

## MATEMÁTICAS EN CONTEXTO. UNA PROPUESTA PARA ABORDAR EL ANÁLISIS DE FUNCIONES

Sergio P. Farabello\* – Carlos H. Espino\* – Néstor F. Pascal\* – Inés M<sup>a</sup> Gómez-Chacón\*\*  
farabellos@uner.edu.ar – igomezchacon@mat.ucm.es

\*Facultad de Bromatología – Universidad Nacional de Entre Ríos – Argentina

\*\*Facultad de Ciencias Matemáticas – Universidad Complutense de Madrid – España

Tema: V.4 - Materiales y Recursos Didácticos para la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática.

Modalidad: CB

Nivel educativo: 7

Palabras clave: matemáticas en contexto, concepto de función, concepto de límite, física

### Resumen

*En los distintos niveles educativos, se suelen plantear ejercicios y problemas cuyos enunciados están vacíos de contenido, generalmente muy poco relacionados a problemas específicos de otras asignaturas. Esto hace que los estudiantes se pregunten a menudo para qué les sirve lo que están estudiando, cuándo y en qué lo van a aplicar, tornándose la Matemática una ciencia abstracta y muy lejana a su interés.*

*La propuesta didáctica que se presenta se desarrolló en primer año de la Licenciatura en Bromatología (UNER) y en el Máster en Formación del Profesorado (UCM). Se planteó un problema de cinemática a través del cual se abordó el análisis funcional.*

*El 90% de los alumnos de Bromatología tuvo dificultades en la interpretación del enunciado, el 65% en el cálculo de magnitudes, el 50% en las expresiones analíticas y el 65% en la representación gráfica. Las dificultades para los alumnos del Máster aparecieron en el 25%, 45%, 55% y 55% de los casos, respectivamente.*

*El análisis comparativo de ambos grupos pone de manifiesto que la enseñanza contextualizada ha favorecido la apropiación de conceptos y la motivación. De este estudio exploratorio constatamos, por un lado, pistas de posibles investigaciones y, por otro, pistas para la enseñanza.*

### Introducción

La mecánica del cálculo constituye uno de los objetivos más buscados por quienes imparten la enseñanza de la matemática en los distintos niveles del sistema educativo (Gibert y Camarena, 2010; Artigué, 1991; Tall, 1996; Carlson y Oethrtman, 2005). Los ejercicios y problemas que se plantean a los estudiantes suelen ser enunciados vacíos de contenido, generalmente muy poco relacionados a problemas específicos de otras asignaturas. Esto hace que los estudiantes se pregunten a menudo para qué les sirve lo que están estudiando, cuándo y en qué lo van a aplicar, tornándose la Matemática una ciencia abstracta y muy lejana al interés de los alumnos.

Camarena (Gibert y Camarena, 2010), en su Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, estableció que el estudiante se motiva de manera natural cuando recibe una matemática contextualizada. Según sus investigaciones, cuando el estudiante recibe una

matemática desvinculada de sus áreas de interés, merma su desempeño escolar al mismo tiempo que aumenta su falta de motivación por el estudio de la matemática.

En su investigación, indagó además si esa motivación puede alcanzar también al docente para que éste pueda impartir en sus clases una matemática contextualizada. Las conclusiones de su trabajo demostraron que es posible que el docente se motive con la estrategia de una matemática contextualizada, aunque coexisten otros factores que intervienen en la falta de motivación de los docentes, tales como las concepciones que algunos docentes tienen sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática, su propia práctica docente, y las condiciones que se presentan en su actividad laboral y su entorno.

No obstante ello, la contextualización de la Matemática no debe verse solamente como un elemento motivador, sino como parte de una interacción compleja entre las experiencias del estudiante, las creencias, metas y percepciones del ambiente de aprendizaje (Gómez-Chacón, 1998; Gómez-Chacón y Joglar, 2010). Las reacciones de los estudiantes frente a un contexto propuesto pueden ser muy diferentes; para algunos puede ser un elemento facilitador del aprendizaje, mientras que para otros puede constituir una dificultad mayor.

En las carreras de ciencias aplicadas, la Matemática es, en general, una de las asignaturas más reprobadas, lo cual indica la problemática que la Matemática representa para los estudiantes. Los alumnos pierden el interés en el estudio de la Matemática porque no ven de manera inmediata su aplicación, ni el objeto de tener que cursarla en la carrera que han elegido. Esto ocurre año tras año con los ingresantes a la Licenciatura en Bromatología y a la Tecnicatura Universitaria en Química por ejemplo, quienes en los primeros días de clase, formulan preguntas tales como: “¿para qué tenemos que estudiar Matemática?”, o “¿en qué vamos a aplicar tanta Matemática si nosotros vamos a trabajar en el estudio de los alimentos?”.

Sin embargo, es posible que ese mismo estudiante, una vez graduado, al desarrollar su actividad profesional y laboral tenga que enfrentarse a problemas propios de la industria en la que trabaje, y resulte necesario aplicar la modelación matemática, encontrando quizás dificultades para modelar el problema ya que no ha sido preparado para ello durante sus estudios universitarios.

La modelación matemática aparece mencionada explícitamente en pocos planes de estudio, pero aún en éstos casos no se dice cómo incorporarla a los cursos de Matemática, ni cómo lograr que los estudiantes modelen situaciones de otras áreas o problemas de la vida cotidiana.

Por otra parte, los profesores que imparten las clases de Matemática entienden que la modelación matemática debe ser desarrollada por los docentes que tienen a su cargo las asignaturas específicas y troncales de la carrera, mientras que estos últimos presuponen que son los docentes de Matemática quienes deben enseñar al estudiante a modelar fenómenos o problemas aplicados de cada carrera (Camarena, 2012).

### **Objetivo**

El objetivo de este trabajo es presentar una propuesta didáctica para el tratamiento de funciones definidas por partes, límite, continuidad e introducción al concepto de derivadas, partiendo de una situación problemática de cinemática ya estudiada en la cátedra de Física.

Con esta propuesta se pretende:

- Integrar significativamente contenidos de Matemática y Física
- Estimular el interés de los alumnos
- Favorecer el desarrollo del pensamiento crítico en los alumnos

### **Diagnóstico**

Observaciones realizadas en clase en los últimos años muestran que los alumnos, tanto del nivel secundario, como terciario y universitario, tienen muy incorporado el concepto de “*y es función de x*”, con “*x*” como variable independiente e “*y*” como variable dependiente o función, resultándoles muy difícil pensar en situaciones donde las variables independientes pueden ser el tiempo, la cantidad de calor o la temperatura, y las variables dependientes la velocidad, la temperatura o la presión.

En Física, por ejemplo, los alumnos ven, en el movimiento de una partícula, que su posición depende del tiempo transcurrido, como también dependen de éste su velocidad y aceleración, entre otras magnitudes. Interpretan las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y del movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV), pero no las relacionan con la forma de las funciones estudiadas en análisis matemático.

También representa una dificultad el hecho de identificar cuál de las variables que interviene en una ecuación determinada es la dependiente y cuál la independiente. Por ejemplo, cuando se representa la posición “*x*” en función del tiempo “*t*”, son varios los alumnos que indican que “*el tiempo es la variable dependiente y la posición la variable independiente*”, porque ésta última, por el sólo hecho de llamarse “*x*”, “*debe ser graficada en un eje horizontal*”, sin importar lo que realmente esté representando.

La ecuación de la recta, estudiada en matemática como  $y = mx + b$  no es, ni representa (para muchos alumnos) lo mismo que la ecuación  $V = nRT/P$  utilizada en química para calcular la variación del volumen de un gas en función de la temperatura cuando la presión se mantiene constante. Resulta difícil que los alumnos interpreten que la pendiente de la recta es “ $nR/P$ ”, y más difícil aún que “esa” pendiente sea la misma que ellos estudiaron en matemática como “ $m$ ”.

### **Implementación de la propuesta didáctica**

El trabajo se realizó en la ciudad de Gualaguaychú, provincia de Entre Ríos, en la asignatura Matemática I del primer año unificado de la Licenciatura en Bromatología y la Tecnicatura Universitaria en Química de la Facultad de Bromatología (UNER), en el año 2011. Luego se replicó en la ciudad de Madrid, España, en la asignatura Pensamiento Matemático y Resolución de Problemas del Máster en Formación del Profesorado en la Facultad de Ciencias Matemáticas (UCM), en el año 2012.

La propuesta didáctica de la cátedra plantea el estudio de funciones definidas por trozos, límites, continuidad y derivadas de funciones lineales y cuadráticas, para luego extender estos conceptos al resto de las funciones.

Teniendo en cuenta el diagnóstico acerca de las dificultades para reconocer variables y funciones en temas de física, se decidió comenzar la actividad con un problema de MRU y MRUV, para introducir luego los conceptos matemáticos con “ $t$ ” como variable independiente y “ $x$ ”, “ $v$ ” o “ $a$ ”, como variables dependientes o función.

En la Facultad de Bromatología, los alumnos se encontraban cursando el primer año de la carrera, y en el plan de estudios tanto Física I como Matemática I son materias anuales de primer año, razón por la cual los conceptos de mecánica de la partícula resultaban muy cercanos para los estudiantes.

En la Facultad de Ciencias Matemáticas, en cambio, los estudiantes del Máster eran graduados universitarios de diversas disciplinas (arquitectos, ingenieros y licenciados en Matemáticas) y a muchos de ellos la Física les resultaba algo alejado y olvidado. Por eso, se propuso realizar una evaluación de diagnóstico antes de efectuar la actividad didáctica aplicada a la Física. (Ver anexo).

La propuesta didáctica consistió en el planteo de una situación problemática compuesta por el desplazamiento lineal de un móvil con MRU o MRUV, según el caso. En la Facultad de Bromatología se plantearon tres situaciones problemáticas diferentes, cada una de las cuales se dividió a su vez en dos por las diferencias planteadas en los enunciados: uno que contenía sólo texto y otro que contenía parte de texto y parte de información gráfica. El curso se dividió de este modo en seis grupos diferentes.

En la Facultad de Ciencias Matemáticas se planteó una sola situación problemática, pero dividida también en dos grupos de acuerdo a las características de los enunciados mencionadas anteriormente. El curso del Máster quedó también dividido en seis grupos, pero con sólo dos ejercicios diferentes.

En ambos cursos la cantidad de alumnos que participaron de la actividad fue la misma: 22 estudiantes.

A modo de ejemplo se transcribe en el ANEXO una de las situaciones problemática (la que resultó ser común en ambos cursos) con sus dos variantes.

Al finalizar la actividad, los estudiantes hicieron una puesta en común para presentar al resto de sus compañeros la situación problemática que se les había propuesto y desarrollaron en el pizarrón los cálculos, ecuaciones y gráficos necesarios para resolverla.

Una vez finalizada la puesta en común, se solicitó a todos los estudiantes que participaron de la actividad que completaran una encuesta con el propósito de permitirle a los docentes responsables de las asignaturas evaluar las dificultades del trabajo propuesto y el impacto que la actividad desarrollada tuvo sobre cada uno de ellos.

### **Análisis y discusión de los resultados**

La puesta en común de las actividades desarrolladas por los estudiantes de ambos cursos permitió poner en evidencia las dificultades que los estudiantes tuvieron al momento de decidir cuál era la posición inicial del móvil respecto del observador y la posterior representación de esa posición en un gráfico de coordenadas cartesianas “*t-x*”.

El 90% (n=18) de los estudiantes de la Facultad de Bromatología presentó la mayor dificultad en la interpretación de los resultados, mientras que sólo el 25% (n=5) de los estudiantes del Máster manifestó tener problemas en ese rubro. (Tabla 1)

*Tabla 1. Distribución de las dificultades presentadas para los alumnos de la Facultad de Bromatología y del Máster de la UCM al realizar la actividad didáctica propuesta.*

DIFICULTADES	Interpretación del enunciado		Cálculo de magnitudes		Expresión analítica de las ecuaciones		Representación gráfica del movimiento	
	n	%	n	%	n	%	n	%
Bromatología	18	90	13	65	10	50	13	65
Máster UCM	5	25	9	45	11	55	11	55

Para los estudiantes de la Facultad de Bromatología, las dificultades en la interpretación de los resultados se distribuyen según la Tabla 2, correspondiendo los mayores valores a la identificación de los cambios de movimiento y a la ubicación de la posición inicial del móvil. Algunos estudiantes indicaron más de una dificultad en la interpretación del enunciado.

*Tabla 2. Distribución de las dificultades presentadas para los alumnos de la Facultad de Bromatología para interpretar el enunciado de la actividad propuesta.*

<b>Dificultades para interpretar el resultado</b>	<b>n</b>	<b>%</b>
Identificación de los cambios de movimiento	8	40
Ubicación de la posición inicial del móvil	6	30
Sentido de circulación del móvil	2	10

Obtención de los valores de velocidad a partir del gráfico	2	10
Falta de indicación en el enunciado del tipo de movimiento	2	10
Ausencia del dato del valor de la aceleración en el enunciado	2	10
Obtención de los valores de aceleración a partir del gráfico	1	5

Para los estudiantes del Máster de la UCM, las dificultades en la expresión analítica de las ecuaciones del movimiento y en la representación gráfica se distribuyen según las Tablas 3 y 4 respectivamente, correspondiendo los mayores valores a la expresión y a la gráfica de la posición en función del tiempo. Algunos estudiantes indicaron más de una dificultad en la interpretación del enunciado.

*Tabla 3. Distribución de las dificultades presentadas para los alumnos del Máster de la UCM para expresar analíticamente las ecuaciones del movimiento.*

<b>Dificultades para expresar analíticamente las ecuaciones</b>	<b>n</b>	<b>%</b>
En la expresión de la posición en función del tiempo	8	40
En la expresión de la aceleración en función del tiempo	3	15
En la expresión de la velocidad en función del tiempo	1	5

*Tabla 4. Distribución de las dificultades presentadas para los alumnos del Máster de la UCM para representar gráficamente el movimiento.*

<b>Dificultades para expresar analíticamente las ecuaciones</b>	<b>n</b>	<b>%</b>
En la expresión de la posición en función del tiempo	8	40
En la expresión de la aceleración en función del tiempo	3	15
En la expresión de la velocidad en función del tiempo	1	5
<b>Dificultades para representar gráficamente el movimiento</b>	<b>n</b>	<b>%</b>
Gráfica de la posición en función del tiempo	10	50
Gráfica de la aceleración en función del tiempo	1	5
Gráfica de la velocidad en función del tiempo	0	0

Las respuestas de los alumnos a la consigna “la realización de este ejercicio me sirvió para...” variaron también según el ámbito donde estudiaban. En las Tablas 5 y 6 se muestran las respuestas de los alumnos de la Facultad de Bromatología y del Máster de la UCM, respectivamente. Algunos estudiantes indicaron más de una dificultad en la interpretación del enunciado.

Se puede observar que en ambos grupos la realización de la actividad sirvió para que los estudiantes pudieran ver la relación de la Matemática con las otras ciencias. En los alumnos de la Facultad de Bromatología se destaca también la importancia de “entender más el tema”, mientras que en los alumnos del Máster de la UCM, cobra importancia el “recordar conceptos de Física”, lo cual resulta coherente con el hecho de que se están formando como futuros profesores de Matemática para la ESO y el Bachillerato, y hace ya mucho tiempo que han visto los temas de Física tratados en la actividad realizada.

Tabla 5. Distribución de las respuestas de los alumnos de la Facultad de Bromatología respecto del trabajo realizado.

La realización de este ejercicio me sirvió para...	n	%
... ver la relación de la Matemática con las demás ciencias	10	50
... entender más el tema	4	20
... interpretar gráficas de movimiento	2	10
... consultar con mis compañeros	2	10

Tabla 6. Distribución de las respuestas de los alumnos del Máster de la UCM respecto del trabajo realizado.

La realización de este ejercicio me sirvió para...	n	%
... recordar conceptos de Física	8	40
... ver la relación de la Matemática con las demás ciencias	7	35
... para mostrarlo y explicarlo a los futuros alumnos	4	20

Se transcriben a continuación algunas de las respuestas dadas por los estudiantes a la consigna “la realización de este ejercicio me sirvió para...”:

*“No me gustó mucho que mezclaran Matemática con Física y no estaba acostumbrada a eso, pero ahora tengo una idea de cómo afrontar este tipo de problemas”. (Alumna de la Facultad de Bromatología)*

*“Rescatar la Física del ‘baúl de los recuerdos’ y para disfrutar. Resultó muy divertido el volver a repasar esos conceptos básicos de Física y revisar otro campo de aplicación más de las Matemáticas”. (Alumno del Máster de la UCM)*

*“Reforzarla relación analítico – gráfica de las funciones, así como su derivabilidad e integrabilidad; todo utilizado en el ámbito de la Física, poco trabajado para mí”. (Alumno del Máster de la UCM)*

El análisis comparativo de ambos grupos pone de manifiesto que la enseñanza contextualizada ha favorecido la apropiación de conceptos y la motivación. De este estudio exploratorio constatamos, por un lado, pistas de posibles investigaciones y, por otro, pistas para la enseñanza.

## Bibliografía

- Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (editor). *Advanced Mathematical Thinking* (pp 167-198). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers. 168-199
- Camarena Gallardo, P. (2012). La modelación matemática en la formación del ingeniero. *Revista Brasileira de ensino de ciências e tecnologia*, 5(3). ISSN-1982-873-X.
- Carlson, M.; Oehrtman, M. (2005). Key aspects of knowing and Learning the concept of function. *Researcher Sampler*. MAA ONLINE. *The mathematical Association of America*. Recuperado de [http://www.maa.org/t\\_and\\_l/sampler/rs\\_9.html](http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html)
- Gibert Delgado, R., Camarena Gallardo, P. (2010). La motivación del docente ante la matemática en contexto. *Científica*, 14(3), 107-113.

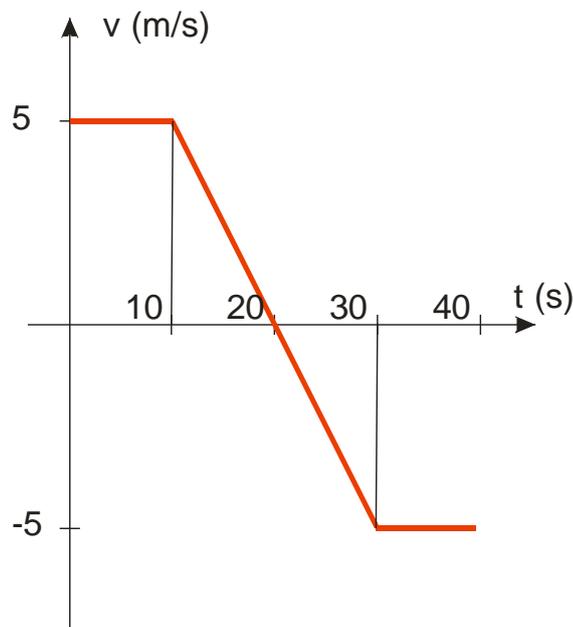
- Gómez Chacón, I. (1998). *Matemáticas y contexto. Enfoques y estrategias para el aula*. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones
- Gómez-Chacón, I. M<sup>a</sup> & Joglar, N. (2010). *Developing competencies to teach exponential and logarithmic functions using GeoGebra from a holistic approach*. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.12(3), 485-513.
- Planas, N & Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(2), 179-213.
- Tall, D. (1996). 'Functions and Calculus', en A. Bishop et al (editores). *Internacional Handbook of Mathematics Education*. Part 1, 289-324. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

## ANEXOS

### Evaluación diagnóstico

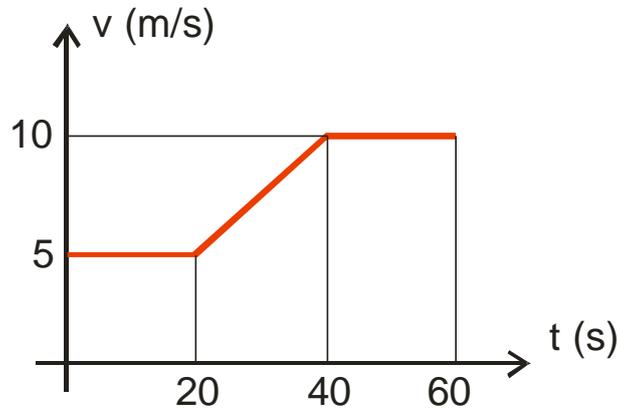
Un móvil recorre una trayectoria rectilínea. En el instante  $t=0$  pasa por el punto A con una velocidad  $v=5\text{m/s}$  en el sentido E-O. Su velocidad en función del tiempo está dada por la gráfica que se muestra a continuación. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- Entre 10s y 20s el móvil retrocede
- En  $t=0\text{s}$  y  $t=40\text{s}$  las energías cinéticas son iguales
- En  $t=10\text{s}$  y  $t=30\text{s}$  las cantidades de movimiento son iguales
- En el instante  $t=20\text{s}$  el móvil pasa por el punto A
- Entre  $t=10\text{s}$  y  $t=20\text{s}$  el móvil tiene aceleración positiva
- En  $t=10\text{s}$  el móvil tiene aceleración máxima



### Actividad Grupo 1

En el diagrama de la figura se representa el movimiento rectilíneo de un cuerpo. Un observador acciona el cronómetro ( $t=0s$ ) cuando el cuerpo se encuentra ubicado a 10m de él, y el sentido del movimiento del cuerpo es tal que se acerca al observador.



- a) Expresa en forma analítica y representa gráficamente la posición del móvil en función del tiempo.
  - i. Indica si la función  $x=f(t)$  es continua. Si no lo es, indica dónde presenta una discontinuidad y por qué.
  - ii. ¿A qué distancia del observador se encuentra el móvil cuando el cronómetro indica 60s?
- b) Expresa en forma analítica y representa gráficamente la aceleración del móvil en función del tiempo.
  - i. Indica si la función  $a=f(t)$  es continua. Si no lo es, indica dónde presenta una discontinuidad y por qué.
- c) Calcula la cantidad de movimiento cuando  $t=20s$  y  $t=40s$ 
  - i. ¿Los sentidos de estas dos magnitudes calculadas son iguales o contrarios? ¿Por qué?
- d) Calcula el área bajo la curva  $v=f(t)$ 
  - i. ¿Qué representa?

## Actividad Grupo 2

Un observador acciona el cronómetro ( $t=0s$ ) cuando un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme con  $v=5m/s$  y se encuentra ubicado a 10m de él, siendo el sentido del movimiento del cuerpo tal que se acerca al observador.

Al cabo de 20s el móvil cambia su movimiento y se desplaza con aceleración constante e igual a  $0,25m/s^2$ . 20s después, cambia nuevamente su movimiento y continúa sin aceleración, manteniendo su velocidad.

- a) Expresa en forma analítica y representa gráficamente la posición del móvil en función del tiempo.
  - i. Indica si la función  $x=f(t)$  es continua. Si no lo es, indica dónde presenta una discontinuidad y por qué.
  - ii. ¿A qué distancia del observador se encuentra el móvil cuando el cronómetro indica 60s?
- b) Expresa en forma analítica y representa gráficamente la velocidad del móvil en función del tiempo.
  - i. Indica si la función  $v=f(t)$  es continua. Si no lo es, indica dónde presenta una discontinuidad y por qué.
- c) Expresa en forma analítica y representa gráficamente la aceleración del móvil en función del tiempo.
  - i. Indica si la función  $a=f(t)$  es continua. Si no lo es, indica dónde presenta una discontinuidad y por qué.
- d) Calcula la cantidad de movimiento cuando  $t=20s$  y  $t=40s$ 
  - i. ¿Los sentidos de estas dos magnitudes calculadas son iguales o contrarios? ¿Por qué?
- e) Calcula el área bajo la curva  $v=f(t)$ 
  - ii. ¿Qué representa?