EL TEOREMA DEL BINOMIO DE NEWTON EN LA DINAMIZACIÓN DE LA REGLA DE LOS CUATRO PASOS

Adriana Engler, Alberto Camacho
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral - Argentina
Instituto Tecnológico de Chihuahua II - México
aengler@fca.unl.edu.ar, camachoalberto@hotmail.com
Niveles Terciario y Universitario

Palabras clave: Derivada. Regla. Dinamización.

Resumen

Numerosas investigaciones permiten asegurar que la construcción del concepto derivada no es fácil para estudiantes de ingeniería. Sin embargo, la interpretación de su significado y su uso en la resolución de problemas en la vida profesional es indispensable. En algunos libros se enuncia una técnica para calcular la derivada conocida como "La Regla de los Cuatro Pasos". En el contexto de la clase los profesores intentamos hacer que los estudiantes operen esta técnica con funciones algebraicas elementales. El proceso algorítmico que subyace a la regla sugiere que los estudiantes asuman una posición de "hacer matemática" en un contexto formal que los lleve a convencerse de la definición a la que conduce. No obstante, en la práctica, dado lo engorroso de los cálculos algebraicos, el proceso se convierte en una rutina que no genera en los alumnos los significados que se buscan al estudiar el objeto derivada. Consecuentemente, si la regla es importante a partir de que puede ayudar al profesor en el aula para que sus estudiantes construyan la derivada, se hace necesario dinamizarla para hacerla más funcional, incorporando en ella argumentos de carácter variacional.

En este trabajo – que surge en el marco del proyecto de tesis doctoral "Construcción del concepto de derivada a través de dinamizar la regla de los cuatro pasos**.** Una aproximación socioepistemológica"– se describe la regla, su surgimiento y se muestra el rol del Teorema del Binomio de Newton en la dinamización de la misma.

Introducción

El reconocimiento de los procesos infinitos, la aparición del concepto de límite como organizador de ideas y métodos, el desarrollo del concepto de infinitesimal, el nacimiento del concepto de función, entre otros, constituyen la base para el surgimiento del cálculo. Se sabe que durante los siglos XVI y XVII aparecieron nuevos métodos matemáticos dada la necesidad de resolver problemas de movimiento de los astros, el flujo de los líquidos, el trazado de la tangente a una curva, las condiciones para obtener máximos y mínimos, además de la velocidad de los cuerpos en movimiento. Los vínculos del cálculo, tanto con la matemática elemental como con la matemática avanzada y su papel en las ciencias, lo transforman en un conjunto de conocimientos con valor teórico y empírico indispensable en la educación superior. El currículo de matemática y los métodos de enseñanza durante mucho tiempo fueron inspirados sólo por ideas que provienen de la estructura de las matemáticas formales y por métodos didácticos fuertemente apoyados en la memoria y en la algoritmia. Por su lado, en el aula de matemática, el cálculo diferencial permite explorar la naturaleza del cambio y del movimiento y proporciona herramientas como la razón de cambio, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, etc., así como un lenguaje para lograrlo. Brinda la posibilidad de crear modelos matemáticos para describir los fenómenos asociados al cambio y la medición de la variación, como por ejemplo la difusión de calor sobre algún objeto, la vibración, etc. Así, la medición del cambio ha estado estrechamente ligada con la idea de variación, aspecto esencial y eje central en la formación del concepto de derivada.

En este sentido, Moreno (2005) expresa:

> La enseñanza de los principios del cálculo resulta bastante problemática y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, o bien a realizar algunas derivadas o integrales, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas. (p. 82)

Para el trabajo en el aula universitaria, es importante debatir cómo los alumnos acceden a esta forma discurso matemático escolar.

Hace más de diez años, Cantoral y Mirón (2000) señalaban:

> (…) la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aún siendo capaces de derivar una función no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación. (pp. 269-270)

Si bien la construcción del concepto de derivada no es fácil, su significado y uso en la resolución de problemas en la vida profesional es indispensable. Así por ejemplo, se utiliza para diseñar un puente, para pronosticar las ventas anuales en una compañía, para la determinación del interés que arroja una cantidad de dinero depositada a cierto tiempo en el banco, etc. En este nivel, se hace necesario generar en los estudiantes una base sólida de conocimientos matemáticos para que puedan interpretar y dar respuesta a la mayor cantidad de interrogantes del saber de su especialidad.

Este trabajo surge en el marco del proyecto de tesis doctoral *Construcción del concepto de derivada a través de dinamizar la regla de los cuatro pasos (RCP)*. *Una aproximación socioepistemológica* ante la necesidad de reconocer la regla y el rol del Teorema del Binomio de Newton en la dinamización de la misma para su uso en el salón de clase.

La Regla de los Cuatro Pasos

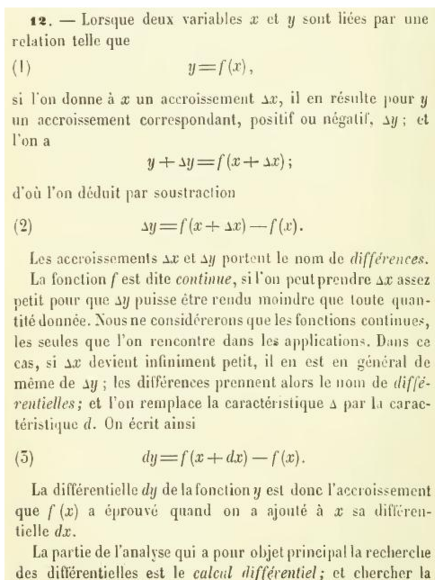
En algunos libros de texto habitualmente utilizados en carreras de ingeniería para el desarrollo de los programas de cálculo diferencial, se enuncia una técnica para calcular la derivada conocida como La Regla de los Cuatro Pasos. Esta constituye la estructura matemática usada actualmente en el salón de clase para la determinación de la derivada

$f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{lím} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ de una función $f(x)$. En algunos de los libros de cálculo diferencial para ingeniería se describe de la siguiente manera:

1. *Se sustituye en la función x por* $x+\Delta x$*, y se calcula el nuevo valor de la función* $y+\Delta y$.
2. *Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene* Δy (*incremento de la función*).
3. *Se divide* Δy (*incremento de la función) por* Δx (*incremento de la variable independiente*).
4. *Se calcula el límite de este cociente cuando* Δx *tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada.* (Granville, 1980, p. 30)

El surgimiento de la regla

La regla de los cuatro pasos fue desarrollada a lo largo de los siglos XVIII y XIX en diversas ramas de la ingeniería, como la topografía, astronomía y otras, apareciendo en los textos de cálculo diferencial a finales del siglo XIX y principios del siglo XX.



12. — Lorsque deux variables x et y sont liées par une relation telle que

$$y = f(x), \tag{1}$$

si l'on donne à x un accroissement Δx, il en résulte pour y un accroissement correspondant, positif ou négatif, Δy ; et l'on a

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

d'où l'on déduit par soustraction

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{2}$$

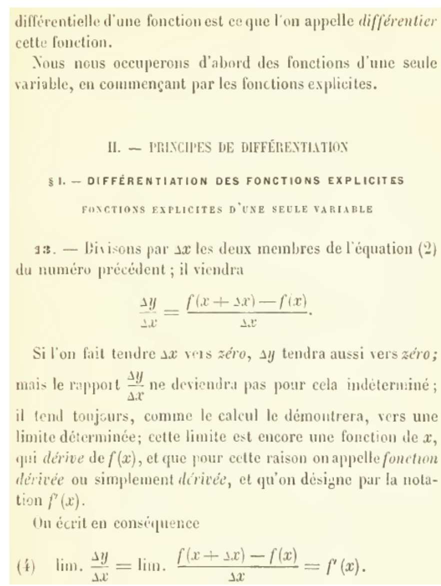
Les accroissements Δx et Δy portent le nom de *différences*.

La fonction f est dite *continue*, si l'on peut prendre Δx assez petit pour que Δy puisse être rendu moindre que toute quantité donnée. Nous ne considérerons que les fonctions continues, les seules que l'on rencontre dans les applications. Dans ce cas, si Δx devient infiniment petit, il en est en général de même de Δy ; les différences prennent alors le nom de *différentielles ;* et l'on remplace la caractéristique Δ par la caractéristique d. On écrit ainsi

$$dy = f(x + dx) - f(x). \tag{3}$$

La différentielle dy de la fonction y est donc l'accroissement que $f(x)$ a éprouvé quand on a ajouté à x sa différentielle dx.

La partie de l'analyse qui a pour objet principal la recherche des différentielles est le *calcul différentiel ;* et chercher la



différentielle d'une fonction est ce que l'on appelle *différentier* cette fonction.

Nous nous occuperons d'abord des fonctions d'une seule variable, en commençant par les fonctions explicites.

II. — PRINCIPES DE DIFFÉRENTIATION

§ I. — DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS EXPLICITES

FONCTIONS EXPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE

13. — Divisons par Δx les deux membres de l'équation (2) du numéro précédent ; il viendra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers *zéro*, Δy tendra aussi vers *zéro ;* mais le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne deviendra pas pour cela indéterminé ; il tend toujours, comme le calcul le démontrera, vers une limite déterminée; cette limite est encore une fonction de x, qui *dérive* de $f(x)$, et que pour cette raison on appelle *fonction dérivée* ou simplement *dérivée*, et qu'on désigne par la notation $f'(x)$.

On écrit en conséquence

$$\text{lim.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{lim.} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \tag{4}$$

Figura 1. Páginas 4 y 5 del texto de cálculo diferencial del autor francés Sonnet (1869) en las que se muestra la utilidad de la RCP en la definición de la derivada de una función.

27. Comparison of increments. Consider the function

$$(A) \qquad y = x^2.$$

Assuming a fixed initial value for x, let x take on an increment Δx. Then y will take on a corresponding increment Δy, and we have

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2,$$

or,

$$y + \Delta y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Subtracting (A), $\quad y \quad = x^2$

$$(B) \qquad \Delta y = \quad 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

we get the increment Δy in terms of x and Δx.

To find the ratio of the increments, divide (B) by Δx, giving

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Figura 2. Se observa un fragmento de la página 26 del texto de Granville (1911) donde se muestran los pasos de cómo se utiliza la regla para determinar la derivada por incrementos de la función $y = x^2$.

The above definition may be given in a more compact form symbolically as follows: Given the function

$$(A) \qquad y = f(x),$$

and consider x to have a fixed value.

Let x take on an increment Δx; then the function y takes on an increment Δy, the new value of the function being

$$(B) \qquad y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

To find the increment of the function, subtract (A) from (B), giving

$$(C) \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Dividing by the increment of the variable, Δx, we get

$$(D) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

The limit of this ratio when Δx approaches the limit zero is, from our definition, the *derivative* and is *denoted by the symbol* $\frac{dy}{dx}$. Therefore

$$(E) \qquad \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x = 0}{\text{limit}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

defines the *derivative of* y [*or* $f(x)$] *with respect to* x.

Figura 3. En la página 27 del mismo Granville (1911) se observan los cuatro pasos para definir la derivada en el mismo libro.

Si se analiza la aparición de la regla en diferentes libros de texto utilizados en el aula se observa que, en la mayoría se deja de lado como ejercicio para los estudiantes la determinación de la derivada haciendo uso de la regla. La técnica es usada de esa manera solamente por los autores para encontrar la derivada de algunas funciones y a modo de demostración de algunas reglas de derivación. Esto se debe a que la parte algorítmica del proceso se hace cada vez más compleja conforme la función algebraica también lo sea, precisando así de más trabajo y más tiempo para llevarla adelante. En general no se tienen en cuenta y ni siquiera se mencionan los significados variacionales de cada uno de los pasos que constituyen la regla.

En el contexto de la clase los profesores intentamos que los estudiantes operen esta técnica con funciones algebraicas elementales de manera que a través de ella puedan determinar la derivada correspondiente. El proceso algorítmico que subyace a la regla sugiere que los estudiantes asuman una posición de "hacer matemática" en un contexto formal que los lleve a convencerse de la definición a la que conduce la propia regla y de que las fórmulas de derivación se deducen de la aplicación de la misma. No obstante, en la práctica, dado lo engorroso de los cálculos algebraicos, el proceso se convierte en una rutina que no genera en los alumnos los significados que se buscan al estudiar el objeto derivada. Por sí misma, la intención de que los estudiantes ejerciten esa técnica es valiosa, siempre y cuando la finalidad se cumpliera, es decir, cuando en la práctica ejercieran o utilizaran con sentido la expresión con la que se define la derivada y no solamente el recurso que la sintetiza.

Por otro lado, cuando los estudiantes calculan la función derivada, utilizando las reglas de derivación, el proceso de la técnica se deja de lado y la interpretación deseada también. Este es un primer problema que se vive en la enseñanza de la derivada desde esa perspectiva. La parte algorítmica del proceso se hace cada vez más compleja y necesita así de más trabajo conforme la función algebraica también lo sea. No obstante, la mecanización del álgebra cobra en estos problemas cierta importancia para que los alumnos puedan calcular los límites correspondientes. Si bien, a través de la regla es posible el camino hacia la construcción del concepto derivada, en todo lo expresado anteriormente se observa que la regla ha sido ampliamente usada para determinar la derivada *por incrementos* o *por definición* de ciertas funciones elementales, algebraicas, (particularmente funciones analíticas) con las que los profesores de los niveles terciario y universitario intentan dar orientación a la propia definición de derivada que proponen a sus estudiantes. Con todo, la regla es en cierta forma *incompleta* para establecer una organización didáctica que lleve a los estudiantes a construir el concepto de derivada. Falta considerar en el aula el hecho de que, en sí misma, la regla es un conjunto ordenado de proposiciones de orden variacional – incrementar la variable independiente, incrementar la función, determinar el cociente de incrementos y el paso al límite –. Entre ellos están vinculados para poder, finalmente, determinar la derivada. Cada etapa del proceso de los cuatro pasos establece otros conceptos, también de naturaleza variacional, como son la diferencia, el diferencial, la derivada misma, que a su vez sirven en la organización, para su enseñanza, de otros conceptos alternativos como son la pendiente de la recta tangente, la razón de cambio media y razón de cambio instantánea.

Si bien la regla constituye un argumento, ello se debe a que en sí misma está compuesta de significados y procedimientos y porque es una explicación de lo que en un determinado marco de referencia se organiza. En general no recibe este tratamiento en las actividades determinadas habitualmente por los profesores.

Además, en sí misma, muestra una buena cantidad de obstáculos para que los estudiantes la usen en procesos algorítmicos. Resulta una técnica que encapsula los argumentos del álgebra que se emplean para determinar la derivada de determinado tipo de funciones.

En ese sentido, la derivada de, por ejemplo $f(x)=\sqrt[5]{x}$, deviene imposible para estudiantes de ingeniería por la encapsulación binomial que resulta del proceso algebraico subyacente. De igual manera, ¿Qué haría un estudiante si le pidiéramos que derivara $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x}}+2\sqrt[3]{x}$ a través de la RCP? Sería imposible pensar que pueda satisfacer nuestro pedido.
Ante esto, es necesario *dinamizar* la regla incorporando en ella argumentos de carácter variacional que permitan hacerla más funcional hacia el objetivo que se demanda.

¿Qué entendemos por dinamizar?
La *dinamización* es la actividad central en este trabajo. Según el diccionario de la Real Academia Española *dinamizar* significa imprimir rapidez e intensidad a un proceso, hacer que funcione mejor una cosa o que tenga un mayor desarrollo e importancia una actividad y añadir energía que estimula los cambios o el desarrollo a una actividad, desarrollarla o hacer que cobre más importancia.

Balbuena (2007), en la conferencia Innovación y Dinamización Matemática, hizo referencia a las labores de dinamizar la matemática en el sentido de ofrecer al alumnado actividades que complementan su formación porque inciden en el desarrollo de capacidades que le ayudarán y no sólo en sus estudios de matemáticas.

El teorema del Binomio de Newton
El interés de Newton por la matemática comenzó a finales de 1663 buscando entender la propia matemática incluida en un libro de astrología. Abordó el teorema del binomio a partir de los trabajos de Aritmética de Wallis, y el cálculo de fluxiones. Durante los años

1665 y 1666, logró grandes descubrimientos como la ley del inverso del cuadrado y de la gravitación, desarrolló su cálculo de fluxiones, generalizó el teorema del binomio y puso de manifiesto la naturaleza física de los colores. El teorema del binomio fue descubierto hacia 1664-1665 y comunicado por primera vez en dos cartas dirigidas en 1676 a Henry Oldenburg, secretario de la Royal Society que favorecía los intercambios de correspondencia entre los científicos de su época.

En la primera carta, fechada el 13 de junio de 1676, en respuesta a una petición de Leibniz, que quería conocer los trabajos de matemáticos ingleses sobre series infinitas, Newton presentó el enunciado del teorema y un ejemplo para ilustrarlo. En la misma mencionó ejemplos conocidos en los cuales aplicaba el teorema. En su inicio, el teorema se enunció para exponentes fraccionarios y representa una generalización de algunos trabajos anteriores sobre series anticipando la idea de la predicción. Newton no publicó el teorema del binomio. Lo hizo Wallis por primera vez en 1685 en su Álgebra, atribuyendo a Newton este descubrimiento. Utilizando los métodos de interpolación y extrapolación de Wallis a nuevos problemas, Newton utilizó los conceptos de exponentes generalizados de manera tal que una expresión polinómica fuera transformada en una serie infinita. Escribió por primera vez el binomio:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \ldots$$

Donde $P+PQ$ es la cantidad cuya raíz, o incluso cualquier potencia, se busca; P significa el primer término de esa cantidad, Q los términos restantes divididos por el primero, y $\frac{m}{n}$ el índice numérico de la potencia de $P+PQ$, sea esta entera, fraccionaria, positiva o negativa, y no como es usual encontrarlo en los libros de textos actuales a partir de la expresión:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots.$$

El descubrimiento de la generalización de la serie del binomio fue en sí mismo un resultado importante. Pero es cierto que, a partir de este descubrimiento, Newton tuvo la intuición de que se podía operar con series infinitas de la misma manera que con expresiones polinomiales finitas. El análisis a través de las series infinitas parecía posible.

Cantoral y Farfán (1998) han manifestado que el teorema:

> Se trata de una verdadera concepción alternativa del binomio, que se apoya en una epistemología sensiblemente diferente de la que hoy enseñamos en clase. (…) obedece a una programa emergente en aquella época, un programa alternativo en el campo de la ciencia, con el que se busca modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales con el respaldo matemático. (p. 363)

La manera de utilizar los desarrollos en serie a partir del teorema del binomio es explícita en toda la obra de Newton.

Analizamos una propuesta de trabajo con profesores

Las prácticas de ingeniería llevadas a cabo a lo largo de los siglos XVIII y XIX, enfatizan la utilidad del desarrollo de funciones analíticas en la forma:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + A\Delta x + B(\Delta x)^2 + ... + ...$$ (Camacho y Sánchez, 2010).

No obstante, es fácil probar que esta posibilidad obedece al desarrollo del Teorema del Binomio de Newton como:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + ...$$

A continuación se presenta un trabajo realizado con seis profesores de facultades de ingeniería en el que se intentó un planteamiento semejante para la determinación de la derivada, usando estas ideas.

Se les presentó el siguiente planteo:

La Regla de los cuatro pasos (RCP) constituye la estructura matemática usada como una técnica para la determinación de la derivada de una función $f(x)$. *La técnica asume que, dada* $y = f(x)$, *se llega a la derivada siguiendo los siguientes pasos:*

PRIMER PASO: Se calcula $f(x+\Delta x)$

SEGUNDO PASO: Se calcula $f(x+\Delta x) - f(x)$

TERCER PASO: Se divide por Δx *, quedando:* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

CUARTO PASO: Se aplica $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ *en ambos lados:* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Si obtiene así la derivada $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ *siempre que el límite exista.*

Resuelva las actividades siguientes aplicando la RCP

Actividad 1. *Calcule la derivada de* $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

Actividad 2. *Calcule la derivada de* $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$

Actividad 3. *Calcule la derivada de* $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x}$

En todos los casos la resolución de las actividades prácticamente fueron las mismas (mucho trabajo algebraico considerando el desarrollo de $a^n - b^n$, racionalizando además los denominadores) ninguno planteó la posibilidad de utilizar el desarrollo del teorema del binomio para coeficientes fraccionarios. Se los invitó nuevamente a trabajar bajo las consignas que se enumeran a continuación.

La historia continúa…

Hace tiempo le pedimos que aplicara La Regla de los Cuatro Pasos para obtener las derivadas de diferentes funciones. Les agradecemos por la tarea realizada.

Ahora queremos compartir con usted una cuestión que nos parece interesante abordar dada la complejidad de los cálculos algebraicos realizados aquella vez.

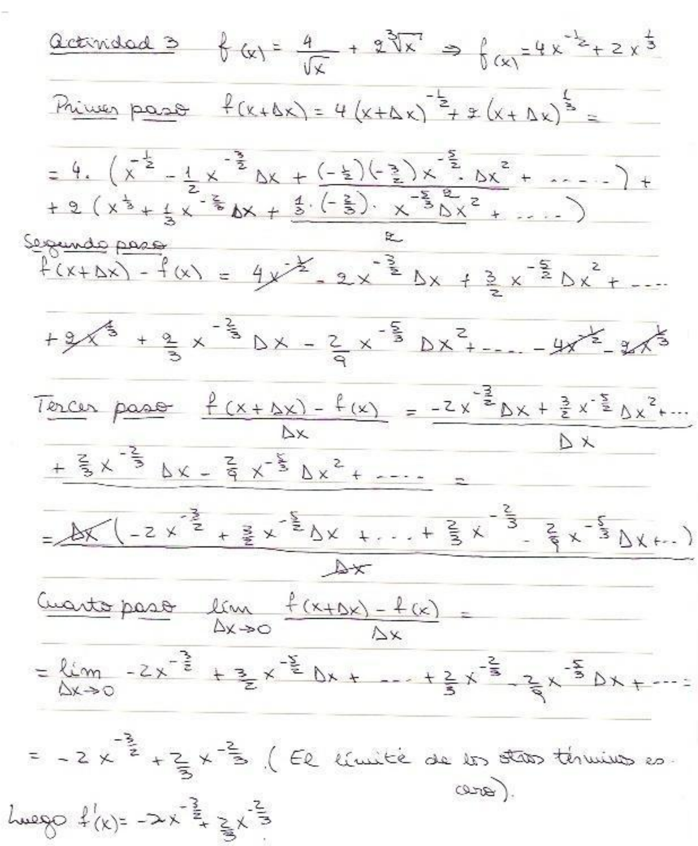
Desarrollos binomiales

Una herramienta que permite desarrollar funciones como las analizadas en los ejemplos ya trabajados es el Teorema del Binomio de Newton.

Según el teorema del binomio $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2} + \ldots + \ldots.$

Este teorema fue formulado en la edad media y desarrollado (alrededor de 1676) para exponentes fraccionarios por el científico inglés Isaac Newton, lo que le permitió el uso de sus métodos de cálculo recién descubiertos para resolver muchos problemas difíciles. Teniendo en cuenta lo anterior ¿considera que este teorema podría resultar útil para la resolución de las actividades que trabajó anteriormente y que se enuncian a continuación? En ese caso ¿podría resolver nuevamente las actividades y dar su opinión?

Mostramos a continuación el trabajo realizado por uno de los docentes para resolver la actividad 3, usando el recurso de teorema del binomio de Newton (todos trabajaron de la misma manera).



Actividad 3 $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x} \Rightarrow f(x) = 4x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}}$

Primer paso $f(x+\Delta x) = 4(x+\Delta x)^{-\frac{1}{2}} + 2(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} =$

$= 4.\left(x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\Delta x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})x^{-\frac{5}{2}}}{2}.\Delta x^2 + \ldots\right) +$
$+ 2\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x + \frac{\frac{1}{3}.(-\frac{2}{3})}{2}.x^{-\frac{5}{3}}\Delta x^2 + \ldots\right)$

Segundo paso

$f(x+\Delta x) - f(x) = \cancel{4x^{-\frac{1}{2}}} - 2x^{-\frac{3}{2}}\Delta x + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\Delta x^2 + \ldots$
$+ \cancel{2x^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\Delta x^2 + \ldots - \cancel{4x^{-\frac{1}{2}}} - \cancel{2x^{\frac{1}{3}}}$

Tercer paso $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{-2x^{-\frac{3}{2}}\Delta x + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\Delta x^2 + \ldots + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\Delta x^2 + \ldots}{\Delta x} =$

$= \frac{\cancel{\Delta x}\left(-2x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\Delta x + \ldots + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\Delta x + \ldots\right)}{\cancel{\Delta x}}$

Cuarto paso $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$

$= \lim_{\Delta x \to 0} -2x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\Delta x + \ldots + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\Delta x + \ldots =$

$= -2x^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ (El límite de los otros términos es cero).

Luego $f'(x) = -2x^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

Figura 4. Obsérvese como la utilidad del recurso del teorema del binomio de Newton, reduce el trabajo algebraico para la determinación de la función $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x}$, haciendo el proceso más dinámico.

Como se puede observar en la resolución, el trabajo algebraico es mucho menor y la posibilidad de llegar rápidamente al resultado es evidente. Este último recurso desencapsula los binomios en el juego algorítmico y hace más dinámico el uso de la RCP para determinar la derivada de la función.

Ante la pregunta realizada con respecto a la utilidad del TBN para la resolución de estas actividades, la respuesta obtenida de la profesora fue: "*Ambas maneras de desarrollar cada uno de los pasos para determinar la derivada recurren a procedimientos algebraicos. La utilización del binomio de Newton para el desarrollo de las potencias hace que el proceso para salvar la indeterminación del límite sea más corto y menos engorroso en cuanto a las operaciones empleadas. Además pienso que resulta menos abstracto porque de la otra manera hay que recurrir a un artificio como es multiplicar y dividir la razón por alguna expresión, diferentes según la función y bastante complicada según los pasos. De esta manera el desarrollo es el mismo para todos los ejemplos y me parece que los alumnos pueden comprenderlo de una manera más natural. La desventaja sería que se debió haber desarrollado el tema (potencia de un binomio) previamente*".

Las apreciaciones realizadas son muy interesantes y coincidimos con que es muy difícil que se desarrolle teniendo en cuenta el teorema del binomio, dado que no es una práctica habitual en el aula de cálculo.

Reflexiones finales

Desde esta perspectiva, luego del análisis presentado y conociendo que es posible dinamizar la regla de los cuatro pasos, la innovación pasará por desarrollar e implementar una propuesta didáctica que, valiéndose de esta posibilidad a través del uso del teorema del binomio, coloque a los alumnos en el camino hacia la construcción del concepto derivada favoreciendo de esa manera la construcción de significados variacionales asociados en torno a ella. Resulta entonces imprescindible explicar a la derivada como un "fenómeno didáctico" y con ello establecer relaciones entre su forma descriptiva y los elementos teóricos que la integran. Hacia esa meta es importante observar esta cuestión desde los puntos de vista social, epistemológico, didáctico y de la ingeniería, así como desde su definición teórica, a la cual se asocian las perspectivas geométrica, algebraica y variacional.

En ese sentido, no es lo mismo una buena intención para diseñar una situación o preparar una clase, que hacer uso de una metodología que permita conectar y controlar los significados. Es de esperar que este trabajo se constituya en un aporte para los que se interesan por esta problemática y su trabajo cotidiano en el aula.

Referencias Bibliográficas

Balbuena, L. (2007). Innovación y dinamización matemática. Recuperado el 14 de mayo de 2010 de http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/Usrn/cep_laguna/recursos/Proy_EAM/DOCUMENTOS/CONFERENCIAS/Conferencia_Luis.pdf.

Camacho, A y Sánchez, B. (2010). Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Número especial (aceptado para su publicación).

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En *Epsilon*, (42) 353 – 369.

Cantoral R. y Mirón H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 3(3)*, 265-292.

Granville, W. (1911). *Elements of the Differential and Integral Calculus.* Boston: Ginn and Company.

Granville, W (1980). *Cálculo diferencial e integral*. México: Editorial Limusa-Noriega Editores.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (Eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 81-96). Córdoba, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y la Sociedad Española de investigación en Educación Matemática SEIEM.

Sonnet, H. (1869). *Premiers Éléments du Calcul Infinitésimal a l´usage des Jeunes gens qui ce Destinnent a la Carrière d´Ingénieur.* Paris: Hachette