DE LA EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA A LA EDUCACIÓN SUPERIOR EN MATEMÁTICAS: ¿TRANSICIÓN Ó RUPTURA? NOTAS PARA UNA REFLEXIÓN

Gloria Inés Neira Sanabria
nicolauval@yahoo.es, gneira@udistrital.edu.co
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Tema: Papel de la Teoría en la Investigación en Educación Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Transición, Matemáticas Básicas, Matemáticas Universitarias.

Resumen
En el paso de la educación básica y media a la universitaria se manifiestan diversos problemas de la Educación Matemática Hay múltiples tensiones entre el análisis real, el cálculo escolar, la geometría escolar, la geometría analítica escolar, el álgebra abstracta, el álgebra de bachillerato, la aritmética de los reales, la aritmética de los racionales, la aritmética de los enteros, la aritmética de los naturales, entre lo discreto y lo continuo (y en la mitad, lo denso), entre lo finito y el infinito actual (y en la mitad, el infinito potencial). Hay aspectos en los que la notación del cálculo parece la misma del álgebra escolar, pero no lo es, como se ve ante todo por la ausencia de la composición, por el entendimiento del exponente (-1) como recíproco, no como inverso de la función, por el uso del apóstrofe para la derivada, por la manera de entender las igualdades que empiezan por "y =…" como funciones, por la yuxtaposición de letras sin indicar multiplicación en los nombres de las funciones (como "lnx"). Documentaremos que se trata de un registro semiótico diferente para un sistema conceptual diferente. Problemática fundamental para profesores en ejercicio y la formación de futuros profesores.

Curricularmente el modo en que ocurre la instrucción en la escolaridad institucional[1] es dos cursos de algebra en 8º y 9º grado y un curso de cálculo en grado 11, es decir se presenta el álgebra como un dominio, unas prácticas, anteriores al cálculo, y no solo anteriores sino como pre-requisito para entrar a él posteriormente. En la universidad en primer semestre de ingeniería, el estudiante debe tomar un curso de cálculo diferencial para el cual es necesario, aunque no suficiente, un buen dominio del álgebra. Incluso hay universidades que han incluido un curso de Fundamentos de matemática o matemáticas básicas, repaso del algebra y de las funciones, para suplir los vacios que puedan presentarse antes de entrar a un curso formal de cálculo. Históricamente también se desarrolló primero el álgebra y posteriormente el cálculo. Así que en este primer acercamiento, paso o transición significa el camino que ha dado tanto la humanidad como la escuela en la adquisición y ordenamiento de ciertos contenidos

[1] Así es en nuestro país y guardando las proporciones la organización curricular es similar en la mayoría de países del mundo, por lo menos en cuanto al orden en los cursos de álgebra y el cálculo.

aceptados universalmente como básicos en la educación, particularmente en el algebra y el cálculo escolar.

En la práctica pedagógica de organización escolar actual, lo que se da es una separación de un año (trigonometría y geometría analítica). De facto se encuentra un 10º grado que configura un elemento o estadio de transición escolar, que no tiene ninguna razón ni matemática ni pedagógica, sino solo de tradición escolar. Nos interesa la transición del algebra al cálculo en el sentido de lo que cambia, con respecto al álgebra, semántica, sintáctica, semióticamente para el estudiante una vez que entra al mundo del cálculo, tanto en grado 11 como en el primer semestre de universidad. Pero no solo cronológicamente, sino también en qué momentos, en qué temáticas, con cuáles situaciones se está presentando ya una irrupción de elementos constitutivos del cálculo.
Y se asumirá como supuesto inicial que hay un paso o transición, y no por ejemplo una ruptura, que sí es un término que instaura una postura radical de entrada, para que la investigación misma arroje más claridad acerca de ese camino, de ese tránsito. Voy a decir paso, ni curricular, ni cognitivo, sino entendiendo que curricularmente se pone primero algebra y después cálculo, que el algebra se considera pre-requisito para el cálculo, que para compartir las prácticas del cálculo se requiere en gran medida manejar las del álgebra. Hay un paso que algunos lo dan de una vez, otros se devuelven, otros permanecen un poco ambiguos por un tiempo y otros tal vez nunca pasen, pero cualquiera de las situaciones confirma que esta bien llamado también transición. Esa transición puede ser cognitiva, lingüística, curricular, semiótica, pero no se está trabajando ni desde el punto de vista antropológico, ni desde el punto de vista del análisis del discurso.

Tensiones

Hay múltiples tensiones entre el análisis real, el cálculo escolar, la geometría escolar, la geometría analítica escolar, el álgebra abstracta, el álgebra de bachillerato, la aritmética de los reales, la aritmética de los racionales, la aritmética de los enteros, la aritmética de los naturales, entre lo discreto y lo continuo (y en la mitad, lo denso), entre lo finito y el infinito actual (y en la mitad, el infinito potencial).

Hay algunos aspectos en los que la notación del cálculo parece la misma del álgebra escolar, pero no lo es, como se ve ante todo por la ausencia de la composición, por el entendimiento del exponente (-1) como recíproco, no como inverso de la función, por el uso del apóstrofe para la derivada, por la manera de entender las igualdades que empiezan por “y =…” como funciones, por la yuxtaposición de letras sin indicar multiplicación en los nombres de las funciones (como “lnx”). La idea es documentar que se trata de un registro semiótico diferente para un sistema conceptual diferente.

Tenemos la conjetura de que la notación para la geometría analítica de décimo grado no es la misma que la del álgebra escolar ni la del cálculo. En geometría analítica los términos “no significan nada”, sólo las igualdades, que llamamos “ecuaciones” significan aunque en ellas no se trata de averiguar una raíz. No importa que sean funcionales o no. No se usa la composición ni la derivada. Podría pues haber otra transición del álgebra escolar a la geometría analítica y otra al cálculo, nos interesa la que va del algebra al calculo, entre otras cosas porque en el cálculo de la universidad, la geometría analítica es una unidad más o una herramienta para las llamadas funciones trascendentes.

La principal operación binaria analítica es la composición de funciones, operación que no figura en el álgebra de bachillerato. Los elementos u objetos del análisis no son los números racionales y reales, sino las funciones reales de valor real. En noveno grado cuándo vieron $x^2 \circ x^3$, y el resultado es $x^5, ó, x^6$? Son pues muy diferentes de los objetos de la aritmética generalizada.

Respecto a la relación continuo-discreto (al interior de la aritmética, del álgebra y del cálculo), en la mitad hay una zona gris: lo denso, o la densidad. En lo discreto están los conjuntos finitos, los números naturales y los enteros; luego se llega a los racionales positivos Q+, que son densos, y de allí se llega a los racionales Q. Luego se trata de capturar el continuo (línea, región) a través de lo discreto y lo denso.

Generalmente se viene trabajando en el álgebra de bachillerato con ciertas funciones muy limitadas: la función cuadrado, la función cubo, las funciones lineales y las funciones afines o de gráfica lineal (que se confunden frecuentemente con las lineales). No se consideran las funciones constantes como funciones, sino como constantes. La función idéntica no se utiliza como función, talvez “porque no hace nada”. La *x* se considera como incógnita, como variable, o como indeterminada, pero no como función.

No es conveniente confundir la función, tomada como operación o transformación, que es un objeto activo, con su grafo, que es un objeto pasivo propio de la teoría de conjuntos. Se perdería el aspecto activo de la función y no se podría hablar de la diferencia entre el conjunto de salida y el dominio, ni de la diferencia entre el conjunto de llegada y el recorrido, rango o codominio. No habría diferencia entre función parcial vs. función totalmente definida, ni entre función en vs. función sobre o sobreyectiva. Menos conveniente todavía es confundir la función con su gráfica cartesiana. La una es un elemento u objeto analítico, y la otra es un elemento u objeto geométrico.

Al preguntarnos: ¿Qué elementos conceptuales trae el estudiante para trabajar las nociones intuitivas del cálculo? o ¿Sobre qué predica el cálculo?, o, ¿Qué requiero para acceder al cálculo? las posibles respuestas involucran entidades como: *funciones, números reales, infinito, aproximaciones, continuidad, vecindades,* entre otras, conceptos que como tales tienen sus propios problemas de conceptualización y de representación.

Con respecto a las funciones, vale la pena anotar aquí las dificultades que tienen los estudiantes para pasar de un registro semiótico de representación a otro, y para articular los distintos registros de representaciones semióticas (Duval 1992,1998) y reconocer en todos el mismo objeto matemático. Por ejemplo, se rechaza la función real constante de valor 4 si se presenta en la forma y=4, porque lo que existe en el estudiante es una asociación de la función con su fórmula dependiente de x; o de función como variación, en cambio si se presenta gráficamente por la asociación recta= función se presentan menos errores.

En cuanto a los Números Reales, algunas investigaciones ***[Artigué, 1995],*** muestran la tendencia de los estudiantes a asociar el número real con la aproximación que de él nos da la calculadora, y también han detectado situaciones arraigadas en los estudiantes de college y de primeros semestres de universidad, como que entre 3,25 y 3,26 no hay ningún número, o que 3,138 es mayor que 3,4, o que $(3,4)^2 = 9,16$; situaciones que muestran la complejidad de estos referentes.

Respecto a los límites hay algunas justificaciones interesantes de los estudiantes. Por ejemplo la concepción de que el límite de la sucesión *0.9, 0.99, 0.999,...debe* ser menor que *1* ; que 0.9, 0.99, 0.999 no tiende a 1 pero tiene límite 1 (porque tiende a tener la propiedad de 0.9999 que nunca puede pasar del límite 1).

Se desarrollarán también algunas consideraciones acerca del "paso", transición", "ruptura",… del álgebra al cálculo, teniendo en cuenta que cada una de estas categorías está cargada semántica y teóricamente y ha generado diversas tendencias, se trata de hacer una apertura para la lectura del problema y no cerrar definiendo cada término, de construir un marco explicativo inicial que permita hacer interpretaciones y tomar decisiones para caracterizarlas.

Para entrar en el mundo del cálculo es necesario enriquecer la visión de los estudiantes sobre la noción de igualdad y desarrollar nuevos métodos para probar igualdades. En este punto, es interesante notar que una reconstrucción similar de la noción de igualdad fue puesta en evidencia por la investigación didáctica, en la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.

En el álgebra, para demostrar que dos expresiones son iguales, se razona por equivalencia: se transforma la escritura $a(x) = b(x)$ en una sucesión de escrituras $ai(x)=bi(x)$ hasta obtener dos expresiones idénticas. Lo mismo se hace en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones. Mientras que en el cálculo, se hace un encaje con la proposición $\forall \quad \varepsilon >0, la\text{-}b /< \varepsilon$, Lo cual ha de llevar a comprender que para demostrar que en la vecindad de un punto *a*, $f(x) < g(x)$, no hay que resolver la inecuación, sino encontrar un intervalo de centro a donde tal desigualdad se pueda garantizar, mediante aproximaciones y estimaciones. *Se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes.*

La entrada en el mundo del cálculo obliga también a los estudiantes a reconstruir objetos matemáticos ya familiares pero en otros mundos: la noción de tangente nos proporciona un caso prototípico de tal reconstrucción. En la enseñanza bachillerato, los alumnos encuentran primero esta noción en el contexto del círculo. La tangente es un objeto geométrico que posee propiedades específicas: • no corta al círculo, • Lo toca en solo un punto, • en el punto de contacto es perpendicular al radio.

Todas estas propiedades son globales y no tienen nada que ver con la idea de dirección común. Además, para ayudar a los alumnos a darse cuenta del carácter abstracto de los objetos geométricos, los profesores subrayan que incluso si perceptivamente el círculo y la tangente parecen coincidir localmente, en realidad tienen solo un punto común. Esta concepción geométrica se puede generalizar aplicándose a otras curvas, por ejemplo parábolas, y conduce a la concepción algebraica de la noción de tangente como recta que tiene una intersección doble con la curva, que resulta operativa con las curvas algebraicas.

Claramente, no hay una filiación directa entre esta tangente y la definida en cálculo, caracterizada por una propiedad local: la recta con que la curva tiende a confundirse localmente (aproximación afín al orden uno) y cuya pendiente está dada por el valor de la derivada de la función asociada.

Conclusiones

El paso de las matemáticas de Secundaria a las matemáticas de la Universidad plantea un problema complejo. Como lo afirma Gascón et al (2004), su esclarecimiento requerirá el desarrollo de la investigación didáctico-matemática y ésta necesitará la participación ineludible de toda la comunidad matemática.

La formación de profesores reflexivos en la disciplina matemática y en la epistemología de las matemáticas, sobre la naturaleza de los objetos de estudio de las diferentes especialidades es fundamental, la capacitación, actualización e innovación son necesarias pero no suficientes para cualificar cada vez más la práctica profesional docente: se requiere la vigilancia epistemológica de la que han hablado varios pensadores, volvernos maestros investigadores del hacer presente, cada clase, cada estudiante, lo cual a su vez requiere un cambio profundo de la estructura curricular de nuestro sistema educativo.

Finalizo citando ideas de Brousseau (1994), quien postula que para ampliar y mejorar su tarea, los investigadores en matemáticas deberán interesarse por aquella parte de su actividad relativa a cómo las matemáticas se comprenden, se comunican y se prueban. Basándose en esta nueva concepción de las matemáticas (que incluye como actividades matemáticas las relativas a la comprensión y a la comunicación), Brousseau formula la tesis de que la didáctica de las matemáticas llegará a ser plenamente parte de las “matemáticas”.

… ¡Queda abierta la discusión!

Referencias bibliográficas

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. [Traducción al español de Genís Sánchez Barberán]. Barcelona: Paidós. (Obra original publicada en 1991: *Mathematical enculturation*. Dordrecht: Kluwer).

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico. El paso de estudiar matemática en Secundaria a estudiar matemática en la Universidad. *Suma, 26*, 11-21.

Neira, G. (2000). El paso del Algebra al Cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. *Revista Ingeniería* (Universidad Distrital Francisco José de Caldas), (1), 87-92.