

a) *Errores del algebra que tienen su origen en la aritmética*: Ejemplo de estos errores son los cometidos por los alumnos que no dominan las operaciones con fracciones, por esta razón se presentan en el diagnóstico las actividades A.2) y B.1).- En la primera tarea, solo un 2.94% cometió el error que tiene su origen en la aritmética. Lo que si es relevante en esta actividad desde nuestro punto de vista, es la falta de justificación de la elección de la opción correcta, detectada en un 20.59%. En la segunda no apareció ningún error de este tipo, pero es importante destacar que un

70.59% de los alumnos tuvo problemas para justificar el por qué de la elección, pues intentaron demostrar la falsedad deductivamente y no mediante un contraejemplo.

b) *Errores de procedimiento:* Estos errores son consecuencia del uso inapropiado de formulas o de reglas de procedimiento. Se pueden agrupar en:

- *Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva*.

| ITEM | RESPUESTAS INCORRECTAS | PROBLEMAS CON LA VALIDACION |
|---|---|---|
| 1) Si x = $\sqrt{18} + \sqrt{32}$ entonces $x^2$ = ... a) 48 b) 50 c) 64 d) 82 e) 98 | 41.18% | 40 % |
| Decidir si es verdadero o falso **a.(b.c) = (a.b). (a.c)** | 14.70% | 42% |

- *Errores relativos al uso de recíprocos*. actividad B.1) y la actividad A.2).- En ambas tareas los errores fueron poco significativos, pero si es importante destacar que un 70.59% de los alumnos tuvo problemas para justificar el por qué de la elección, pues intentan demostrar la falsedad deductivamente y no mediante un contraejemplo.

- *Errores de cancelación*. Estos tipos de errores parecen indicar que los alumnos generalizan procedimientos que se verifican en determinadas ocasiones.

| ITEM | RESPUESTAS INCORRECTAS | PROBLEMAS CON LA VALIDACION |
|---|---|---|
| $\frac{x+y}{x+z} = \frac{y}{z}$ | 14.70 % | 38,24 % |
| $\frac{ax+b}{b} = \frac{ax}{b} + 1$ | 26.17 % | |

c) *Errores del algebra debido a las características propias del lenguaje algebraico.* Estos errores son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explicita en la aritmética. Las actividades del diagnostico relacionadas a este tipo de error, son A.3) y A.4).- En ambas tareas se detectaron errores de este tipo en un 11.76% y 17.65% respectivamente.

La tercera parte del diagnostico se elaboró con la finalidad de evaluar:

- habilidad para aplicar los conocimientos algebraicos a la resolución de problemas.
- habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas.

En la tarea C, en ambos incisos, las dificultades aparecieron a la hora de generalizar conjeturas, que era uno de los objetivos de la misma (32.35% y 20.59% respectivamente).
Es de destacar, además, que un 70,59% tuvo problemas para justificar la elección de un ítem que requería una validación matemática

**Actividad 2:** *El lenguaje algebraico*
El trabajo realizado estuvo centrado en crear la necesidad de utilizar el lenguaje algebraico y por ende la traducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico, los procesos de validación y búsqueda de contraejemplos. Para lo cual se presentó a los alumnos la siguiente tarea:

*A trabajar en grupos de tres o cuatro alumnos, de esta forma pueden formar dos parejas por grupo con intenciones de jugar.*

1- Consideren tres números enteros consecutivos cualesquiera. Realicen la diferencia entre el cuadrado del número del medio y el producto de los otros dos números. Gana el que llega al resultado más grande.

2- A) Si se suman tres números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre un múltiplo de 3?

B) Si se suman cinco números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre múltiplo de 5?

C) ¿Será cierto que si se suman k números naturales consecutivos cualesquiera, el resultado siempre será múltiplo de k?

Extraído de "Iniciación al estudio didáctico del álgebra – origen y perspectivas"…

**Actividad 3:** *El signo igual*

Como todo símbolo matemático, el signo igual es la representación de un concepto o idea matemática. Sin embargo dicho significado no es unívoco, estando ligado al contexto que se considere. Entre los significados que suelen distinguir varios autores podemos mencionar:

***** *Operador*: este significado hace referencia al uso del signo igual como un símbolo que separa una cadena o secuencia de operaciones, que se sitúan a la izquierda del signo igual, y su resultado, que se dispone a la derecha.

***** *Expresión de una equivalencia condicional (ecuación):* el signo igual expresa una equivalencia sólo cierta para algún o algunos valores de la/s variable/s, pudiendo no existir ninguno.

***** *Expresión de una equivalencia:* el signo igual indica que las expresiones que se disponen a ambos lados se refieren al mismo objeto matemático.

***** *Definición de un objeto matemático*: el signo igual se utiliza para definir o asignar un nombre a un objeto matemático.

***** *Expresión de una relación funcional o de dependencia*: el signo igual se refiere al uso de este símbolo para indicar cierta relación de dependencia entre variables o parámetros.

Durante el abordaje de los distintos contenidos conceptuales y procedimentales de Matemática Discreta emergen varios de estos significados a los que se incorporan la igualdad como una relación de equivalencia, la igualdad entre conjuntos como consecuencia de la antisimetría de la relación de inclusión, la igualdad entre números naturales a partir de la antisimetría de la relación de divisibilidad en IN y la limitación al extender a la divisibilidad en Z

Las tareas que se presentaron con el objetivo de reflexionar sobre los distintos significados construidos en la escuela media, fueron

**A RESOLVER DIFERENTES TAREAS**

- Formen grupos de dos o tres integrantes.

- Resuelvan las tareas que se les presentan, reflexionen sobre las mismas y lleguen a un acuerdo sobre cómo presentar su resolución.

1 - ¿Es cierto que si se suma un número más su doble, más su triple, más su cuádruplo, el resultado es siempre un número que termina en cero? ¿Por qué?

2 – Dada la expresión $(a+b)^2 = ........................$

a) Completa con una expresión algebraica a la derecha del igual, de manera que la igualdad resulte verdadera para todo valor de a y b.

b) Completa con una expresión algebraica a la derecha del igual, de manera que la igualdad siempre resulte falsa.

c) Completa con una expresión algebraica a la derecha del igual de manera que la igualdad resulte a veces verdadera y otras veces falsa. Da un ejemplo en que resulte verdadera y otro en que resulte falsa.

d) Describe el conjunto solución del ítem c)

Extraído de “Iniciación al estudio didáctico del álgebra – origen y perspectivas”

En la primera tarea se los invitaba a los alumnos a discutir sobre una supuesta regularidad.
Con la tarea dos se intenta ver la dualidad $=, \neq$. En este caso aparece la novedad de una igualdad de expresiones que no es ni siempre falsa ni siempre verdadera. Estas igualdades permiten determinar un cierto conjunto solución.
Se debe tener en cuenta la necesidad de identificar el uso de cuantificadores en el trabajo con expresiones algebraicas. Muchas veces esos cuantificadores permanecen implícitos, con la intención de simplificar el tratamiento.
Se trabajó con estas tareas usando una metodología de trabajo en el aula centrada en la discusión de las respuestas y estrategias de los alumnos. Nuestro interés se centró en el estudio de los significados del signo igual que los alumnos hacen manifiestos en el tipo de tareas propuestas, y de las dificultades que encuentran en estas actividades.

**Actividad 4:** *Las conjeturas y la generalización*
El trabajo se realizó en torno a tareas que favorecían la detección de regularidades en una figura con el fin de facilitar la construcción de una fórmula. La puesta en común se llevó a cabo mediante la técnica del afiche para analizar y reflexionar sobre las estrategias utilizadas.
En el caso de la actividad trabajada en el año 2009, el problema seleccionado admitía distintas resoluciones, lo que favoreció el trabajo de equivalencia de fórmulas, lo que admite un abordaje desde distintos planos:

- evaluar las distintas fórmulas en números particulares y constatar que den igual lo que lleva a una validación insuficiente pero no incorrecta
- apoyarse en las propiedades de las operaciones para analizar la igualdad de cálculos diferentes, para todo valor de n.

Para el año 2010 se incorporó una actividad que implicaba la interpretación de resoluciones.

**Actividad 5:** *Conteo*
En el corriente año, se trabajó con actividades que favorecieran el surgimiento de distintas maneras de contar y permitiera la institucionalización del Principio general de la multiplicación, las variaciones, permutaciones y combinaciones.

TAREAS DE CONTEO

1) Dados los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, se pregunta:

a) ¿Cuántas funciones $f: A \to B$ pueden definirse?
b) ¿Cuántas de ellas son inyectivas?
c) ¿Cuántas funciones $g: A \to A$ inyectivas pueden definirse?

2) Se consideran 7 puntos de un plano, no alineados de a 3.

a) ¿Cuántos triángulos determinan?
b) ¿Cuántas rectas?
c) ¿Y vectores?

Extraído de “Notas de Combinatoria”

En este caso se propuso a los alumnos que la resolución se realizara en grupos de 3 o 4 personas y que la puesta en común estuviera a cargo de un integrante del grupo seleccionado al azar.

**Actividad 6:** *división entera, divisores y múltiplos de un número, relación de congruencia*
Se presentaron en clases sucesivas conjuntos de tareas. El objetivo fundamental del primer conjunto fue la distinción de la operación división entera y la relación de divisibilidad y sus complementariedades. En el caso de la segunda tarea, el propósito fue establecer vinculaciones, entre las relaciones de divisibilidad y congruencia

## DIVISIBILIDAD

1) El resto de dividir un número $a$ por 152, es 141 y el de dividir otro número $b$ por 152, es 78. ¿Es posible saber el resto de dividir por 152

* $a + b$ * $a - b$

2) a) Un número $n$ excede en 35 a un múltiplo de 24. ¿Cuál es el resto de dividirlo por 8?
b) Un número $k$ excede en 27 a un múltiplo de 12. ¿Cuál es el resto de dividirlo por 8?

3) a) Dar si es posible los valores de b para que al hacer $16\,b + 8$ se obtenga un múltiplo de 16.
b) Dar si es posible los valores de b para los cuales el número que resulte al hacer $4\,b + 4$ se obtenga un múltiplo de 12
c) Dar si es posible los valores de b para los cuales el número que resulte al hacer $6\,b + 6$ sea múltiplo de 2, de 3, de 4, de 5 y de 6.
d) Considerar la misma estructura de estos problemas. Proponer un problema para el cual todo valor de b sea solución.

4) Discutir la validez de los siguientes enunciados
a) El producto de ***n*** números naturales consecutivos es múltiplo de ***n***
b) El producto de los divisores de un número es una potencia del número.

En una tabla de 6 columnas e "infinitas" filas, se van ubicando consecutivamente el cero y "todos" los números naturales:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 |
| ........................................................................................... | | | | | |

a) ¿En qué fila y en qué columna se encuentra el 126? ¿Y el 130?
b) Buscar otro número más grande que esté en la misma columna del 130
c) ¿Qué número se encuentra en la novena fila, segunda columna?
d) ¿Qué número se encuentra en la fila 37, columna 3?
e) ¿Dónde se encuentra el 27643?
f) Se va a hacer **otra tabla** con un criterio similar pero con 7 columnas. ¿En qué fila y columna estará el 126? Para esta segunda tabla, qué número se ubica en la fila 8, columna 4?
g) Ahora se tiene **otra tabla**, de la cual se conoce una columna:

7
19
31
43
.

¿Se puede saber de cuántas columnas es la tabla?
¿Cómo se podría decidir si el 1147 está en esa misma columna?
h) ¿Por qué en una tabla de 10 columnas, en cada columna todos los números terminan con la misma cifra?
i) Plantear **por grupos** diferentes problemas "de tablas"
j) Se da un número y se sabe que está en una cierta columna; ¿se puede saber la cantidad de columnas de la tabla?
k) Se dan dos números y se sabe que el primero está en la columna 5 y el segundo en la ocho, ¿se puede saber la cantidad de columnas de la tabla?

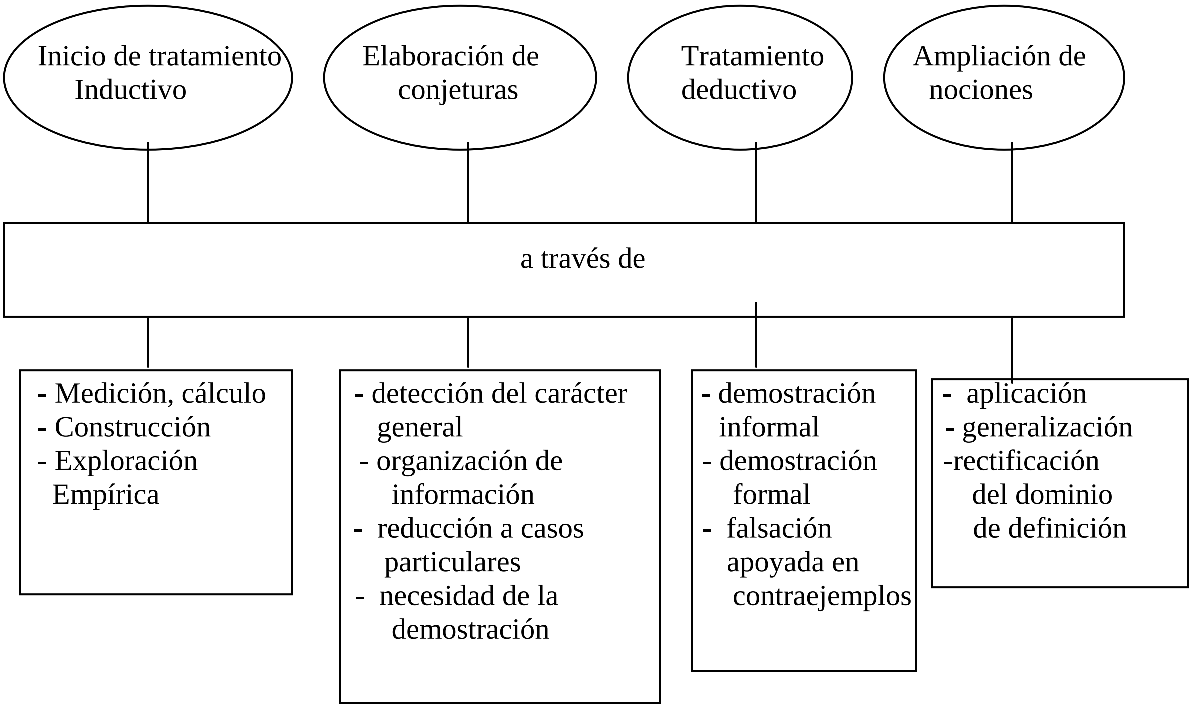
l) Se da un número y se sabe que está en una cierta celda (está determinada la fila y la columna), ¿qué se puede decir sobre la tabla?

**3.- Conclusiones y Proyecciones futuras**

Si se concibe al álgebra, con relación a su enseñanza, como un *conjunto de prácticas* asociadas a un espacio de problemas que se constituyen a partir de un conjunto de conceptos con sus propiedades y que dichas prácticas se inscriben y escriben en un determinado lenguaje simbólico con leyes específicas que rigen la configuración de un conjunto de técnicas; el conjunto de indicadores obtenidos del trabajo realizado con dos grupos de alumnos, constituye un diagnostico de las dificultades y rupturas que implica el pasaje del nivel medio al universitario en términos del *significado* de cada noción construido en cada nivel a partir del *sistema de prácticas.*

Considerando, además, que la matemática discreta contribuye al desarrollo de ciertas capacidades fundamentales como: la de formalizar, razonar rigurosamente y representar adecuadamente algunos conceptos; las futuras acciones apuntan a concebir un escenario didáctico en el cual los alumnos puedan elaborar criterios para validar sus producciones a propósito de problemas que, suponen algún grado de ruptura con las prácticas aritméticas.

Por último, a manera de ejemplo presentamos un esquema que resume los principales momentos que consideramos debiera tener una propuesta innovadora para la enseñanza y aprendizaje de la validación en matemática en general y en álgebra en particular.




**4. - Bibliografía**


- **Artigue, M.** (1988) *Ingénierie didactique*. Recherches en didactique des mathématiques. 9.3 281-308.
- **Becker,M. E.; Pietrocola, N.; Sánchez, C**. (1996). *Notas de Combinatoria*. Red Olimpica
- **Brousseau,G.** (1987) *Fondaments et méthodes de la didactique*. Recherches en didactique des mathématiques. 7.2 33-115. (Existe versión en español publicada por la Facultad de Matemática Astronomía y Física de la Universidad de Córdoba).
- **Chevallard,Y.; Bosch, M.; Gascón, J.** *Estudiar Matemáticas* – ICE-HORSORI
- **Chevallard,Y.** (1984) Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college. Primiere partie. Petit X 5 51-94
- **Chevallard,Y.** (1990) *Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college.* 3eme partie. Petit X 23 5-38
- **Chevallard,Y.** (1990) *Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel,rapport institutionnel, rapport officiel*. Irem d'Aix Marseille. Faculté des Sciences de Luminy.
- **Douady, R.** (1984) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. These d'Etat, Univ. de Paris 7.
- **Lucarelli, E**. *Teoría y Práctica como Innovación en Docencia, Investigación y Actualización Pedagógica* – Instituto de Ciencias de la Educación Cuadernos de Investigación Nº 10.
- **Panizza, M.; Sadovsky, P.; Sessa, C.** (1995) *Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de Matemática.* Comunicación REM, Río Cuarto. Cba.

- **Panizza,M.; Sadovsky, P.; Sessa, C.** (1996) *Los primeros aprendizajes algebraicos. El fracaso del éxito.* Comunicación REM, Salta
- **Socas Robayana, M; Camacho Machín, M; Hernández Domínguez, J.** (1998) "Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria" Revista Interuniversitaria de Formación del profesorado, nº 32, Mayo/ Agosto 1998, pp. 73-86.
- **Sessa, C**. (2005) Iniciación al estudio didáctico del álgebra – origen y perspectivas. Editorial Libros del Zorzal
- **Vergnaud,G, Cortes,A, Favre Artigue,P**. (1987*) Introduction de l'algebre aupres de debutants faibles. Problemes epistemologiques et didactique*s. Actes du colloque de Sevres. Didactique et acquisition des connaissances scientifiques.

**ANEXO 1**

*ACTIVIDAD DE DIAGNOSTICO*

**A)** *Los siguientes incisos de selección múltiple tiene varias alternativas de las cuales una sola es correcta. Marca la respuesta correcta y justifica tu elección*

1) Si x = $\sqrt{18} + \sqrt{32}$ entonces $x^2$ = ...

a) 48 b) 50 c) 64 d) 82 e) 98

2) El resultado de $\frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ es ...

a) $\frac{2a}{bc}$ b) $\frac{a^2}{bc}$ c) **ac + ab** d) $\frac{ac + ab}{bc}$

3) La afirmación *"dentro de dos años mi edad será la mitad de la que tú tendrás dentro de cinco"* puede ser presentada simbólicamente como ...........

a) $\mathbf{a + 2 = \frac{1}{2}b + 5}$ b) $\mathbf{a + 2 = \frac{1}{2}(b + 5)}$ c) $\mathbf{a + 2 = \frac{1}{2}(b + 3)}$

4) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde al enunciado: *"la mitad de un número natural x más el triple de dicho número, menos el que le precede permite obtenerle número dos"*?

a) $\mathbf{\frac{1}{2}x + x^3 - (x-1) = 2}$ b) $\mathbf{\frac{1}{2}x - 3x - x-1 = 2}$ c) $\mathbf{\frac{1}{2}x + 3x - (x+1) = 2}$

d) $\mathbf{\frac{x}{2} + 3x - (x-1) = 2}$ e) $\mathbf{\frac{x}{2} + 3x - x-1 = 2}$

**B)** *Decide si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones justificando tu respuesta*

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x + y}$

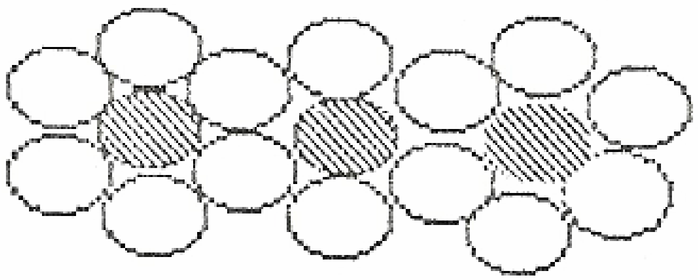
2) $\frac{x + y}{x + z} = \frac{y}{z}$

3) **a.(b.c) = (a.b). (a.c)**

4) $\frac{ax + b}{b} = \frac{ax}{b} + 1$

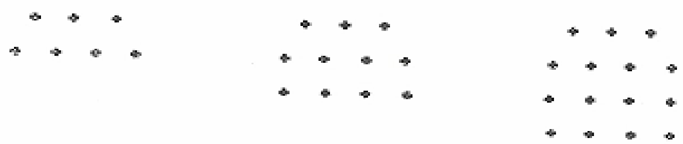
C) *Resuelve las siguientes situaciones, justificando cada paso que realices*

1) Florencia diseñó el siguiente patrón para armar pulseras: coloca una perla dorada y la rodea de seis perlas blancas como indica el dibujo



a) Calcula cuántas perlas blancas tendrá en la próxima vuelta.
b) Calcula cuántas perlas blancas tendrá que colocar si pone 10 perlas doradas en total.
c) Escribe una fórmula que permita calcular el número de perlas blancas para *n* perlas doradas.

2) Dados los tres primeros términos de una secuencia de puntos



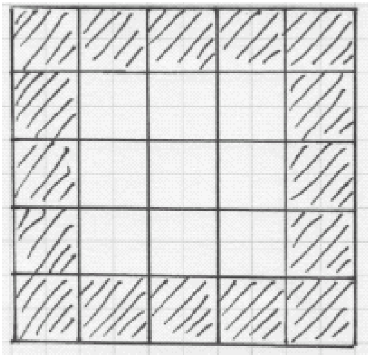
a) Dibuje la figura del 4º término
b) ¿Qué número natural puede asignarse a cada término?
c) Escriba el número natural que le corresponde al lugar 20º.
d) Indique qué número natural representa la figura del lugar n-ésimo

**ANEXO 2**

**Año 2009**

EL PROBLEMA DEL CUADRADO

Dado el siguiente cuadrado:



a) Establece el número de cuadraditos sombreados en la figura dada.
b) Calcula el número de cuadraditos sombreados en un cuadrado de 37 cuadraditos de lado.
c) Ustedes acaban de utilizar un método para calcular el número de cuadraditos sombreados cuando el lado del cuadrado tiene 37 cuadraditos. Explica en palabras como es el método, de manera tal que sea posible utilizar ese método para calcular el número de cuadraditos sombreados, cualquiera sea el número de cuadraditos por lado.
d) Escribe en símbolos lo expresado en el inciso anterior, de modo que permita calcular el número de cuadraditos sombreados que sea útil cualquiera sea el número de cuadraditos en cada lado.
e) ¿Existe algún valor para el número de cuadraditos de un lado de un cuadrado en el cual la cantidad de cuadraditos sombreados sea 587?
f) Para cada cuadrado, hay un cierto número de cuadraditos sombreados y cuadraditos no sombreados. Pedro encuentra que su cuadrado tiene 6592 cuadraditos sombreados. Andrés encuentra, para el mismo cuadrado, 6594 cuadraditos sombreados. ¿Quién tiene razón? ¿ Por qué? ¿Cuántos cuadraditos no sombreados tiene el cuadrado de Pedro y Andrés?

__**Primera etapa:**__ Los alumnos resuelven individualmente los incisos a) y b).

__**Segunda etapa:**__ Los alumnos se reúnen en grupos de 3 o 4, se ponen de acuerdo en una respuesta común y continúan con la resolución de la tarea. Una vez resuelta la misma, redacten un afiche que permita a los demás grupos entender la solución que ustedes encontraron.

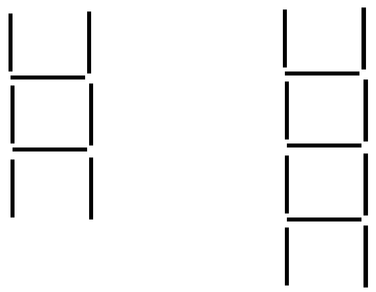
__**Tercera etapa:**__ Puesta en común de los afiches y defensa de las soluciones encontradas.

**Año 2010**

<u>Consigna</u>

Resolver las actividades 1 y 2 en grupos de 3 o 4 personas, respetando, en un primer momento, los tiempos individuales. Comunicar en un afiche la resolución de ambas situaciones de tal manera que al leerlo se interprete el proceso de resolución realizado por el grupo.

<u>Actividad 1</u>: **Tarea de la escalera**



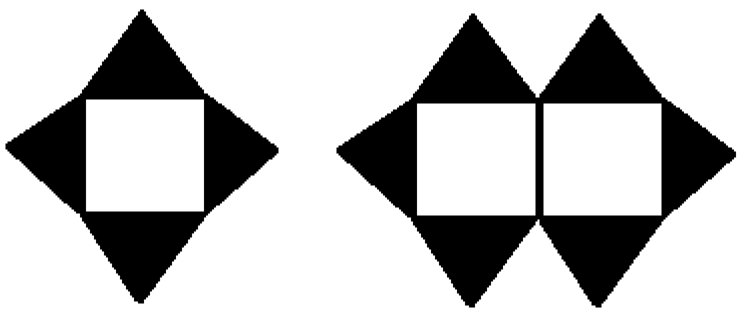
Tamaño 2
8 palillos

Tamaño 3
11 palillos

a) ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera de la misma clase que tenga 5 peldaños?
b) Sé que son necesarios 335 palillos para construir una escalera de 111 peldaños.
¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera que tenga 112 peldaños?
c) ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera que tenga 20 peldaños?
d) ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera que tenga 1000 *peldaños?*

*Explica las respuestas a cada una de las cuestiones planteadas.*

<u>Actividad 2</u>: Observa los dibujos siguientes:



Para rodear un cuadrado utilizamos cuatro triángulos
Para rodear dos cuadrados necesitamos seis triángulos:
El profesor ha preguntado ¿Cuántos triángulos harían falta para rodear 30 cuadrados unidos por un lado?
A continuación están los cálculos de cuatro alumnos:

*<u>José</u>: 2 . 30 = 60, 60 + 4 = 64. <u>Solución</u>: Necesitaríamos 64 triángulos.*
*<u>Luisa</u>: 30 + 30 = 60, 60 + 1 + 1 = 62. <u>Solución</u>: 62 triángulos.*

*<u>Jonathan</u>: Si dos cuadrados necesitan 6 triángulos, entonces 30 cuadrados necesitan: 90 triángulos, ya que 30 = 2.15 y 15. 6 = 90.*
*<u>Ana</u>: Si 1 cuadrado necesita 4 triángulos, entonces 30 cuadrados necesitaran 4. 30 = 120 triángulos.*

a) ¿Cuál de las soluciones es correcta? Explica detenidamente tu elección.
b) Explica en qué fallan las incorrectas.

# ANEXO 3

algunas posibles formas de Resolver el problema del cuadrado:

Forma 1:

a) si contamos los cuadrados de la forma

$5.2+(5-2).2=10+6=\boxed{16}$ son 16 cuadrados sombreados los que tiene un cuadrado de lado 5 (cuadradados).

b) con la misma técnica que antes, si el cuadrado tiene lado 37 cuadrados, entonces los sombreados serían

$37.2+(37-2).2=74+70=$ $\boxed{\text{144 cuadrados sombreados.}}$

c) considero la cantidad de cuadrados que tiene uno de los lados del Rectángulo, y lo multiplico por 2 considerando también el lado opuesto. Así ya tengo contados los cuadrados de las esquinas y Resta contar los otros dos lados opuestos y Restarles a cada lados dos cuadrados.

d) si el lado del cuadrado es "a":

Número de cuadrados sombreados $= 2.a+2.(a-2)$

e) Deberíamos ver si $587=2a+2(a-2)$

$\Leftrightarrow \frac{583}{4}=a \neq$ entero (natural)

Luego No existe el valor de a.

f) $6592\overset{?}{=}2a+(a-2).2$ ó $6594\overset{?}{=}2a+(a-2).2$

Hacendo cuentas, se llega a que Pedro tiene Razón y el lado del cuadrado es 1647.

por otro lado, Hay $(1647)^2-[2.1647+(1647-2).2]$ cuadrados sin sombrear.

Forma 2:

considerar la forma general

Número de cuadrados sombreados $= 4a-4$, si a es el lado del cuadrado.

En este caso, contamos cuantos cuadrados tiene un lado del cuadrado, lo multiplicamos por 4 (por cada lado) y le restamos los 4 cuadrados de las puntas, para que no se repitan.

Forma 3:

considerar directamente $(a.2-2).2$ = número de cuadrados sombreados, si a es el lado del cuadrado.

En este caso a cada lado lo multiplico por dos y le resto 2 cuadrados de las puntas, luego volviéndolo a multiplicar por 2 obtengo la cantidad de cuadrados de los otros dos lados que me faltaban.

(obs: todas estas formas son las mismas)

Forma 4:

Resolver los incisos a) y b) así

a) $5.5-3.3=16$ cuadrados sombreados (5 cuadrados de lado)

b) $37.37-35.35=144$ cuadrados sombreados (con 37 cuadrados de lado)

la forma general sería

$a.a-(a-2)(a-2)$ = Número de cuadrados sombreados, si "a" es el lado del cuadrado.

En este caso, trabajamos restando totales de cuadrados sombreados menos el área del cuadrado que queda sin sombrear.

Forma 5:

Sería sumar las cantidades de cuadrados que tienen los lados del cuadrado, sin las esquinas, multiplicándolo por los 4 lados y luego sumarle 4, justamente por las esquinas. En el inciso a) quedaría como $3.4+4=16$ cuadrados.

en la forma general, si a es la cantidad de cuadrados que tiene un lado

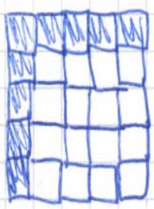
$\Rightarrow$ Número de cuadrados sombreados $= (a-2).4+4$

<u>Forma 6</u>

contaríamos la cantidad de cuadrados sombreados, en el caso a) de la siguiente manera:

$9.2-2=16$

donde consideramos 9 cuadrados sombreados, como se



indica en la figura, lo multiplicamos por dos para terminar de sombrear lo que nos pide la consigna, y le restamos 2 cuadrados de las esquinas, que se están repitiendo.

así, si a es la cantidad de cuadrados que tiene un lado del cuadrado.

$\Rightarrow$ Número de cuadrados sombreados $=(2a-1).2-2.$