LA RE SIGNIFICACIÓN DE PROBLEMAS HISTÓRICOS DE LA MATEMÁTICA MEDIANTE UN SISTEMA DE GEOMETRÍA DINÁMICA. EL CASO DE LAS FLUXIONES EN LA FORMACIÓN DOCENTE.

Rosa Ana Ferragina – Leonardo José Lupinacci – Susana Ammann
rosaferragina_1@hotmail.com – leolupinacci@yahoo.com.ar - susyammann@hotmail.com
Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE) – Universidad Nacional de San Martín (UNSAM) Argentina

Tema: Formación y Actualización del Profesorado
Modalidad: Comunicación Breve.
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Formación docente; Historia de la Matemática; Geometría Dinámica; Fluxiones

Resumen

En los últimos años, se han percibido cambios profundos en la enseñanza de la matemática. Por lo que, el profesor de esta ciencia debe estar dispuesto a reflexionar, casi de un modo constante, sobre sus saberes y prácticas adecuándolos a los nuevos retos que se le imponen.

Esta comunicación propone abrir un espacio de reflexión para la formación docente, inicial o continua, sobre el enriquecimiento didáctico que podría tener la enseñanza de la matemática, si logramos vincularla con su historia, con el contexto en el que surgió tal o cual concepto y, que actualmente es posible su re significación mediante el empleo de un software de geometría dinámica. La resolución de un problema histórico, recuperando sus propios procedimientos, recreándolos mediante las herramientas de un software de geometría dinámica (como GeoGebra), permitiría lograr un recorrido de estudio fértil para la formación docente, tanto en relación al contenido matemático y su encuadre histórico, como a una apropiación crítica del recurso.

Realizaremos este recorrido con el Método de las Fluxiones de Newton, que plantea el problema de, conociendo las relaciones entre "fluentes" (cantidades variables) encontrar la relación entre sus "fluxiones" (velocidades de variación).

La formación del profesor de Matemática. Un trayecto de cambios y reflexiones.

La sociedad actual cambia vertiginosamente en muchos sentidos, y pareciera que necesitamos aferrarnos a la escuela de siempre. Los sociólogos dicen que la crisis se genera como consecuencia de querer sostener instituciones de la modernidad en tiempos de posmodernidad. A esta explicación diremos que posiblemente la escuela ha pasado a ser una instancia más de aprendizaje pero sin dudas, no la única como lo fue en su aparición. Ahora, está inmersa en una sociedad en la que se construyen conocimientos variados y en múltiples ámbitos, que obliga al docente a enseñar en un ambiente de cambios permanentes, por lo que no alcanza con la formación tradicional inicial; son los mismos profesores, también los de matemática, que ante la variedad de dificultades expresan no sentirse preparados para responder.

La formación docente demanda ser ampliada y también modificada en su formación de base (los profesorados). Surge un complemento indispensable, la formación continua o también llamada en servicio. Para esta última, el profesor accede de manera individual y voluntaria; siendo un aspecto crucial, debería ser una política de educación: la capacitación y acompañamiento docente. Este trabajo con el colectivo docente, exige continuidad y dinamismo para acompañar críticamente los cambios tecnológicos, reestructurando y valorizando el origen histórico de los conceptos matemáticos a enseñar, al ritmo de los vertiginosos cambios que la sociedad actual demanda.

Los párrafos anteriores describen una caracterización que es también compartida por los profesores, o futuros profesores de Matemática, que en los últimos años han percibido cambios profundos en la enseñanza de esta ciencia. Por lo tanto, este profesor debe estar dispuesto a reflexionar, casi de un modo constante, sobre sus saberes y prácticas adecuándolos a los nuevos retos que se le imponen (Crespo Crespo, 2011).

Esta comunicación propone abrir un espacio de reflexión para la formación docente, inicial y/o continua, sobre el enriquecimiento didáctico que podría tener la enseñanza de la Matemática, si logramos vincularla con su historia, con el contexto en el que surgió tal o cual concepto y su posible re significación mediante el empleo de un software de geometría dinámica.

La Matemática y su historia como construcciones culturales. La integración de un software de geometría dinámica.

Esta propuesta se orienta en la construcción de conocimiento pertinente (la historia de la matemática y sus problemas) que recupere y concilie los marcos teóricos y las experiencias en el aula a través de desarrollos didácticos, tomando en cuenta que la formación de un profesor se sustenta en multiplicidad de dimensiones: una sólida base de conocimiento científico, conocimientos de pedagogía, conocimientos de didáctica del área dando cuenta de la especificidad del conocimiento matemático y de sus prácticas de enseñanza, además de incluir el análisis del contexto social en que está inmersa la escolarización que es el escenario de las futuras prácticas profesionales.

Exponer y desarrollar la historia de la Matemática, exige un planteo acerca de los acontecimientos que rodearon un descubrimiento y hacer referencia a las personalidades o personajes que intervinieron en los mismos. También es necesario que se tenga como eje formador la presentación de la naturaleza de los problemas científicos de esa época para mostrar el modo en que estos problemas aparecen conectados con las necesidades y exigencias de las personas y las sociedades, insertos en la cultura del momento (Sierra, 1997; Bishop, 2000; González Urbaneja, 1991).

Desde esta mirada, planificar la tarea de enseñar Matemática, atravesando el conocimiento por su historia, se convierte en una responsabilidad, entendiendo a la historia de la Matemática no como una asignatura independiente, sino como parte de un entramado en la enseñanza de los diferentes objetos matemáticos. Al respecto, Modesto Sierra propone:

> "Hay que señalar que en la educación secundaria el uso de la historia de las matemáticas debe estar subordinado a su enseñanza, esto es, no puede tener un fin en sí mismo, ni por supuesto ser materia de examen. Cumpliendo estas condiciones la historia de las matemáticas puede ayudar a restituir a las matemáticas su dimensión cultural a menudo olvidada en su presentación escolar". (Sierra, 1997, p 183).

Entonces, el estudio de la Historia de la Matemática es un elemento importante tanto en la formación docente, como en su autoformación permanente. La enseñanza no es sólo un estudio o una profesión, puede ser también un arte, y es indudable que el conocimiento de la historia de esta ciencia con sus grandezas y miserias, con sus momentos estelares y sus épocas oscuras, influirá decisivamente en el espíritu del profesor y en su actitud hacia la propia Matemática (Malet, 1983).

Parece oportuno destacar que, en la formación del profesor, esta multiplicidad de sentidos e integración de la historia de la Matemática se podría potenciar con el empleo de algún software de geometría dinámica, puesto que, adquirir conocimientos profesionales en el ámbito de estas tecnologías requiere tanto profundizar en el conocimiento propio de la Matemática, como en el análisis de los resultados de su implementación en la enseñanza. Cobra importancia entonces, aportar experiencias y espacios de reflexión en torno a la tecnología informática tanto para los docentes a cargo de la formación como para los estudiantes, futuros profesores:

> "Se acepta que en el proceso de aprender la disciplina, los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar donde constantemente busquen y examinen diferentes tipos de relaciones, planteen conjeturas, utilicen distintos sistemas de representación, establezcan conexiones, empleen varios argumentos y comuniquen sus resultados. Además, el desarrollo de herramientas

> tecnológicas está influyendo notablemente la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas.” (Santos Trigo, 2003, p 196)

Es por ese motivo que se debería contextualizar la formación del futuro profesor mediante la utilización de un recurso en praticular, como es el software de geometría dinámica y, de este modo, iniciar un recorrido de transformación y reformulación de los contenidos matemáticos que se desarrollarán en el transcurso de su carrera y que luego, en su mayoría, pasarán a ser parte en su labor profesional como contenidos a enseñar.

Los problemas históricos. El caso de las fluxiones.

Buceando en la historia de la Matemática, es posible encontrar algunos problemas que encierran el germen de una teoría general. En estos casos, el ejemplo de problema seleccionado se convierte en un mero detalle, posibilitando trabajar con un campo de problemas que a lo largo de la historia de la Matemática se fueron plasmando como conceptualizaciones matemáticas de una manera más formal. Por otro lado, es importante destacar que a estos problemas “lo resignifica” cada persona en un contexto socio-cultural actual, en el cual las TIC van teniendo cada vez mayor presencia. Este proceso podría dejar, en líneas generales, la presentación deductiva de los saberes como la última etapa del trabajo matemático. Puesto que, una presentación formal de los saberes matemáticos estaría dejando fuera, el trabajo de interacción entre lo particular y lo general, que según nuestra perspectiva, habilitaría generar sentido a los conocimientos que se ponen en juego.

El recorte para esta propuesta, está centrado en el análisis y la reconstrucción de procedimientos matemáticos históricos a partir de las potencialidades que ofrecen los sistemas dinámicos, GeoGebra en particular. Este software, además de permitir la construcción geométrica y la manipulación de los objetos ya construidos, incluye herramientas de cálculo algebraico (Computer Algebra System o CAS) en conexión directa con el trabajo geométrico, generando una conexión dinámica de múltiples representaciones. A modo de ejemplo, se ha seleccionado el método de fluxiones de Newton, puesto que puede resultar fecundo reproducirlo y probarlo en los mismos términos en que fue pensado (su potencialidad en relación al contenido matemático) pero, recreado a partir de la integración de herramientas informáticas puede fortalecer su relación con el encuadre histórico.

El método de fluxiones de Newton, presentado en el texto “Methodus Fluxiorum et Serierum Infinitorum”, escrito en1671, plantea el siguiente problema: conociendo las relaciones entre “fluentes” (cantidades variables) encontrar la relación entre sus “fluxiones” (velocidades de variación) y, recíprocamente (Boyer, 1994). Las cantidades matemáticas variables llamadas fluentes, eran consideradas por Newton como aumentadas gradual e infinitamente, utilizando para ellas como notación las últimas letras del alfabeto (x, y,…), siendo las fluxiones las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce, siendo designadas con la notación $\dot{x}, \dot{y}$ ... (Collette; 1985).

En primer término, representar una relación entre fluentes si la consideramos como una relación variable, como fue concebida por Newton, obtendríamos una curva descripta por un punto en movimiento. Es posible realizar esto en GeoGebra, a partir de la construcción de un punto dinámico que represente a esta relación. Un punto dinámico es aquel cuyas coordenadas se corresponden con valores variables, por lo que al modificarlos, el punto en cuestión varía su posición. Luego, con la herramienta **Activa Rastro**, la trayectoria del punto dinámico permite obtener la representación gráfica de las variables puestas en juego. Sin perder el sentido de generalidad de este método, se analizará el caso de la relación entre fluentes dada por $y = x^3$:

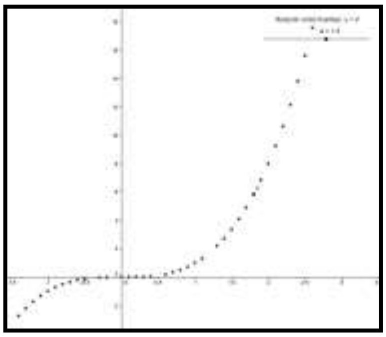

Figura 1: Relación entre fluentes y = x^3 construida a partir de un punto dinámico

Una vez determinada la relación entre fluentes, se puede proceder a determinar la relación entre fluxiones o velocidades de cambio de estas fluentes. Para ello, Newton define el «momento de una fluente» que denota con ***o***, siendo la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, por lo que la velocidad $\dot{x}$ por una cantidad infinitamente pequeña ***o*** ($o\dot{x}$), representa el momento de una cantidad *x* (Collette; 1985). Entonces, dada la relación entre fluentes *y = f(x)* es posible hallar la relación entre las fluentes, porque en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño ***o***, *x* se incrementa a «$x + o\dot{x}$», e *y* se incrementa a «$o\dot{x}$y + $o\dot{y}$», obteniéndose $y + o\dot{y} = f\,(x + o\dot{x})$, que es posible expresarla como $\dot{y} = \frac{f(x+o\dot{x})-f(x)}{o}$.

Para nuestro ejemplo de fluentes seleccionada, $\dot{y} = \frac{(x+o\dot{x})^3 - x^3}{o}$, al desarrollar algebraicamente:

$$\dot{y} = \frac{(x + o\dot{x})^3 - x^3}{o} = \frac{3x^2\dot{x}o - 3x\dot{x}^2o^2 + o^3}{o} = 3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2 o + o^2$$

Como ***o*** es infinitamente pequeño, pueden despreciarse los términos que lo contienen, obteniendo $\dot{y} = 3x^2\dot{x}$, que es una relación entre las fluxiones.

Este desarrollo, se puede recrear mediante el software GeoGebra, porque es posible representar el intervalo ***o*** de tiempo *x*, que determinará los incrementos, utilizando la herramienta **Deslizador**, estableciendo a este incremento como un valor variable. Marcando un punto **A** sobre la curva y sus proyecciones ortogonales, se construye luego otro punto sobre la curva (punto **E** en la figura 2), para determinar que la diferencia entre los valores de las abscisas de **E** y **A**, sea el incremento ***o***, puede modificarse en tiempo real debido al dinamismo que ofrece el software.

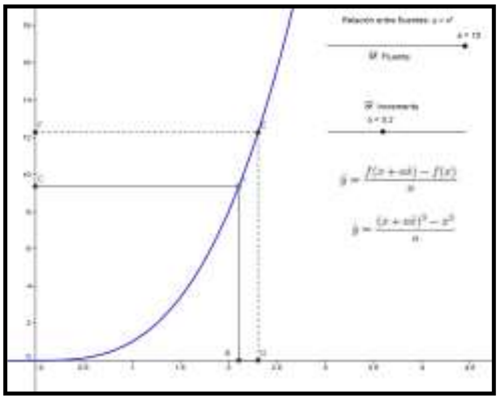

Figura 2: Construcción del incremento ***o***

Ahora, para representar la relación entre las fluxiones para los distintos valores de *x*, se hace necesario definir un punto dinámico, Q, que tendrá estas coordenadas Q = (x(A), ((x(A)+***o***)3-x(A)3)/***o***), siendo A el punto sobre la curva y su coordenada *x* el valor particular del que se puede calcular la relación entre fluxiones. Al desplazar el punto A sobre la curva y se activa el rastro de Q se visualiza una relación entre fluxiones, para un determinado valor de ***o***. Pero, para cada uno de los distintos valores del incremento ***o***, las curvas obtenidas como relación entre fluxiones serán diferentes. En la Figura 3 pueden evidenciarse diversas curvas obtenidas con distintos valores de ***o***, que se corresponden con distintas curvas de aproximación a la relación entre fluxiones.

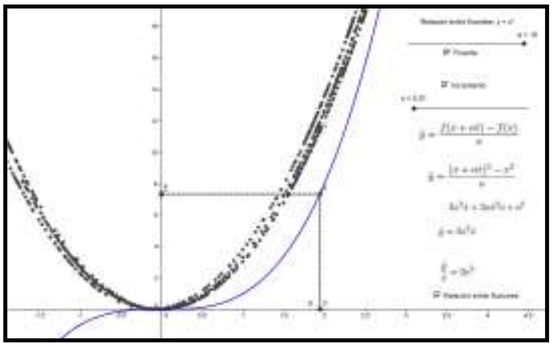

Figura 3: Curvas de aproximación a la relación entre fluentes.

Mediante la variación del intervalo ***o***, haciéndolo cada vez más pequeño es posible obtener la relación buscada entre las fluxiones. La Figura 4 muestra cómo haciendo tender dicho intervalo a cero[1], la curva obtenida coincide con la función $3x^2$, que se corresponde con la relación de fluxiones encontrada de forma analítica anteriormente.

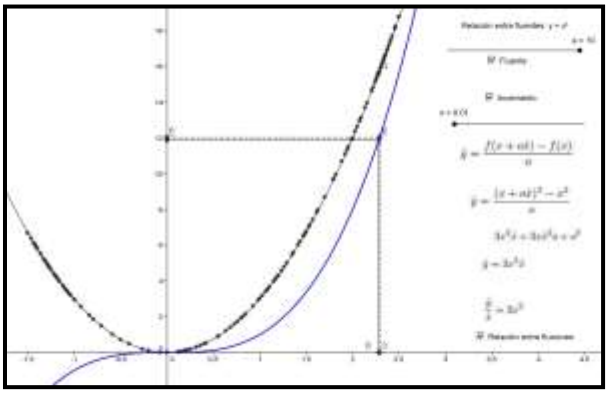

Figura 4: Función $3x^2$ como relación entre fluxiones.

Lo analizado en este apartado, dejaría en evidencia que es necesario realizar un control efectivo del manejo de un software matemático, Geogebra en este caso, como un complemento necesario del aprendizaje matemático: el método de las fluxiones. En repetidas ocasiones, no se está alerta respecto de estas cuestiones y los procesos que puede desplegar un software no son similares a los que puestos en juego con entornos tradicionales. Por ejemplo, la visualización de rastros, la creación de deslizadores como variables, la construcción de puntos dinámicos, etc. Entonces, cuando se piensa en integrar un software dentro de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, esto implica la reflexión sobre cómo organizar estos aprendizajes para explotarlos mejor. Deberíamos descartar la visión ingenua de pensar que GeoGebra realizará el trabajo matemático, puesto que nosotros somos capaces de indicarle cómo realizar ese trabajo. (Artigue, 1996)

[1] Cabe aclarar que el software presenta una limitación en este caso, ya que el mínimo valor de incrementos con que puede trabajarse es de 0,01.

Una reflexión final

De un modo general, se ha reflexionado sobre la revalorización de la Historia de la Matemática, tanto en la enseñanza como en el aprendizaje, para el ámbito de la formación de profesores, puesto que posibilita: un encuadre de producción matemática significativa al ser implementada en problemas históricos, como un proceso previo a una formalización algebraica y, la efectividad de una herramienta tecnológica para la construcción de conocimiento matemático.

De un modo específico, se ha propuesto, para la formación inicial o continua de profesores, el trabajo sobre problemas que hicieron historia y que pueden evolucionar hacia un campo de problemas, tanto por su potencialidad en la exploración como por la elaboración de conjeturas y modelos, en una integración con entornos de geometría dinámica y con las prácticas de enseñanza en las aulas.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1996). Por una visión didáctica sobre la utilización de los instrumentos del cálculo formal en la enseñanza de las matemáticas. En: Barbin, E & Douady, R. (coord.) *Enseñanza de las Matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica.* París: Topiques éditions.

Bishop, A. (2000). Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a todos los alumnos En *Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, p.p. 35-54. Barcelona: Graó.

Boyer, C. (1994). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Universidad Textos.

Collette, J. P. (1986). *Historia de las matemáticas II.* México. Siglo XXI editores

Crespo Crespo, C. (2011). El profesor de matemática y su formación. Un camino continuo en busca de respuestas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 28(1), 11-20.

González Urbaneja, P. (1991). Historia de la Matemática: Integración Cultural de las Matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 9 (3), 281-289.

Malet, A. (1983): Història de les matemàtiques: cultura y didáctica. *Papers de Batxillerat*, (3), 74- 77.

Santos Trigo, L. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. *Boletín de Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, Nº 2.

Sierra, M. (1997), Notas de Historia de las Matemáticas para el Currículo de Secundaria. En: Rico, L., *La Educación Matemática en la Escuela Secundaria*, Barcelona, Editorial Horsori.