

## **ESTUDIO DE LOS ESQUEMAS CONCEPTUALES ASOCIADOS A LAS EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS DEFINICIONES DE RAZÓN Y PROPORCIÓN**

**María Colina y Carmen Valdivé**

Unidad Educativa "Carbonero", Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado  
mariucolina@hotmail.com, carmenv@ucla.edu.ve  
Pensamiento Matemático Avanzado. Educación Universitaria

### **RESUMEN**

*El reporte que se presenta muestra los avances de una investigación donde uno de los propósitos a abordar es estudiar la evolución histórica de los conceptos de razón y proporción desde los distintos contextos matemáticos a través de un análisis histórico-epistemológico de tales objetos en los diferentes períodos de la historia. Se fundamenta en una teoría cognitiva que busca describir la naturaleza del conocimiento matemático denominada Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) la cual ha sido desarrollada por Tall y colaboradores (1981, 2001, 2013). Dentro de la teoría de PMA nos interesan particularmente, como herramientas de investigación, los esquemas conceptuales en su acepción epistemológica previos y propios, según sea el caso, de acuerdo a la evolución histórica de los conceptos matemáticos en cuestión; estos fueron un aporte a la teoría PMA por parte de Valdivé y Garbin (2008) y servirán como pilar fundamental en el estudio. Metodológicamente la investigación, se enmarca bajo el enfoque cualitativo, siendo de carácter interpretativo y de tipo descriptiva, documental y exploratoria. La recolección de información se realizó través del análisis de libros de texto históricos (Boyer, 2003; Edwards, 1979, y Cantoral y Farfán, 2004) en el cual se determinaron seis momentos históricos que se sintetizaron en seis esquemas conceptuales (uno previo y cinco propios): la razón asociada a un número entero, a magnitudes geométricas y aritméticas, a relaciones distancia-tiempo, a cantidades que se aproximan a cero, a la definición de derivada y a un número real. Para cada esquema se presenta la descripción y caracterización, considerándose para ello las ideas, representaciones, contextos, procedimientos, conceptos asociados y métodos utilizados por los matemáticos representativos de cada componente temático.*

**Palabras clave:** Razón y Proporción, Pensamiento Matemático Avanzado, Esquema Conceptual Epistemológico.

### **NACE UNA IDEA**

Desde la antigüedad diferentes personajes intelectuales han dirigido su interés al estudio de los objetos matemáticos que en la actualidad conocemos y utilizamos en nuestra labor docente, en este caso nuestra atención se centrará en los conceptos de razón y proporción. Su aparición en los libros se remonta a la edad Antigua en el libro V de los Elementos de Euclides, del cual Oller y Gairín (2013) indican:

La importancia de los Elementos como fuente histórica en cualquier aspecto de la matemática, incluida la proporcionalidad, es indudable. Sin embargo, ha de tenerse muy en cuenta que este texto nos muestra la teoría ya terminada sin pistas sobre el cómo ni mucho menos el por qué. Es decir, aunque los elementos resultan de gran utilidad a la hora de conocer el conocimiento teórico que se poseía en la época respecto a los

***Estudio de los esquemas conceptuales asociados a las evolución histórica de las definiciones de razón y proporción***

*María Colina y Carmen Valdivé*

conceptos estudiados, no nos proporcionan información alguna sobre los problemas concretos que pudieron dar lugar a dicha teoría (p.321).

Estos autores (ob. Cit.) señalan que el razonamiento proporcional es una herramienta que se utilizaba desde tiempos muy remotos. De hecho, Acosta, Rondero y Tarasenko (2010) explican que en culturas como la babilónica, la china y la egipcia se manejaba en actividades como el cobro de impuestos (p. 535-536). Sin embargo, los conceptos de razón y proporción no aparecen en el currículo de las distintas universidades que se encuentran en Venezuela, encontrándose de forma implícita en muchos de los contenidos de matemática que son abordados en el subsistema de educación universitaria, como lo es, por ejemplo, el concepto de derivada como un límite de cociente incremental, que es una pieza de gran importancia que forma parte de la base fundamental del estudio del Cálculo Diferencial. Más aún, Pérez (2006) expone que tampoco se encuentran en el currículo del subsistema de educación básica manifestando lo siguiente:

En el currículo escolar actual de la Segunda Etapa de Educación Básica, existen diversos contenidos matemáticos de gran importancia que no tienen prosecución en la organización de los contenidos de los grados sucesivos de la Tercera Etapa de Educación Básica. Uno de estos contenidos fundamentales es el de la proporcionalidad, abordado en los grados 5° y 6° de la Segunda Etapa, pero que no se encuentra presente en forma explícita en los contenidos del 7° y 8° Grados de la Tercera Etapa de Educación Básica (p.04)

De forma similar; Salazar y Díaz (2009) explican en su trabajo de investigación que “en una mirada histórico-epistemológica, las magnitudes, de gran importancia en los tiempos de Euclides, hoy prácticamente han desaparecido de la enseñanza” (p.209). De lo anterior, se evidencia que no se le da la importancia que cómo objetos matemáticos tienen, estando ausentes en el sistema educativo de nuestro país y en otras latitudes, a pesar de ser usado desde la antigüedad. De esta manera, el concepto de proporcionalidad es básico en la enseñanza de la matemática y por esta razón resulta de gran importancia realizar un análisis histórico epistemológico, dado que la producción de dicho análisis permitirá rescatar la complejidad y ampliar la concepción cognitiva de los conceptos en estudio en las personas. Además, proporcionará herramientas didácticas para mejorar el proceso de enseñanza de los mismos dentro del aula (Bergé y Sessa; 2003), así como también, destacar la noción y evolución de estos conceptos a través de la historia por los distintos matemáticos de cada época y la importancia dentro del campo de la matemática en sus diferentes ramas. En virtud del análisis de las lecturas y de las reflexiones de las mismas se plantea la siguiente interrogante: ¿Cuáles son los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de los conceptos de razón y proporción? Así, el propósito central de la investigación que se presenta en este manuscrito es estudiar la evolución histórica epistemológica de los conceptos de razón y proporción

## **MARCO REFERENCIAL**

### **Pensamiento Matemático Avanzado (PMA)**

El estudio que se desarrolla está enmarcado en el llamado Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), la cual es una aproximación teórica cognitiva que ha sido desarrollada según Valdivé y Garbin (2008) por Tall (1991, 1992a, 1992b, 1995, 2001, 2004, 2005) y Dreyfus (1990, 1991). Sánchez (2010) se refiere a esta teoría explicando que “el PMA es una teoría cognitiva que busca describir la naturaleza del conocimiento matemático, así como también, los procesos cognitivos que emplea el estudiante para el aprendizaje de algún conocimiento matemático” (p.05). Dentro de la teoría de PMA nos interesan particularmente los esquemas conceptuales, como herramientas de investigación, los cuales constituirán la base fundamental de la investigación que se presenta.

### **Esquema Conceptual Epistemológico**

Un esquema conceptual es la idea que tiene en su mente una persona sobre un concepto u objeto matemático. De acuerdo con Valdivé y Garbin (2008) el esquema conceptual en su carácter epistemológico, se refiere a la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y métodos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un cierto contexto. Según las autoras (ob. Cit.), estos demandan labores, circunstancias y problemas que los hacen emerger, las cuales se deben categorizar en el esquema conceptual de acuerdo a los siguientes aspectos:

- Las ideas que el sujeto asocia al concepto.
- Las representaciones asociadas que hacen emerger la noción y representaciones propias de la noción. Ambas son imágenes (dibujos, gráficas, palabras, gestos, símbolos) que el sujeto percibe del objeto o concepto y que evoca ante una situación problema o tarea.
- Los procedimientos (algorítmicos, aritméticos, algebraicos, geométricos, manipulaciones simbólicas) que el sujeto activa ante la tarea cognitiva.
- Las ideas más representativas asociadas al objeto matemático.
- El contexto (geométrico, analítico, algebraico, aritmético o físico) que el sujeto asocia ante la situación.
- Los métodos (matemáticos) que el sujeto implementa para resolver el problema.

Además, Chin y Tall (citado por Valdivé y Garbin; 2008) explican que en las investigaciones actuales, se observa que se establece una diferencia entre el esquema conceptual previo, met-before y un esquema conceptual. El met-before se considera asociado a los conocimientos o experiencia previa y que es evocada para darle sentido a una situación.

### **Referentes Empíricos**

Los trabajos que se presentan a continuación hacen referencia a algunos estudios realizados desde el punto de vista histórico-epistemológico:

- Valdivé (2008) desarrolló un trabajo donde estudian los esquemas conceptuales asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal en estudiantes de Análisis Matemático de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado" (UCLA), donde presenta un recorrido histórico del concepto del infinitesimal desde la edad antigua hasta la actualidad, en el que expone los obstáculos epistemológicos que se produjeron durante la evolución histórica del concepto en cuestión encontrando como hallazgo siete esquemas conceptuales, los cuales se caracterizaron de acuerdo a las ideas, representaciones, procedimientos y métodos, asociados a la noción de infinitesimal.
- Sánchez y Valdivé (2012) realizaron un estudio histórico-didáctico del número irracional donde construyeron una aproximación a la evolución histórica del concepto de número irracional mostrando los aportes de importantes matemáticos de distintas épocas que promovieron el estudio de este objeto matemático. Tal aproximación se realiza desde el descubrimiento de los segmentos inconmensurables, hasta la existencia del reconocimiento del número irracional en el siglo XIX por matemáticos como Dedekind, Cantor y Weierstrass, quienes intentaban aritmetizar el análisis en esa época.
- Oller y Gairín (2013) trabajan la génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización realizando una revisión histórica de algunos de los conceptos principales que atañen a la proporcionalidad aritmética. Primeramente, analizan los incipientes intentos de fundamentación teórica de la teoría de proporcionalidad, en particular, de los conceptos en estudio sustentándose en los Elementos de Euclides y los Nueve Capítulos sobre los Procedimientos Matemáticos. Posteriormente, presentan el proceso de aritmetización del concepto de razón desde la Edad Media. Así, la investigación concluye con algunas reflexiones en cuanto a la enseñanza de la proporcionalidad aritmética.
- Hernández y Valdivé (2015) realizan una investigación de carácter humanístico-interpretativo concerniente al estudio de los esquemas conceptuales a la definición de número real, en ella se realiza una reconstrucción histórica que cimienta la autora en torno al objeto matemático, desde la Edad de Piedra hasta la formalización de la noción de número real en el siglo XIX, donde se determinaron ocho perspectivas históricas que sirvieron para categorizar y determinar los esquemas conceptuales utilizando una metodología similar a la de Valdivé (2008).

### **RUTA DE INVESTIGACIÓN**

La investigación se enmarca bajo el enfoque cualitativo, dado que se orienta al conocimiento de un objeto matemático desde la subjetividad. De carácter interpretativo, dado que se estudian a los actores, respetando sus actuaciones, puntos de vistas para poder encontrar

elementos que permitan determinar las dificultades que se presentan en una situación matemática (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). De tipo descriptivo y documental, puesto que se realiza un estudio epistemológico de la naturaleza de los conceptos de razón y proporción que permite detallar la evolución histórica de tales objetos matemáticos, apoyados por trabajos previos, informaciones y documentos divulgados por medios impresos o electrónicos (Manual de Trabajo de Grado de especialización y Maestría y tesis doctoral, UPEL 2011; p.12). Además, es de tipo exploratoria ya que el objeto en cuestión, en este caso, los conceptos de razón y proporción, ha sido poco estudiado.

Se consideran como actores sociales los libros de texto históricos, los cuales han llegado a ser considerados instrumentos cuasi-observables que en cierto modo reemplazan al observador y al entrevistador en situaciones inaccesibles (Woods, citado por Valdivé). Utilizándose como fuentes secundarias en la investigación: Boyer (2003), Edwards (1979) y Cantoral y Farfán (2004) para realizar la reconstrucción histórica provisoria de los conceptos en estudio. Para obtener la información se inicia con una recolección, lectura y análisis de información desde diferentes fuentes bibliográficas y actores sociales, para generar de ellos tal como lo propone Valdivé (2008, p.70) una teoría que puntualice en la evolución a lo largo de la historia de los conceptos de razón y proporción.

### **Metodologías Específicas de Análisis**

La metodología de recolección y análisis de la información se desarrolla a través de cuatro actividades, acordes con el método inductivo, siguiendo lo propuesto por Rodríguez, Gil y García (1999) y en concordancia a la metodología propuesta por Valdivé y Garbin (2008).

### **Actividades de Análisis**

#### *Fragmentación de la información*

Se redujo la información haciendo una reconstrucción histórica provisoria de los conceptos de razón y proporción, considerándose seis períodos históricos, separando la información en segmentos relevantes y significativos que diferenciarán y permitieran separar en unidades de análisis la misma, como lo propone Valdivé y Garbin (2008). Para tal fin, se siguieron criterios temporales, donde se fraccionó la información por siglos y épocas desde la Edad de Piedra hasta el siglo XIX cuando se define el número real como cortadura de Dedekind; y temáticos en el cual se distinguieron las situaciones, las actividades, los procedimientos, los métodos, los conceptos asociados, las ideas sobresalientes que algunos matemáticos más representativos de cada época o siglos utilizaron y desarrollaron. El estudio histórico en esta primera tarea de análisis, se separó en seis épocas históricas: La Edad de Piedra hasta mediados del siglo V a.C: Nacen las ideas de razón y proporción, mediados del siglo V a.C: Estudio de la comparación de magnitudes geométricas y aritméticas, siglo XIV hasta el siglo XV: Hacia la búsqueda de la relación entre la distancia y el tiempo, finales del siglo XVII e inicios del siglo XVIII: surgen cantidades que se aproximan a cero, el siglo XVIII e inicios del

**Estudio de los esquemas conceptuales asociados a las evolución histórica de las definiciones de razón y proporción**

María Colina y Carmen Valdivé

siglo XIX: Aparece la noción de derivada como límite de un cociente incremental, siglo XIX: Construcción de los números reales como cortaduras de Dedekind.

*Identificación y clasificación de las unidades de análisis.*

“Se examinó cada unidad de análisis para identificar en ellas, componentes temáticos que permitan clasificarlas en una u otra categoría” (ob. Cit.). Dichos componentes se determinaron mediante la categorización, considerando el significado que le daban los matemáticos a los conceptos de razón y proporción desde las distintas ramas de la matemática.

*Disposición y Organización de la Información.*

Para el análisis epistemológico Valdivé y Garbin (2008) establecen que se disponen y transforman las unidades de análisis en un conjunto organizado de información, presentándolos en forma de matriz (Tabla I), utilizando las redes sistémicas como sistemas de representación, las cuales se modifican según la dinámica de análisis. Asimismo, a partir de estas se extraen seis esquemas conceptuales epistemológicos, uno de ellos *met-before* (p.426), a estos los denotaremos como  $(ECE_n)$  y  $(ECME_n)$  respectivamente (donde n indicará el número de esquema conceptual epistemológico). Las redes se estructuran según estas autoras (ob. Cit.) de la siguiente manera:

... en forma de árbol con ramas que se subdividen en “clases” (se usa como formalismo la barra (|), que son categorías que se excluyen entre ellas), y en “aspectos” (se usa la llave ({} para indicar que son categorías no excluyentes). Con la llave ({} se indica que la nueva categoría incluye las anteriores. Al final de cada rama aparece el nombre del matemático representativo de cada categoría y/o subcategoría (p.423).

Tabla I. *Esquemas conceptuales Epistemológicos por período histórico*

PERÍODO HISTÓRICO	ECE
Desde la Edad de Piedra hasta mediados del siglo V a.C	$(ECME_1)$ : La razón asociada a un número entero
Edad Antigua (mediados del siglo V a.C)	$(ECE_1)$ : La razón asociada a magnitudes geométricas y aritmética
Edad Media (Siglo XIV hasta el siglo XV)	$(ECE_2)$ : La razón asociada a relaciones distancia- tiempo
Edad Moderna (Finales del siglo XVII e inicios del siglo XVIII)	$(ECE_3)$ : La razón asociada a cantidades que se aproximan a cero
El siglo XVIII e inicios del siglo XIX	$(ECE_4)$ : La razón asociada a la definición de derivada
Edad Contemporánea (Siglo XIX)	$(ECE_5)$ : La razón asociada a un número real

**HALLAZGOS**

Se muestra en este apartado una parte del análisis epistemológico realizado de acuerdo a cada período y a los criterios temáticos considerados, se presenta la descripción y análisis de dos de los seis esquemas conceptuales encontrados en la reconstrucción histórica. Los mismos se representarán haciendo uso de las redes sistémicas, como se mencionó

anteriormente. Al cabo de cada una, se expone para cada esquema conceptual epistemológico su descripción y su caracterización.

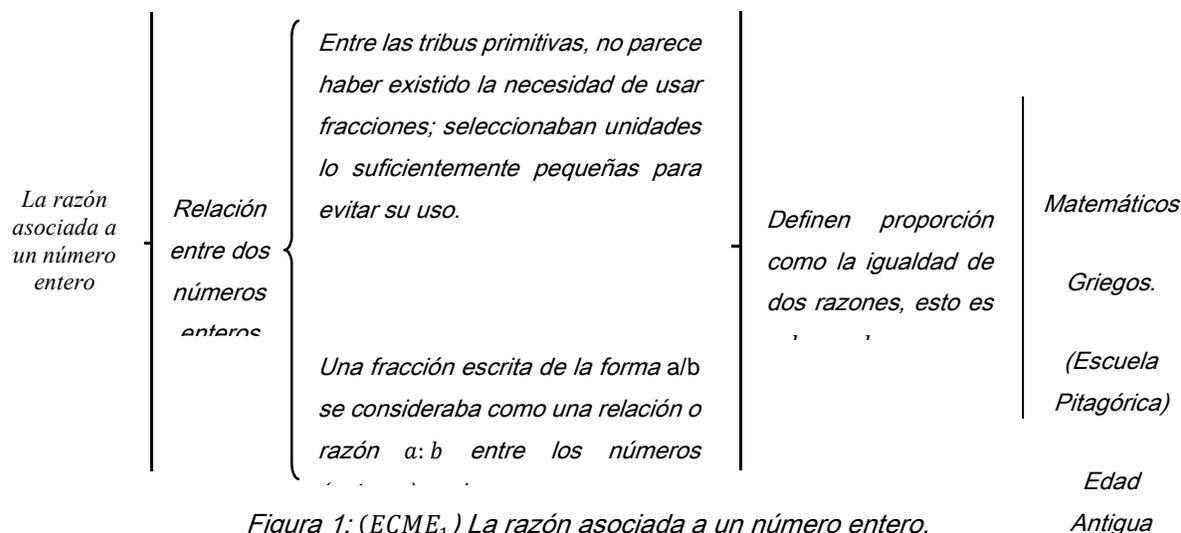


Figura 1: (ECME<sub>1</sub>) La razón asociada a un número entero.

### Descripción del ECME<sub>1</sub>

Los matemáticos griegos de la escuela pitagórica durante la Edad Antigua definieron proporción como la igualdad de dos razones, es decir,  $a:b = c:d$  (que se lee “a” es a “b” como “c” es a “d”) si  $a$  es la misma parte (o partes) o múltiplo de  $b$  como  $c$  es de  $d$ . Además, consideraban que una fracción escrita mediante la expresión  $a/b$  es una relación o razón  $a:b$  entre los números (enteros y positivos)  $a$  y  $b$ . Esto permitió el reconocimiento formal de la razón asociada a un número entero.

### Caracterización del ECME<sub>1</sub>

*Ideas:* Todo es número (números enteros y positivos).

*Representación asociada al concepto que lo hacen emerger:* La fracción  $a/b$  como una relación entre los números  $a$  y  $b$ , la proporción escrita de la forma  $a:b = c:d$ .

*Contexto:* Aritmético.

*Procedimientos:* Aritmético: Encontrar la relación entre dos números enteros positivos.

*Conceptos asociados:* Teoría de números Pitagórica.

*Métodos:* Principios de la aritmética.

*Matemáticos Representativos:* Escuela pitagórica.

*Momento Histórico:* desde la Edad de Piedra hasta mediados del siglo V a.C.

**Estudio de los esquemas conceptuales asociados a las evolución histórica de las definiciones de razón y proporción**

María Colina y Carmen Valdivé

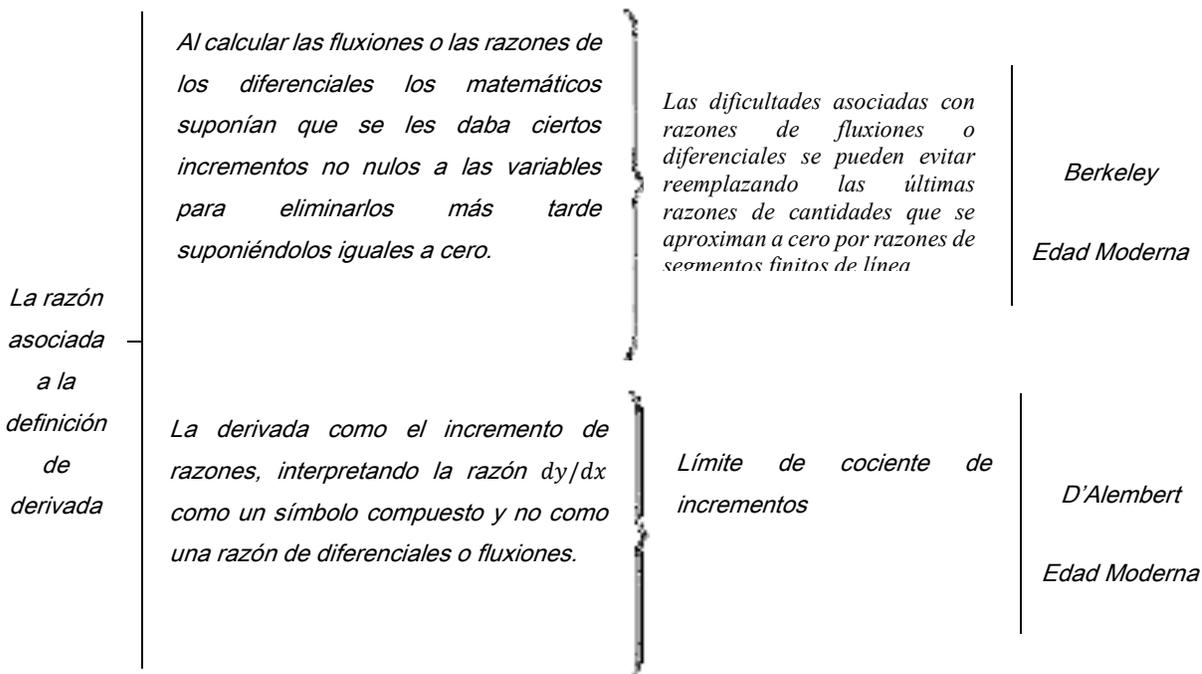


Figura 2: (ECE<sub>4</sub>) La razón asociada a la definición de derivada

**Descripción del ECE<sub>4</sub>**

El matemático Berkeley explica que para calcular las razones de diferenciales los matemáticos de la época debían suponer incrementos distintos de cero a las variables que posteriormente asumían nulos para eliminarlos. Para darle solución a esto afirmó que era posible prescindir de las dificultades asociadas con razones de fluxiones o diferenciales sustituyendo las últimas razones de las cantidades que se aproximan a cero, por razones de segmentos finitos de línea. Por su parte, D' Alembert al realizar el estudio del límite de cociente de incrementos propone una definición de la derivada como el incremento de razones e interpreta la razón  $dy/dx$  como un símbolo compuesto y no como una razón de diferenciales o fluxiones. De esta manera, este esquema conceptual está relacionado al estudio geométrico de segmentos que le dan sentido a la noción y a la derivada como un límite de cociente incremental.

**Caracterización del ECE<sub>4</sub>**

*Ideas:* reemplazar las últimas razones por segmentos finitos de línea.

*Representación asociada a la noción:* La derivada como límite de un cociente de incremento.

*Representación asociada al concepto que lo hacen emerger:* Razón de segmentos finitos, símbolo  $\frac{dx}{dy}$ .

*Contexto:* Geométrico, algebraico y analítico.

*Procedimientos:* Geométrico: Cálculo de razones de segmentos finitos. Algebraico: Representación de la derivada como límite de un cociente.

*Conceptos asociados:* Límite, aproximaciones, segmentos de línea, incremento, derivada.

*Métodos:* Método de fluxiones, las primeras y las últimas razones, Algebrizar el cálculo.

*Matemáticos Representativos:* Berkeley y D' Alembert.

*Momento Histórico:* El siglo XVIII e inicios del siglo XIX.

## **HALLAZGOS FINALES Y REFLEXIONES**

La aproximación histórica de los conceptos de razón y proporción llevada a cabo desde el comienzo del estudio nos permitió vislumbrar diferentes perspectivas de tales objetos matemáticos a través de cada época de acuerdo al o a los matemáticos representativos de la misma, según el punto de vista que cada uno tuviese. Estas perspectivas posibilitaron separar la información en segmentos significativos, que posteriormente, se clasificarían y organizarían para finalmente obtener la representación de seis esquemas conceptuales epistemológicos mediante redes sistémicas siguiendo la método sugerido por Valdivé y Garbin (2008), a los cuales se les asociaría una descripción y caracterización que los explicase de acuerdo a la fragmentación realizada. Estos esquemas explican la manera en que los conceptos de razón y proporción evolucionaron a través de la historia desde los distintos contextos matemáticos, como, el aritmético, el geométrico, el algebraico, el físico, el analítico y el topológico hasta llegar a la definición actual de los conceptos en estudio. Encontramos que desde la Edad Piedra se utilizaban cantidades lo más pequeñas posibles a fin de evitar el uso de fracciones, pero los Pitagóricos introducen la notación de fracción y definen la razón como una relación entre dos números enteros (y positivos), además definen a una proporción como la igualdad de dos razones, cuya definición se mantiene vigente hasta nuestros días. Al arribar a la Edad Antigua, en el siglo V a.C, se asocia la razón a magnitudes geométricas y aritméticas de acuerdo al estudio de diversos matemáticos de la época y sustentándose en la geometría analítica como pilar fundamental de la matemática, acá Eudoxo de Cnido logra acercarse a la definición de proporción conocida en la actualidad. Posteriormente, se produce un salto epistemológico y al alcanzar la Edad Media, a los objetos de investigación se les relaciona al concepto de velocidad en el movimiento uniforme. Sin embargo, durante la edad moderna y hasta inicios del siglo XIX, cambia drásticamente esta idea y se obtiene una estrecha relación de la razón asociada al concepto de derivada, donde se representa a la razón como un límite de cociente incremental, pasando previamente por el trabajo de Barrow, Fermat, Newton y Leibniz con las cantidades que se aproximan a cero y el método de las fluxiones. Finalmente, al encontrarnos en el siglo XIX, se observa como los conceptos investigados contribuyen a demostrar una importante propiedad de los números reales, como lo es la completitud de ese conjunto, mediante la definición de las cortaduras de Dedekind.

***Estudio de los esquemas conceptuales asociados a las evolución histórica de las definiciones de razón y proporción***

*María Colina y Carmen Valdivé*

Asimismo, percibimos que el análisis epistemológico efectuado podría permitir la comprensión de los conceptos de razón y proporción como objeto de estudio en los diferentes tópicos matemáticos, en especial en el cálculo diferencial (o Matemática I), que es tan usado pero al mismo tiempo, es desconocido por los y las estudiantes en vista de que no está contemplado en el currículo. Además, de acuerdo a las distintas perspectivas encontradas en la historia, se debe tener en cuenta como educador, que en el momento de introducir un contenido que tenga implícito los conceptos de razón y proporción en el aula, precisemos concretamente, desde qué contexto se estudiará, a fin de evitar generar dificultades para los y las estudiantes en el futuro.

### **REFERENCIAS**

- Acosta, J., Rondero, C. y Tarasenko A. (2010). Algunas incongruencias conceptuales sobre la noción de linealidad. *ALME 22 México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, 535-543.
- Bergé, C. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisada a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(3), 163-197.
- Boyer, C. (2003). *Historia de la Matemática*. Madrid: Editorial Alianza.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*. México: Thomson Editores.
- Chin, E. & Tall, D. (2001). Developing Formal Mathematical Concepts Over Time. In Marja Van Den Heuwel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations*, 4, 241-248. Utrecht, The Netherlands.
- Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics and Cognition*, 113-134. Cambridge: Cambridge University Press.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 3-21. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.
- Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.
- Hernández, A. y Valdivé, C. (2015). *Estudio de los esquemas conceptuales asociados a la definición de número real*. Ponencia presentada en las X Jornadas Centroccidental de Educación Matemática. Barquisimeto.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. 4ta edición. Bogotá – Colombia: McGraw-Hill.
- Oller A. y Gairín J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 317-338.
- Pérez R. (2006). *Propuesta didáctica para incorporar el desarrollo del tema del razonamiento proporcional en 8vo grado de educación básica a través de la resolución de problemas*.

**Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática**

ISBN: 978-980-7464-17-8

- Trabajo de grado Maestría interinstitucional en Matemática. UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto.
- Rodríguez, G.; Gil, J. y García E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.
- Salazar, M. y Díaz, L. (2009). La actividad de medir aporta significados a fracciones y razones. *ALME 22 México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, 207-215.
- Sánchez, J (2010). *Estudio didáctico y epistemológico de la Noción del Número Irracional*. Trabajo de Grado de Maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico de Barquisimeto. UCLA-UPEL-UNEXPO.
- Sánchez J. y Valdivé C. (2012). El número irracional: Una visión histórico – didáctica. *PREMISA*, 14(52), 3-13.
- Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 3-21. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (1992b). *Student's Difficulties in Calculus*. Plenary presentation in Working Group 3, ICME, Québec, august 1992. *Mathematics Education Research Centre*. University of Warwick.
- Tall, D. (1992a). The transition to advanced mathematical thinking functions, limits, infinity, and proof. En Grouws, D. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 495-511. Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics, Inc.
- Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. *Proceedings of the 19th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations*, 61-75. Recife, Brasil.
- Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2 y 3), 200-238.
- Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1-16. Bergen, Norway.
- Tall, D. (2005). The transition from embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof. *Proceedings of the Delta Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1-16. Frazer, Island, Australia.
- Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. University Cambridge: Cambridge.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169
- Universidad Pedagógica Experimental Libertador Vicerrectorado de Investigación y Postgrado (2006). *Manual de trabajo de grado Especialización, Maestría y Tesis Doctoral*. Tercera Edición. Caracas: FEDUPEL
- Valdivé, C. (2008). *Esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal y su evolución en estudiantes de Análisis Matemático*. Tesis Doctoral no publicada. UCLA-UNEXPO-UPEL.

***Estudio de los esquemas conceptuales asociados a las evolución histórica de las definiciones de razón y proporción***

*María Colina y Carmen Valdivé*

Valdivé, C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución histórica de la Noción de Infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(3), 413-450.

Woods, P. (1987). *La escuela por dentro*. La etnografía de la investigación educativa. Barcelona: Paidós.