

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS EM CÁLCULO I: PRONTIDÃO A PARTIR DO ENSINO MÉDIO

Lilian Nasser, Marcelo Torraca, Geneci Sousa, Daniella Assemany,
Cecilia Amorim, Joana Marques
lnasser@im.ufrj.br
Projeto Fundação – UFRJ - Brasil

Tema: Pensamento Matemático Avançado

Modalidad: CB

Nível educativo: Terciário - Universitário

Palabras clave: Cálculo; transição; máximos e mínimos.

Resumo

Os altos índices de evasão e repetência em Cálculo têm motivado vários estudos para identificar suas causas e apontar ações que modifiquem esse quadro (Even, 1990; Rezende, 2003). O objetivo desta pesquisa é investigar a transição do Ensino Médio para o Superior e empreender ações para minimizar as dificuldades na aprendizagem de Cálculo. A falta de domínio do pensamento matemático avançado (Tall, 1991) é uma das causas para o baixo desempenho em Cálculo. Mas a prontidão para a aprendizagem dessa disciplina depende de vários conteúdos da Escola Básica. Neste trabalho, avaliamos se uma abordagem diferenciada de tópicos do Ensino Médio, como a adotada no Colégio de Aplicação da UFRJ, pode aprimorar o desempenho em Cálculo. Atividades investigativas que constituem a resolução de problemas de máximos e mínimos foram aplicadas a alunos do Ensino Médio do CAP UFRJ. Os mesmos problemas foram resolvidos por alunos de Cálculo incluindo, quando adequado, o cálculo da derivada da expressão encontrada. A metodologia da Análise de Erros é usada para categorizar as repostas, identificando o grande número de erros decorrentes de conteúdos básicos, indicando que uma abordagem diferenciada para os tópicos de funções e geometria no Ensino Médio pode preparar a prontidão para o Cálculo.

Introdução

Este trabalho faz parte de uma pesquisa, desenvolvida no âmbito do Projeto Fundação (IM/UFRJ), que visa investigar a transição do Ensino Médio para o Superior, na tentativa de empreender ações para minimizar as dificuldades em Cálculo. Os altos índices de evasão e repetência na primeira disciplina de Cálculo no curso superior têm sido tema de pesquisas nacionais e internacionais, buscando identificar as razões para esses problemas (Even, 1990; Rezende, 2003; Nasser, Sousa & Torraca, 2012). O baixo desempenho de alunos calouros em Cálculo é atribuído, em geral, a lacunas na aprendizagem de Matemática na Escola Básica. A falta de domínio do pensamento matemático avançado (Tall, 1991) é uma das causas para o baixo desempenho em Cálculo, mas a prontidão para a aprendizagem dessa disciplina depende de vários conteúdos dos ensinos Fundamental e Médio. A Geometria, em particular, aborda

problemas que podem preparar para a representação de problemas típicos de máximos e mínimos e de taxas relacionadas (Balomenos, Ferrini-Mundy & Dick (1994)). Por outro lado, o tópico de funções é abordado no Ensino Médio de modo pontual, não estimulando uma visão abrangente, necessária ao domínio do pensamento matemático avançado, inerente ao estudo de Cálculo. Segundo Tall (1991),

[...] a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: da descrição para a definição, do convencimento para a demonstração de uma maneira lógica, baseada naquelas definições. (Tall, 1991, p. 20)

Neste trabalho são analisados erros apresentados em questões de Cálculo, com o objetivo de avaliar se uma abordagem diferenciada de tópicos do Ensino Médio, como a que parte do estudo de vetores, adotada no Colégio de Aplicação da UFRJ (CAp), pode amenizar o processo de transição e aprimorar o desempenho em Cálculo.

Metodologia

Com o intuito de investigar os principais tipos de erros, foram aplicadas atividades de Máximos e Mínimos a alunos do Ensino Médio do CAp UFRJ e a alunos de Cálculo I, da UFRJ e de faculdades particulares. Nosso objetivo, ao analisar os erros cometidos pelos alunos de Cálculo, é verificar se estes são, em sua maioria, típicos do conteúdo de Cálculo, ou se decorrem de lacunas na aprendizagem de conteúdos estudados na Escola Básica. Para isso, usamos o referencial teórico de Análise de Erros, que descrevemos a seguir.

Análise de erros

A análise de erros é uma metodologia de pesquisa que tem sido usada em investigações sobre a aprendizagem de Matemática de diversos conteúdos, em todos os níveis de ensino. Consiste em identificar, analisar e categorizar os erros apresentados pelos alunos, com o objetivo de identificar suas causas e possíveis obstáculos para a aprendizagem. No Brasil, essa linha de pesquisa tem sido encabeçada por Helena Cury (2007). De acordo com essa pesquisadora,

A análise das respostas, além de ser uma metodologia de pesquisa, pode ser, também, enfocada como metodologia de ensino, se for empregada em sala de aula, como “trampolim de aprendizagem” (Borasi, 1985), partindo dos erros detectados e levando os alunos a questionar suas respostas, para construir o próprio conhecimento. (Cury, 2007, p.13)

Cury e Cassol (2004, p. 28) distinguem três tipos de estudos enfocando a análise de erros. No primeiro tipo, os erros dos alunos são apenas identificados e classificados, sem a preocupação em buscar as causas dos erros ou em aproveitá-los para promover a aprendizagem. Essa preocupação aparece no segundo tipo de estudo, com ênfase nos

conteúdos. São enfocados os obstáculos inerentes à aprendizagem e o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos a que se referem às respostas analisadas. Já nos estudos do terceiro tipo, a ênfase desloca-se para as atividades propostas e na análise de suas soluções. Os erros são discutidos com base nos objetivos da investigação e nos pressupostos teóricos adotados.

A nível internacional, destacam-se os trabalhos de Raffaella Borasi (1985), que desenvolveu uma “taxonomia de usos dos erros como trampolins para a pesquisa”. Essa taxonomia relaciona três níveis do discurso matemático (realização de uma tarefa, compreensão de um conteúdo e compreensão sobre a natureza da Matemática) a três objetivos da Matemática (remediação, descoberta e pesquisa) (Cury, 2007, p.37).

Para proceder à análise, os erros cometidos serão agrupados de acordo com sua natureza, criando categorias. Esse método de pesquisa é recomendado por Fiorentini e Lorenzato (2009), quando afirmam que “a categorização significa um processo de classificação ou de organização de informações em categorias, isto é, em classes ou conjuntos que contenham elementos ou características comuns”. (p. 134).

Atividades aplicadas

Para esta pesquisa, escolhemos investigar o desempenho de alunos de Cálculo I em problemas de máximos e mínimos. As atividades foram escolhidas de modo que os alunos do Ensino Médio do CAP pudessem resolvê-las apenas com seus conhecimentos de funções e gráficos, enquanto os alunos de Cálculo poderiam usar também seus conhecimentos de derivada para encontrar os pontos críticos.

A questão 1, mostrada na figura 1, foi aplicada a uma turma do terceiro ano do EM do CAP UFRJ e a duas turmas de Cálculo I. A turma do CAP era composta de 18 alunos, enquanto a turma de Cálculo I da UFRJ tinha 24 alunos e a outra turma, de uma instituição particular, era composta de 57 estudantes.

1. Um fazendeiro precisa construir um galinheiro de forma retangular utilizando-se de uma tela de 16 metros de comprimento, usando um muro como fundo do galinheiro, de acordo com a figura.

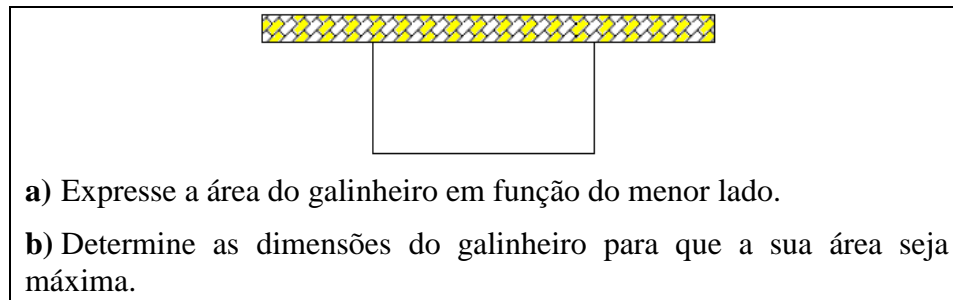


Figura 1: Questão 1 aplicada na pesquisa.

Como a área pedida é expressa por uma função de segundo grau, tanto os alunos do EM como os de cálculo conheciam o conteúdo para responder aos dois itens desse problema, usando os conhecimentos das coordenadas do vértice de uma parábola.

A tabela a seguir indica o percentual de alunos de cada turma que apresentou os tipos de erros decorrentes de tópicos da educação Básica identificados nas respostas.

Tabela 1: Porcentagens das respostas para a Questão 1 (galinheiro)

Erro \ Turma	CAP UFRJ (EM) (N = 18)	Cálculo I (UFRJ) (N = 24)	Cálculo I (IES) (N = 57)
Cálculo da área	5%	42%	4%
Confusão de perímetro com área	5%	4%	13%
Cálculo das coordenadas do vértice da parábola	4%	-	4%
Resolução do sistema	10%	-	2%
Só calculou 1 variável	10%	-	2%
Erraram totalmente/ não interpretaram o problema	35%	25%	28%
Em branco	-	8%	18%
Acertos	36%	21%	29%
% de erros da Ed. Básica	64%	71%	53%

Nesta questão, todas as categorias de erros se referem à Educação Básica, já que podia ser resolvida sem usar conhecimentos específicos de Cálculo. A turma de EM do CAP apresentou o maior índice de acertos e observa-se o alto número de erros da turma da UFRJ. As figuras a seguir mostram erros representativos dessas categorias.

(A) $2L + L = 16 \Rightarrow L = 16 - 2L$
 $L \cdot L = \text{ÁREA}$
 $L \cdot (16 - 2L) = 16$
 $16L - 2L^2 - 16 = 0$
 $f(L) = 16L - 2L^2 - 16$

(B) FUNÇÃO QUADRÁTICA
 $X \text{ no vértice} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-16}{-2 \cdot 2} = \frac{-16}{-4}$
 $L = 4$
 Se o lado menor = 4, o lado maior
 será = 8
 Dimensões : 4 x 8

Figura 2 : erro ao considerar a função da área como uma equação.

$x^2 + y = 16 \rightarrow y = 16 - x^2$ (área) $A = b \times h$
 $A(x) = x(16 - x)$
 $x = 0$
 $16 - x = 0$
 $-x = -16$
 $x = 16$

$y = 16 - x^2$
 $y' = -2x$
 $y' = 0 \rightarrow -2x = 0$
 $x = 0$
 $y' = -16 \rightarrow \frac{16}{-2} = 8$
 $x = +8$

Figura 3: Confusão na expressão da área.

$x \cdot y = A$
 $x + y = 16$
 $y = 16 - x$

a) $A = x(16 - x) = 16x - x^2$
 $16 - 2x = 0$
 $x = 8$
 Quando $x < 8$, $A > 0$
 Quando $x > 8$, $A < 0$
 $x = 8$ é o único caso
 $2(8) + y = 16$
 $y = 8$
 dimensões : 4 x 8

Figura 4: erro na simplificação da expressão do perímetro.

Esses erros indicam lacunas na aprendizagem de conteúdos de perímetro e área e, principalmente, no trato algébrico.

Questão 2:

Uma caixa sem tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões 8 dm por 5 dm. Para isso, deve se retirar quadrados de lado x de cada canto e depois dobrar, conforme mostra a figura.

a) Expresse o volume V da caixa como uma função de x .

b) Determine o volume máximo dessa caixa.

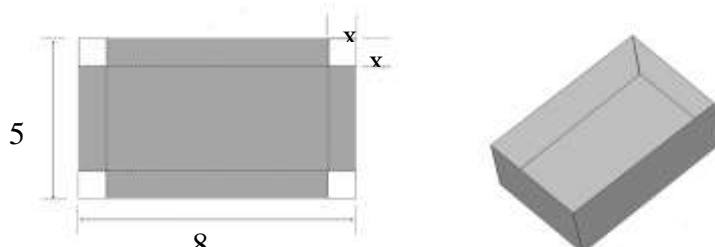


Figura 5: Questão 2 aplicada na pesquisa.

Para os alunos do Ensino Médio do CAP UFRJ, foi proposto apenas o item (a) da questão 2, pois o volume é expresso por uma função do 3º grau, o que exigia a aplicação da derivada para encontrar o ponto de máximo. A tabela 2 a seguir mostra as porcentagens de respostas desses alunos e dos estudantes de duas turmas distintas de Cálculo I da UFRJ.

Tabela 2: Porcentagens das respostas para a Questão 2 (caixa)

Erro \ Turma	CAP UFRJ (EM) (N = 18)	Cálculo I UFRJ (N = 42)	Cálculo I Bach UFRJ (N=24)
Trato algébrico	-	26%	21%
Contas	10%	10%	
Cálculo do volume	-	14%	8%
Tirou x em vez de $2x$	25%	7%	4%
Erraram totalmente/ não interpretaram o problema	10%	12%	8%
Em branco	5%	-	13%
Acertos	50%	2%	25%
% de erros de Cálculo I	-	29%	21%
% de erros da Ed. Básica	50%	69%	41%

Novamente, os alunos do Ensino Médio do CAP UFRJ tiveram um desempenho superior aos dos alunos de Cálculo. Observa-se também que em ambas as turmas de Cálculo I a maioria dos erros recaiu sobre conteúdos da Escola Básica.

A figura 6 a seguir apresenta uma solução com erro na representação das arestas da caixa, retirando apenas um quadrado da planificação. Esse erro foi cometido por alunos de todas as turmas da amostra, e por um quarto dos alunos do Ensino Médio.

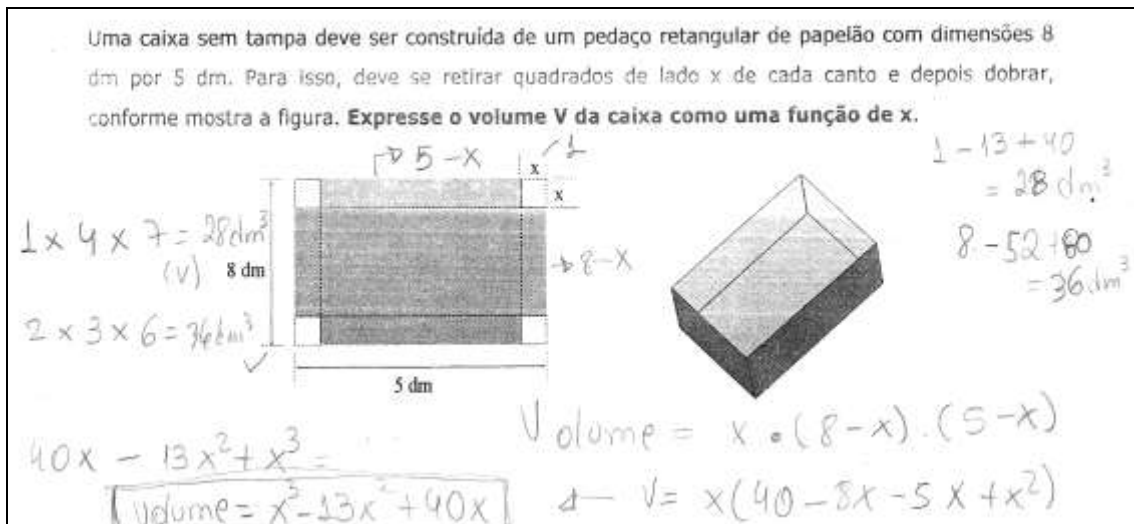


Figura 6: erro na expressão algébrica do volume da caixa.

Grande parte dos erros reflete a falta de domínio do trato algébrico, como na resolução mostrada na figura 7 a seguir.

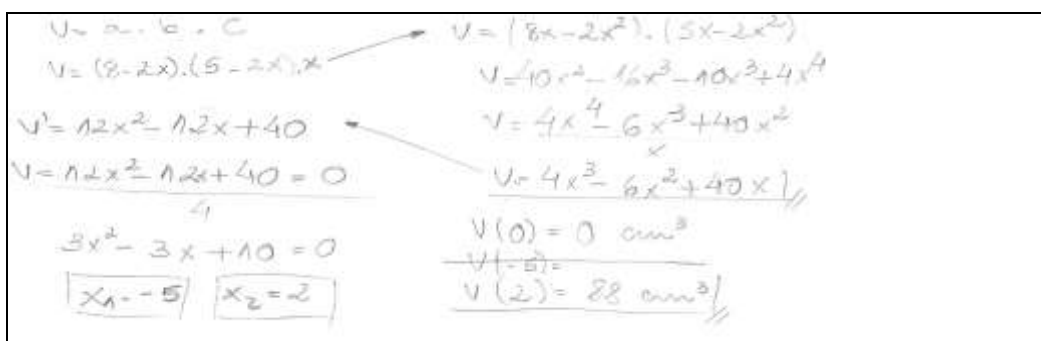


Figura 7: Erro no trato algébrico

Considerações finais

Este trabalho mostrou os altos índices de erros básicos cometidos nas questões de máximos e mínimos típicas dos cursos de Cálculo I. Os erros referentes ao conteúdo específico de Cálculo, como a aplicação da derivada, não foram tão significativos

quanto os erros relativos ao trato algébrico. Esse resultado indica que é preciso conscientizar professores do Ensino Médio da possibilidade de adotar uma abordagem diferenciada para a Matemática, que amenize a transição para o Ensino Superior, promovendo uma prontidão para o Cálculo. Uma tentativa tem sido feita no CAP UFRJ, que adota uma abordagem baseada em vetores desde o 1º ano do Ensino Médio, refletindo num aprimoramento no domínio do trato algébrico e na compreensão dos problemas.

Referencial Bibliográfico

- Balomenos, R., Ferrini-mundy, J. ,& Dick, T. (1994). Geometria: prontidão para o Cálculo. In: M. Lindquist e A. Shulte (org.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. (pp. 240-257). São Paulo: Atual Editora.
- Borasi, R. (1985). Using errors as springboards for the learning of mathematics; an introduction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v.7, n. 3-4, p. 1-14.
- Cury, H.N. (2007). Análise de erros: o que podemos aprender com os erros dos alunos. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora.
- Cury, H.N. e Cassol, M. (2004). Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. *Acta Scientiae*, v.6, n.1, p. 27-36.
- Even, R. (1990, Dezembro). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21. pp. 521-544.
- Fiorentini, D. e Lorenzato, S. (2009). Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados.
- Nasser, L., Sousa, G.,& Torraca, M. (2012). Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em cálculo? Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil.
- Rezende, W. M. (2003). *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Tese de Doutorado não publicada. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, Brasil.
- Tall, D. (Ed.) (1991): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.