

## ASPECTOS HISTÓRICOS DEL PROBLEMA DE LOS $n$ CUERPOS Y SU INFLUENCIA EN EL DESARROLLO DE LA FÍSICA Y LA MATEMÁTICA: MOTIVACIÓN PARA DISEÑAR ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA.

Victoria Artigue – Alejandra Pollio  
[victoria.artigue@gmail.com](mailto:victoria.artigue@gmail.com) – [apollio@um.edu.uy](mailto:apollio@um.edu.uy)  
Universidad de Montevideo - Uruguay

Tema: III.6- Educación Matemática e Historia de la Matemática

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciario

Palabras clave: Historia de la Matemática, Matemática Educativa,  $n$  cuerpos, movimiento.

### Resumen

*El presente trabajo tiene la intención de mostrar un problema matemático originado en un modelo físico para explicar el movimiento de los astros en el sistema solar. Éste ha sido paradigmático para la ciencia desde la antigüedad hasta nuestros días. Las técnicas, que ingeniosamente desarrollaron célebres científicos a lo largo de la historia para abordar el problema, se revelaron extremadamente fructíferas para el estudio de la mayoría de los modelos matemáticos provenientes de otras disciplinas. Sin embargo, estos numerosos matemáticos, entre quienes podemos citar a Isaac Newton, Leonard Euler, Lagrange, Weierstrass, Hamilton, Jacobi, Poincaré, Kolmogorov, Lyapunov, no lograron dar una solución satisfactoria al problema original que consiste en predecir la evolución final de las trayectorias de los astros. El problema es conocido con el nombre de “Problema de los  $n$  cuerpos” y es uno de los más famosos en la historia de la matemática y del cual continúan hoy cuestiones abiertas. Consiste en predecir el movimiento de un conjunto de cuerpos que interactúan entre ellos gravitacionalmente. En la actualidad, sólo se conocen algunos resultados particulares dependiendo del valor de  $n$ .*

*La enseñanza de la matemática a través de un desarrollo histórico ayuda a un mejor entendimiento de las ideas y a la formación de personas en el ámbito del conocimiento.*

### Introducción

El problema de los  $n$  cuerpos cuenta con una gran historia. Comenzaremos con una reseña de las cuestiones más importantes, desde la antigua Grecia, estudiando cómo explicaban los griegos intelectuales el movimiento de los astros. Seguiremos con Copérnico, Galileo, Kepler, Newton, Lagrange y algunos matemáticos actuales que siguen estudiando el problema. Se verán conceptos matemáticos que han surgido a través del estudio del problema de los  $n$  cuerpos.

### Origen y formulación del problema

Su primera formulación matemática apareció en la obra de Isaac Newton *Principia*. Desde que la gravedad fue la responsable del movimiento de planetas y estrellas, Newton tuvo que expresar las interacciones gravitacionales en términos de ecuaciones

diferenciales y probar que un cuerpo esférico y simétrico puede ser modelado como un punto.

El problema físico puede formularse, informalmente, de la siguiente manera: *Dadas en un instante las posiciones y las velocidades de dos o más partículas que se mueven bajo la acción de sus atracciones gravitatorias mutuas, siendo conocidas las masas de las partículas, calcular sus posiciones y velocidades para otro instante.*

### **El movimiento de los planetas en la antigüedad**

Hacia el año 450 a.C., los griegos comenzaron un estudio de los movimientos de los planetas. Filolao de Tarento (S. V a.C.), discípulo de Pitágoras, sostenía que la Tierra, el Sol, la Luna y los planetas (cinco conocidos en ese momento) giraban alrededor de un fuego central oculto.

Según Platón (427 a. C. - 347 a. C), la Tierra era una esfera ubicada en el centro del universo. Las estrellas y planetas giraban alrededor de la Tierra en círculos celestiales. Eudoxo de Sconido (408 a.C - 355 a.C), quien trabajó con Platón, fue el primero en concebir el universo como un conjunto de 27 esferas concéntricas que rodean la Tierra, la cual a su vez también era una esfera. Platón y uno de sus ms adelantados alumnos Aristóteles (384 - 322 a.C.) mantuvieron el sistema ideado por Eudoxo agregándole no menos de cincuenta y cinco esferas en cuyo centro se encontraba la Tierra inmóvil. Eudoxo además manifestaba que todos los fenómenos en los cielos pueden explicarse a través del movimiento circular uniforme.

Aristarco de Samos (310 a. C. - 230 a. C.), es la primer persona que se conoce que propone el modelo heliocéntrico del Sistema Solar, colocando el Sol, y no la Tierra, en el centro del universo conocido. Por aquel entonces la creencia obvia era pensar en un sistema geocéntrico. Del modelo heliocéntrico de Aristarco sólo quedan las citas de Plutarco y Arquímedes. Es muy probable que los trabajos originales se hayan perdido en los incendios que padeció la biblioteca de Alejandría (Ortiz, 2005).

### **Copérnico y Galileo**

La teora heliocéntrica del sistema solar fue estudiada con profundidad por Nicolás Copérnico (1473 - 1543), estuvo veinticinco años trabajando en ello. Su obra maestra,

*De revolutionibus orbium coelestium* (de las revoluciones de las esferas celestes), es concebida como el punto inicial de la astronomía moderna, además de ser una pieza valiosísima en la Revolución Científica en la época del Renacimiento.

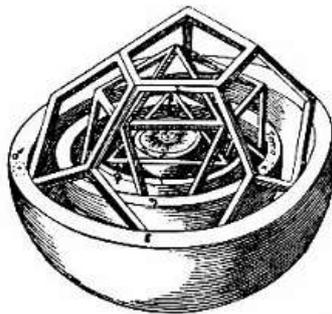
Citando a Boyer (1999), “Hoy día se suele considerar a Nicholas Copérnico o Copérnico como un astrónomo y que revolucionó la concepción del mundo de su época al conseguir con éxito poner la Tierra en movimiento alrededor del Sol (cosa que había intentado también siglos antes Aristarco, intento que fracasó históricamente); pero lo cierto es que un astrónomo tenía que ser casi inevitablemente también un especialista en trigonometría, y con Copérnico, que no era una excepción, tenemos una deuda matemática al mismo tiempo que astronómica”.

En 1536, el trabajo de Copérnico se hizo popular y había llegado a oídos de toda Europa por lo que fue pedido para publicarlo desde diferentes lugares del continente. La ideología religiosa medieval se vio sacudida por el cambio de un cosmos cerrado y jerarquizado, con el hombre como centro, por un universo homogéneo e indeterminado (e incluso infinito), situado alrededor del Sol. Esto hizo dudar a Copérnico de publicar su obra, siendo consciente de que aquello le podía traer problemas con la iglesia. Por desgracia, a causa de una enfermedad que le produjo la muerte, no alcanzó a verla publicada.

Galileo Galilei (1564 - 1642), estuvo relacionado estrechamente con la revolución científica. En 1609 recibe de París una carta de unos de sus antiguos alumnos, Jacques Badovere, quien le confirma un rumor insistente: la existencia de un telescopio que permite ver los objetos lejanos e invisibles a simple vista. Con esta única descripción, Galileo construye su primer telescopio, y continúa perfeccionándolo. El 1610 descubre 3 estrellas pequeñas en la periferia de Júpiter. Después de varias noches de observación, descubre que son cuatro y que giran alrededor del planeta. Se trata de los satélites de Júpiter llamados hoy satélites galileanos: Calixto, Europa, Ganimedes e Io. El 10 de abril, muestra estos astros a la corte de Toscana. El mismo mes, dicta tres cursos sobre el tema en Padua. Johannes Kepler ofrece su apoyo a Galileo. En 1616 Es el cardenal Balarmino el responsable de comunicarle a Galileo que se le está prohibido sostener públicamente la verdad acerca de la doctrina heliocéntrica (Stengers, 1991).

### Las leyes de Kepler

Johannes Kepler (1571 - 1630) intentó comprender las leyes del movimiento planetario durante la mayor parte de su vida. En un principio Kepler consideró que el movimiento de los planetas debía cumplir las leyes pitagóricas de la armonía. Esta teoría es conocida como la armonía de las esferas celestes. En la época de Kepler sólo se conocían 6 planetas: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. Un Dios geómetra debía vincular la existencia de estos 6 planetas con los cinco sólidos Platónicos. Para ello, Kepler da una visión del sistema solar que consiste en sólidos Platónicos inscritos en esferas cuyos radios estaban relacionados con las órbitas de los planetas (el misterio cósmico): dentro de la órbita o esfera de Saturno, inscribió el cubo, y en el interior de éste la esfera de Júpiter circunscrita a un tetraedro. En la esfera inscrita de este tetraedro situó la órbita de Marte. Entre las esferas de Marte y la Tierra el dodecaedro; entre la Tierra y Venus, el icosaedro y entre Venus y Mercurio, el octaedro. En el centro del sistema colocó el Sol.



En 1600 acepta la propuesta de colaboración del astrónomo imperial Tycho Brahe quien había montado el mejor centro de observación astronómica de esa época. Tycho Brahe disponía de los mejores datos de observaciones planetarias pero la relación entre ambos fue compleja y había una clara desconfianza. En 1602 muere Tycho y Kepler consigue el acceso a todos los datos recopilados por él, mucho más precisos que los manejados por Copérnico. A la vista de los datos se dio cuenta de que el movimiento de los planetas no podía ser explicado por su modelo de poliedros perfectos y armonía de esferas. Kepler era sumamente religioso y por tanto incapaz de aceptar que Dios no hubiera dispuesto que los planetas describieran figuras geométricas simples. Se dedicó a probar con combinaciones de círculos. Cuando se convenció de que era imposible lograrlo usó óvalos. Al fracasar nuevamente empleó elipses. Con ellas establece sus famosas tres leyes, publicadas en 1609 en su obra *Astronomia Nova*, que describen el movimiento de los planetas.

## Formulación Newtoniana de la gravitación

Ya en la poca de Newton la pequeña comunidad científica abocada a este problema sospechaba que la causa que explicara las leyes empíricas entendidas por Kepler era la existencia de una fuerza invisible ejercida por el sol sobre los planetas. Cuando el astrónomo Halley visitó en Cambridge a Newton éste le confirmó que era capaz de deducir las leyes de Kepler suponiendo la existencia de tales fuerzas invisibles. Sin embargo, no logró satisfacer la curiosidad de Halley durante esa visita, pero días más tarde Halley recibió de Newton una nota de algunas páginas en las que detallaba rigurosamente su deducción. Poco después, vio la luz del día una de las obras más impactantes en la historia de la Ciencia, *Los Principia Matematica*.

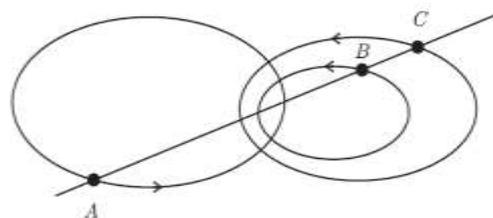
Quien formuló de manera precisa las leyes fue Isaac Newton (1642 - 1727). Newton fue capaz de relacionar estas leyes con sus propios descubrimientos, dando un sentido físico concreto a leyes empíricas. El estudio de Newton de las leyes de Kepler condujo a su formulación de la ley de la gravitación.

### El caso para $n=2$

El problema para dos cuerpos consiste en determinar el movimiento de dos partículas puntuales que sólo interactúan entre sí. Los ejemplos comunes incluyen la Luna orbitando la Tierra y en ausencia del Sol, es decir aislados, un planeta orbitando una estrella, dos estrellas que giran en torno al centro de masas, y un electrón orbitando en torno a un núcleo atómico. Este problema está resuelto.

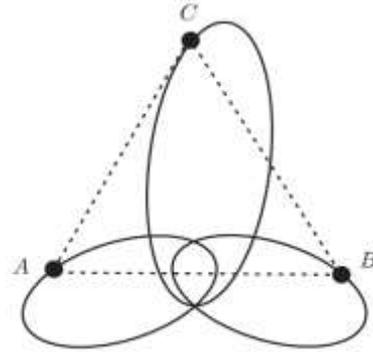
### El ejemplo de Euler

En 1764 Leonhard Euler publica un trabajo sobre el problema de los tres cuerpos. En esa época los matemáticos estaban muy interesados en el estudio de órbitas periódicas. En su trabajo, Euler demuestra que si tres partículas son colocadas inicialmente en línea recta, de tal forma que la razón de sus distancias satisfagan una fórmula que sólo depende del valor de las masas, y si además, las velocidades iniciales son escogidas adecuadamente, entonces cada partícula se moverá periódicamente sobre una elipse, pero en todo momento las tres partículas se mantendrán sobre una línea recta, conservando siempre la misma razón entre sus distancia (Pérez-Chavela, 2005).



### El ejemplo de Lagrange

Pocos años después del trabajo de Euler, en 1772, Lagrange redescubre las órbitas de Euler y encuentra una nueva familia de órbitas periódicas, obtenidas al colocar tres masas sobre los vértices de un triángulo equilátero, donde hay que escoger adecuadamente las velocidades iniciales. Cada partícula se moverá sobre una órbita elíptica; en todo momento la configuración será de triángulo equilátero, el cual podrá variar de tamaño pero nunca de forma.



### Poincaré y el premio del Rey Oscar II de Suecia

En 1884, el Rey Oscar II de Suecia y Noruega decide festejar su cumpleaños de una manera particular: promulgó una competencia matemática. La convocatoria se publicó a mediados de 1885 en dos revistas. Las bases de la competencia establecían cuatro problemas matemáticos. El primero, propuesto por Karl Weierstrass, fue el problema de  $n$  cuerpos.

En 1887 Poincaré contesta una carta previa diciendo que se presenta al concurso. Como la considera prácticamente irresoluble, trabaja sobre una restricción considerando tres cuerpos. Su trabajo, presentado en mayo de 1888, fue destacado por el jurado y decide declararle ganador. Weierstrass, como integrante del jurado afirmó que su resultado no es la solución completa del problema, sin embargo tenía una inmensa importancia en la historia de la mecánica celeste.

Durante la revisión previa a su publicación en la revista Acta el editor detectó algunas imprecisiones que Poincaré debía aclarar. El autor (con el número ya impreso) contestó que se trataba de un error grave. Su arreglo condujo a nuevos descubrimientos por parte de Poincaré que hoy se consideran los comienzos de la teoría del Caos. La versión corregida fue publicada en 1890. A modo de anécdota, el dinero del premio por ganar el concurso no alcanzó a los gastos que tuvo que abonar Poincaré por la retirada del número con la versión errónea de 1889.

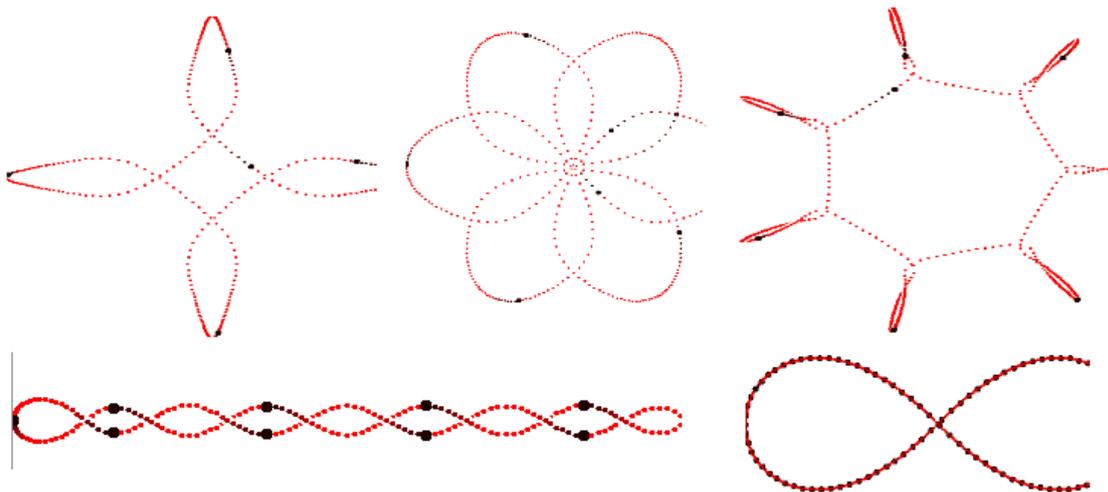
### El Método de Variación de Constantes de Lagrange

Intentando avanzar de  $n=2$  a  $n=3$ , Lagrange tuvo la idea de suponer que el movimiento de la Tierra, (que está sometido fundamentalmente a la atracción del sol, pero también

por una pequeña atracción de los demás planetas y entre estos el que más influye es Júpiter) transcurre en una elipse (como si fuese Kepleriano) pero que esta elipse se ve ligeramente deformada. Haciendo variar las constantes de la elipse, Lagrange introduce el *Método de Variación de Constantes*, método sumamente utilizado para resolver ecuaciones diferenciales en un nivel terciario y que por lo general los alumnos se limitan a aplicarlo en forma mecánica desconociendo la riqueza que hay detrás de él. A modo de reflexión, debería destacarse desde la enseñanza el origen de estas ideas. Según Callejo (1990) el conocimiento histórico de los conceptos aporta a los estudiantes una conciencia de que lo que está aprendiendo es el producto de una actividad humana que tiene su origen en problemas prácticos o visibles en el seno de esta disciplina.

### Coreografías

Han aparecido sorprendentes resultados, por parte de los matemáticos Chenciner y Montgomery en el año 2000, sobre la existencia de una solución periódica en forma de ocho para el problema de los 3-cuerpos con masas iguales. Más resultados de soluciones periódicas del problema de los  $n$  cuerpos pueden visualizarse en la siguiente página web, donde se encuentran las llamadas coreografías:



<http://www.scholarpedia.org/article/N-bodychoreographies>.

### A modo de reflexión

El trabajo realizado mostró la gran relevancia que tiene enfatizar la historia en la enseñanza de la Matemática, aspectos que no siempre tienen en cuenta los textos que se recomiendan a los estudiantes de esta asignatura para abordar temas, como por ejemplo, el método de variación de constantes para la resolución de ecuaciones diferenciales.

Además, ayudó a mostrar que aquellos procedimientos que parecen artificiales en general se originaron en los intentos de resolver situaciones concretas, aunque a veces, haya sido casualidad. El problema de los  $n$  cuerpos tiene una historia muy rica y aún continúa haciéndola. Tiene anécdotas curiosas que hicieron más amena la lectura. Y a pesar de ser un problema muy ambicioso, quien sabe si el día de mañana no se pueda obtener su solución...

### Referencias bibliográficas

- Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.
- Callejo de la Vega, M. (1990). *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Narcea.
- Collette, Jean-Paul (2010). *Historia de las matemáticas (Tomo I)*. España: Siglo XXI Editores.
- Collette, Jean-Paul (2010). *Historia de las matemáticas (Tomo II)*. España: Siglo XXI Editores.
- Diacu, F. (2002). *Classical and celestial mechanics*. Princeton.
- Perez Chavela, E. (2005). La conjetura de Saari. Una nota histórica y algo más. *Miscelanea Matemática*, 41, 1-9.
- Ortiz, A. (2005). *Historia de la Matemática*. Perú.
- Serres, M. & Stenger, I. (1991). *Historia de las ciencias*. Madrid: Cátedra.
- Scholarpedia, the peer-reviewed open-access encyclopedia. *N body Choreographies*. <http://www.scholarpedia.org/article/N-bodychoreographies> Consultado 20/8/2011