ESTABILIDAD DE SISTEMAS INVARIANTES MODELADOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES

Ana Emilia Ferrazzi de Bressan, Juan Carlos Bressan
anaferrazzibressan@gmail.com
Niveles Terciario y Universitario

Palabras claves: Estabilidad, transformada de Laplace, función de transferencia, convolución.

Resumen

En las ciencias fácticas es frecuente estudiar la estabilidad de los sistemas de variable continua analizando las ecuaciones diferenciales que los modelan. Este tema suele ser muy poco abordado en los primeros niveles de cálculo por carecer aún de la base teórica suficiente, pero por su importancia y utilidad conviene exponerlo así sea a nivel elemental.
Este trabajo presenta una propuesta didáctica para introducir el concepto de estabilidad en tres niveles distintos de acuerdo a la formación matemática ya recibida por el alumno según su carrera. El primer nivel está orientado a alumnos que simplemente resuelven ecuaciones diferenciales, con quienes se pueden inducir las condiciones de estabilidad por análisis de las funciones de entrada y salida. El segundo está destinado a aquellos alumnos que además saben transformada de Laplace y su inversa, con los que se puede introducir la función de transferencia y finalmente el tercero para alumnos de cursos avanzados ya familiarizados con la convolución, con la que pueden hacer la justificación teórica del criterio adoptado para el análisis de la estabilidad del sistema. En cada nivel se presentan ejemplos resueltos en que se aplica la información impartida y se evidencia la forma en que se determina la estabilidad del sistema. Destacamos que esencialmente en los dos primeros niveles insistimos en cómo se opera para determinar la estabilidad del sistema. Recién en el último nivel nos preocupa la justificación de dicha operatoria. Eso debido a que recién ahora el alumno cuenta con la base teórica que se lo permite.

Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar distintas formas de analizar los criterios de estabilidad de un sistema de variable continua, invariante en el tiempo, según el nivel de conocimientos alcanzado por el alumno. Comenzaremos entonces recordando definiciones y conceptos básicos para los temas a desarrollar, por presentarse reiteradamente en nuestra exposición: Consideramos que un sistema es estable si sale del estado de reposo ante una excitación externa $x(t)$, que llamaremos función de entrada, y vuelve a él, al eliminar la fuente que la origina. Decimos que una función $f(t)$ continua en $[0;+\infty)$ es acotada si $\exists\, M \in R, \forall t \geq 0, \ |f(t)| < M$. Una condición suficiente que utilizaremos, a los efectos del cálculo, es que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = l$, con $l \in R$.

Consideraremos nuestros sistemas interpretados por modelos determinísticos dados, cada uno, por una ecuación diferencial de coeficientes constantes que modela un sistema lineal, invariante en el tiempo, alimentado por una función o señal de entrada acotada $x(t)$ a la que le corresponde una respuesta o función de salida $y(t)$. Un sistema a modelar es lineal, si en presencia de dos o más entradas sumadas, la respuesta es el resultado de sumar cada respuesta obtenida de ellas. Un sistema es invariante en el tiempo cuando determinada entrada da lugar siempre a una misma salida, independientemente del momento en que se aplica, debido a que el sistema tiene características que son fijas y por ello la ecuación diferencial que lo modela tiene coeficientes constantes. Luego, la invariancia del sistema depende de la ecuación homogénea.

En nuestro trabajo, el sistema lineal invariante, será modelado por una ecuación diferencial de primer grado y orden n, a coeficientes constantes. Preferentemente, para mayor simplicidad operativa y sin pérdida de generalidad, la supondremos de orden dos. Así consideraremos ecuaciones de la forma $a_2\, y''(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = f(t)$, con $a_2 \neq 0$ y $a_0, a_1, a_2 \in R$. Si $a_2 \neq 1$, dividiremos ambos miembros por a_2 obteniendo $y''(t) + b_1\, y'(t) + b_0\, y(t) = x(t)$, con condiciones iniciales $y'(0) = y(0) = 0$, siendo $x(t)$ la función de entrada acotada.

Los criterios de estabilidad del sistema que desarrollaremos mediante el análisis de la acotación de la función de salida $y(t)$ para una función de entrada $x(t)$ acotada, se introducirán de distintas formas según el nivel de conocimientos del alumno. Para alumnos del 1er. nivel se inducirá a través de ejemplos de ecuaciones, hallando la solución general de la ecuación homogénea, sumándole una solución particular de la no homogénea; y utilizando las condiciones iniciales para obtener la solución $y(t)$ que es la función de salida buscada.

Para el segundo nivel utilizaremos la función de transferencia $G(s)$ que resulta del cociente entre las transformadas de Laplace $L[y(t)] = Y(s)$ de la función de salida y $L[x(t)] = X(s)$ de la función de entrada. Los polos de $G(s)$, es decir los ceros de su denominador, permiten determinar la estabilidad del sistema sin resolverlo.
Para el tercer nivel, el análisis de la estabilidad se efectuará con una justificación teórica del método, en la que utilizaremos la convolución aplicada a las funciones $g(t) = L^{-1}[G(s)]$ y $x(t)$.

Noción de estabilidad (1er. nivel de conocimientos)

Todo sistema modelado por la ecuación diferencial $y''(t) + b_1\, y'(t) + b_0\, y(t) = x(t)$ es estable si y solo si a toda función de entrada $x(t)$ acotada, le corresponde una función de salida $y(t)$ también acotada. El sistema es marginalmente estable cuando depende de la expresión de la función acotada $x(t)$ que la función de salida $y(t)$ sea o no acotada. Será inestable si para cualquier función acotada $x(t)$ su salida $y(t)$ es no acotada. Para estudiar la estabilidad del sistema, relacionaremos la acotación de $y(t)$, con los valores de las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea.

En los ejemplos, se obtuvo $y(t)$ sumándole a la solución de la ecuación diferencial homogénea una solución particular de la no homogénea y aplicando luego las condiciones iniciales $y'(0) = y(0) = 0$. Por razones de espacio, nos limitaremos a indicar las raíces r_k de la ecuación característica, la función $y(t)$ y su límite cuando $t \to +\infty$ en los siguientes

Ejemplos:

1.1. $y''(t) + 7y'(t) + 10y(t) = e^{-3t}$, $y(t) = (1/6)\,(2e^{-2t} + e^{-5t} - 3\,e^{-3t})$, $r_1 = -2$; $r_2 = -5$. Como $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ entonces a $x(t) = e^{-3t}$ le corresponde la respuesta $y(t)$ acotada.

1.2. $y''(t) + 7y'(t) + 10y(t) = 3$, $y(t) = (1/10)(-5\,e^{-2t} + 2\,e^{-5t} + 3)$; $r_1 = -2$; $r_2 = -5$. Como $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 3/10$, entonces para $x(t) = 3$, su respuesta $y(t)$ es acotada.

2.1. $y''(t) + 5y'(t) = e^{-t}$, $y(t) = (1/20)\,(\,4 + e^{-5t} - 5\,e^{-t})$; $r_1 = 0$, $r_2 = -5$. Como $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 1/5$ entonces a $x(t) = e^{-t}$ le corresponde la respuesta $y(t)$ acotada.

2.2. $y''(t) + 5y'(t) = 4$, $y(t) = (4/25)(5\,t + e^{-5t} - 1)$; $r_1 = 0$, $r_2 = -5$. Como $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$ entonces a $x(t) = 4$ le corresponde la respuesta $y(t)$ no acotada.

3. $y'''(t) + 5y''(t) = e^{-t}$, $y(t) = (1/100)(-24 + 20\,t - e^{-5t} + 25\,e^{-t})$; $r_1 = 0$; $r_2 = 0$; $r_3 = -5$. Como $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$ entonces a $x(t) = e^{-t}$ le corresponde la respuesta no acotada $y(t)$.

4. $y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 8\,e^{-5t}$, $y(t) = (1/15)(-8\,e^{-2t} + 3\,e^{3t} + 5\,e^{-5t})$; $r_1 = -2$, $r_2 = 3$. Como $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$ entonces a $x(t) = 8\,e^{-5t}$ le corresponde la $y(t)$ no acotada.

5. $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 3$, $y(t) = (3/10)\,e^{t}\,(-2\cos 2t + sen\,2t) + (3/5)$; $r_1 = 1 - 2i$, $r_2 = 1 + 2i$. Así a $x(t) = 3$ le corresponde la salida $y(t)$ no acotada.

En 1.1 y 1.2 con las funciones de entrada que son $x(t) = e^{-3t}$ y $x(t) = 3$, respectivamente, o con cualquier otra también acotada, las respuestas $y(t)$ son acotadas pues la parte real de todas las raíces de la ecuación característica es negativa. Luego el sistema es estable. En 2.1 y 2.2 si bien una de las raíces de la ecuación característica es negativa, por ser la otra nula depende de la expresión de $x(t)$, la acotación de $y(t)$. Para $x(t) = e^{-t}$; $y(t)$ es acotada, y para $x(t) = 4$, $y(t)$ no es acotada.

Luego el sistema es marginalmente estable. En 3, la ecuación diferencial de orden 3 tiene dos raíces de su ecuación característica que son nulas, y pese a que la tercera raíz es negativa, independientemente de la expresión de la entrada acotada $x(t) = e^{-t}$ la salida $y(t)$ no es acotada, pues en ella figura el término $20\,t$ que tiende a $+\infty$ para $t \to +\infty$. El sistema es inestable por tener más de una raíz nula. En 4 para cualquier función $x(t)$ acotada, su respuesta $y(t)$ será no acotada pues en la solución de la ecuación homogénea figura el término e^{3t} que tiende a $+\infty$ para $t \to +\infty$. En 5 figura el término $e^{t}\,(-2\cos 2t + sen\, 2t)$, donde e^{t} tiende a $+\infty$ para $t \to +\infty$ y $-2\cos 2t + sen\, 2t$ fluctúa periódicamente entre -2 y 2, por lo cual la función de salida $y(t)$ es no acotada. De esta forma, en 4 y 5 los sistemas son inestables por tener al menos una de las raíces de la ecuación característica con parte real positiva.

Las observaciones hechas a continuación de los ejemplos nos dan un criterio, sin demostración, para determinar la estabilidad de un sistema a partir de las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial que lo modela, prescindiendo de la transformada de Laplace.

Función de transferencia y estabilidad del sistema (2do. nivel de conocimientos)
Según ya dijéramos, en este nivel estudiamos la estabilidad del sistema analizando la función de transferencia, que requiere de la transformada de Laplace. Sea $f(t)$ una función real causal, definida para $t \geq 0$. El operador *transformada de Laplace* de $f(t)$ es la función $F(s)$ con $s \in C$ definida por la integral impropia convergente

$$L\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt = F(s)$$

Consideremos la ecuación diferencial $y''(t) + b_1\, y'(t) + b_0\, y(t) = x(t)$. La aplicación de la transformada de Laplace requiere conocer las condiciones iniciales del sistema que, por estar inicialmente en estado de reposo, son $y'(0) = y(0) = 0$. Así,

$L[y(t)] = Y(s)$; $L[y'(t)] = sY(s) - y(0) = sY(s)$, $L[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$.
Luego, transformando Laplace ambos miembros de $y''(t) + b_1\, y'(t) + b_0\, y(t) = x(t)$ resulta $s^2Y(s) + b_1\, sY(s) + b_0\, Y(s) = X(s)$, donde $X(s) = L[x(t)]$.

Mediante pasos algebraicos obtenemos $(s^2 + b_1\, s + b_0)\, Y(s) = X(s)$, luego

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2 + b_1\, s + b_0}, \quad \text{es decir} \quad \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + b_1\, s + b_0} = \frac{1}{B(s)} = G(s)$$

En la expresión anterior $B(s) = s^2 + b_1\, s + b_0$ es el polinomio característico de la ecuación homogénea $y''(t) + b_1\, y'(t) + b_0\, y(t) = 0$, y $G(s)$ es la función de transferencia, la cual es el cociente entre las transformadas de Laplace de las funciones de salida y de entrada. Esto significa que la función de transferencia es la función que multiplicada por la transformada de Laplace $X(s)$ de la función de entrada, permite obtener la transformada de Laplace $Y(s) = G(s)X(s)$ de la función de salida.

Analizaremos la estabilidad a partir de las consideraciones que efectuaremos sobre la función de transferencia $G(s)$. Para ello tendremos en cuenta que su orden está dado por el grado del polinomio $B(s)$. Para estudiar la estabilidad necesitamos conocer los *polos* de la función de transferencia $G(s) = 1/B(s)$, es decir, las raíces de la ecuación $B(s) = 0$. En este caso por ser $B(s)$ una función cuadrática, pueden ser dos números reales distintos, o iguales, o ser complejos conjugados, expresados por $p = \alpha \pm i\beta$ con $\alpha,\ \beta \in R$, siendo i la unidad imaginaria.

Para justificar la estabilidad del sistema, con señal de entrada $x(t)$ acotada, deberemos relacionar el signo de la parte real de los polos de $G(s)$ con el comportamiento de la función $g(t) = L^{-1}[G(s)]$, donde L^{-1} simboliza la antitransformada de Laplace. Para ello, buscamos los polos de la función de transferencia, que son los ceros p_1, p_2 de la función característica, con los que se factoriza $B(s) = (s - p_1)(s - p_2)$. Si p_1, p_2 son reales y distintos entonces se descompone $G(s)$ en fracciones simples, obteniendo $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$. Como la linealidad de L implica la de L^{-1}, así la función $g(t)$ resultará $g(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}[G_1(s) + G_2(s)] = L^{-1}[G_1(s)] + L^{-1}[G_2(s)] = g_1(t) + g_2(t)$.

Si cuando $t \to +\infty$, $g_1(t) \to 0$ y $g_2(t) \to 0$, entonces el sistema será estable, como se justificará en el tercer nivel.

En el caso en que p_1, p_2 sean iguales o complejos conjugados, no se descompone $G(s)$, obteniendo $g(t) = L^{-1}[G(s)]$. Si para $t \to +\infty$, $g(t) \to 0$, entonces el sistema también será estable.

A continuación estudiaremos la estabilidad del sistema buscando la relación existente entre los polos y la acotación de $g(t)$. Para ello analizaremos los posibles valores de cada polo (real $p = \alpha$, o complejo $p = \alpha + i\,\beta$) para luego calcular $L^{-1}[G(s)]$.

1) $G(s) = \dfrac{1}{(s-\alpha_1)\,(s-\alpha_2)} = \dfrac{m}{s-\alpha_1} + \dfrac{n}{s-\alpha_2} = G_1(s) + G_2(s)$, si $\alpha_1 \neq \alpha_2$, con $m, n \in R$.

El procedimiento aplicado en $G_1(s) = m/(s-\alpha_1)$ deberá reiterarse en $G_2(s)$. Entonces:

i) Si $\alpha_1 = 0$, entonces $G_1(s) = m/s$. Así $g_1(t) = L^{-1}[G_1(s)] = m$, y $\lim\limits_{t\to+\infty} g_1(t) = m$.

ii) Si $\alpha_1 \neq 0$, entonces $G_1(s) = m/(s-\alpha_1)$. Luego resulta, $g_1(t) = L^{-1}[G_1(s)] = m\,e^{\alpha_1 t}$ tal que $\lim\limits_{t\to+\infty} g_1(t) = 0$, si $\alpha_1 < 0$, siendo a su vez $\lim\limits_{t\to+\infty} g_1(t) = \infty$, si $\alpha_1 > 0$.

2) $G(s) = \dfrac{1}{(s-\alpha)^2}$, si $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ y $\beta = 0$. Luego, $g(t) = L^{-1}[G(s)] = t\,e^{\alpha t}$, entonces $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$, si $\alpha < 0$, y en cambio $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$, si $\alpha > 0$.

3) $G(s)=\dfrac{1}{\big((s-\alpha)+i\,\beta\big)\big((s-\alpha)-i\,\beta\big)}=\dfrac{1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$. Los polos son complejos conjugados. Utilizaremos la función de transferencia, sin descomponerla en fracciones simples. Así,

a) Si $\alpha=0$, $\beta\neq 0$, entonces $G(s)=1\big/(s^2+\beta^2)$. Luego, $g(t)=L^{-1}[G(s)]=(sen\ \beta t)/\beta$

Si bien no existe su límite cuando $t\to+\infty$, $g(t)$ es acotada.

b) Si $\alpha\neq 0, \beta\neq 0$, es $G(s)=1\big/\big((s-\alpha)^2+\beta^2\big)$. Así $g(t)=L^{-1}[G(s)]=e^{\alpha\, t}(sen\ \beta t)/\beta$. Luego, si $\alpha<0$, entonces $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=0$, y si $\alpha>0$, entonces no existe $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)$.

Presentaremos ejemplos que muestren, en cada uno de ellos, la función de transferencia $G(s)$, su antitransformada $g(t)=L^{-1}[G(s)]$, el $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)$ buscando justificar el criterio con la determinación de la forma que alcanza $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[G(s)X(s)]$, cuya acotación se analiza, para determinar así la estabilidad del sistema.

Ejemplos:

1.1. $y''(t)+7y'(t)+10y(t)=e^{-3t}\,; G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{1}{s^2+7\,s+10}=\dfrac{m}{s+2}+\dfrac{n}{s+5}\,;$

$g(t)=L^{-1}[G(s)]=L^{-1}\left[\dfrac{m}{s+2}\right]+L^{-1}\left[\dfrac{n}{s+5}\right]=m\,e^{-2t}+n\,e^{-5t}$, $m,n\in R$; es $g(t)$ acotada y $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=0$; Sin efectuar su cálculo, determinamos la forma de $y(t)$, para poder decidir sobre su acotación. Como $Y(s)=G(s)X(s)=\dfrac{1}{(s+2)(s+5)}\cdot\dfrac{1}{s+3}=\dfrac{a}{s+2}+\dfrac{b}{s+5}+\dfrac{c}{s+3}$; $a,b,c\in R$; y la respuesta $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=a\,e^{-2t}+b\,e^{-5t}+c\,e^{-3t}$; luego $y(t)$ es acotada.

1.2. $y''(t)+7y'(t)+10y(t)=3$. Como $G(s)$ y $g(t)$ repiten los valores de 3.1.1**,** por ser la misma ecuación diferencial homogénea, entonces $g(t)$ es acotada y $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=0$. Determinamos la forma de $y(t)$, para poder decidir sobre su acotación. Como $Y(s)=G(s)X(s)=\dfrac{1}{(s+2)(s+5)}\cdot\dfrac{3}{s}=\dfrac{a}{s+2}+\dfrac{b}{s+5}+\dfrac{c}{s}$; con $a,b,c\in R$, entonces resulta $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=a\,e^{-2t}+b\,e^{-5t}+c$; luego $y(t)$ es acotada.

2.1. $y''(t)+5y'(t)=e^{-t}$, $G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{1}{s\,(s+5)}=\dfrac{m}{s}+\dfrac{n}{s+5}$; con $m,n\in R$

$g(t)=m+n\,e^{-5t}$. Así $g(t)$ es acotada y $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=m$. Pero es $y(t)=a+b\,e^{-5t}+c\,e^{-t}$ pues $Y(s)=\dfrac{1}{s(s+5)}\cdot\dfrac{1}{s+1}=\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s+5}+\dfrac{c}{s+1}$. Como $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=a$, es $y(t)$ acotada.

2.2. $y''(t)+5y'(t)=4$. $G(s)$ y $g(t)$ repiten las expresiones obtenidas en 3.2.1 por ser la misma ecuación diferencial homogénea. Como $Y(s)=\dfrac{1}{s(s+5)}\cdot\dfrac{4}{s}=\dfrac{a}{s^2}+\dfrac{b}{s}+\dfrac{c}{s+5}$, entonces $y(t)=a\,t+b+c\,e^{-5t}$ luego $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=\infty$. Luego, $y(t)$ no es acotada.

3. $y'''(t)+5y''(t)=e^{-t}$, $Y(s)=\dfrac{1}{s^2(s+5)}\cdot\dfrac{1}{s+1}=\dfrac{a}{s^2}+\dfrac{b}{s}+\dfrac{c}{s+5}+\dfrac{d}{s+1}$. Así $y(t)=a\,t+b+c\,e^{-5t}+d\,e^{-1}$. Luego $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=\infty$. Luego, $y(t)$ no es acotada.

4. $y''(t)-2\,y'(t)+5\,y(t)=3$, $Y(s)=\dfrac{3}{s}\cdot\dfrac{1}{[(s-1)+2i][(s-1)-2i]}=\dfrac{a}{s}+\dfrac{b(s-1)+c}{(s-1)^2+4}$,

$y(t)=a+e^{t}\left(-b\cos 2\,t+c\,\dfrac{sen\,2\,t}{2}t\right)$, como $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t}=+\infty$, entonces $y(t)$ no acotada.

5. $y''(t)+y(t)=\cos t$; como $L[\cos t]=\dfrac{s}{s^2+1}$, $Y(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+1)}=\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$.

Así $y(t)=m\,t\,sen\,t$; como $\lim\limits_{t\to+\infty} m\,t=\infty$, entonces $y(t)$ no acotada.

Conclusiones: Resumiremos las características de $g(t)$, según sea la componente real α de los polos de la función de transferencia $G(s)$. Podemos entonces afirmar que: Si $\alpha>0$ por lo menos en uno de los polos, $g(t)$ no será acotada. Si $\alpha<0$ en todos los polos, $g(t)$ es acotada y $g(t)\to 0$ para $t\to+\infty$. Si en algún polo simple es $\alpha=0$ y en todos los restantes es $\alpha<0$, $g(t)$ es sólo acotada. Observemos que para decidir acerca de la acotación de $g(t)$ no se utiliza β.

La acotación de la respuesta $y(t)$, sin necesidad de calcularla, se justifica en forma análoga a la de $g(t)$. Así, $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[G(s)X(s)]$ es acotada, si $Y(s)=G(s)X(s)$ tiene respectivamente sus polos con parte real $\alpha<0$ o polos simples con $\alpha=0$. A su vez, por ser $x(t)$ acotada, $X(s)$ puede tener únicamente polos con parte real $\alpha<0$ o bien polos simples con $\alpha=0$. Pero para que $y(t)$ sea acotada $X(s)$ no puede aportar al producto

$Y(s) = G(s)X(s)$ el mismo polo simple con $\alpha = 0$, que pueda ya tener $G(s)$, pues en ese caso la función de salida $y(t)$ no sería acotada.

En resumen: (i) El sistema será estable si todos los polos de $G(s)$ tienen parte real $\alpha < 0$. (ii) El sistema será marginalmente estable si $G(s)$ tiene polos simples con $\alpha = 0$ y los restantes con $\alpha < 0$. (iii) En los restantes casos el sistema será inestable.

Convolución y función de salida (3er. nivel de conocimientos)
En este parágrafo queremos justificar el criterio seguido para determinar la estabilidad del sistema invariante, modelado por una ecuación diferencial de coeficientes constantes. Para ello conviene recordar la definición de convolución y su relación con la transformada de Laplace. Así diremos que la función $h(t) = (f * g)(t)$ es la convolución de *f* y *g*, si
$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t g(\tau) f(t-\tau)\, d\tau = (g * f)(t)$.

Además, si $F(s) = L[f(t)]$ y $G(s) = L[g(t)]$ entonces $F(s)\, G(s) = L[(f * g)(t)]$, luego $L^{-1}[F(s)\, G(s)] = (f * g)(t)$.

Podemos ahora demostrar que: Si para cualquier función de entrada $x(t)$ acotada, la función de transferencia $G(s)$ tiene todos sus polos con parte real $\alpha < 0$, entonces su función de salida $y(t)$ también resulta acotada, luego el sistema es estable.

Por hipótesis sabemos que $x(t)$ es una función causal acotada, luego cumple $\exists\, M$ tal que $\forall t \geq 0, |x(t)| \leq M$. Así, si para la función de entrada $x(t)$, causal acotada es $X(s) = L[x(t)]$, entonces la función de salida resulta $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)X(s)]$ que, aplicando la integral de convolución será $y(t) = (g * x)(t) = \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\, d\tau$.

Necesitamos ver es que al ser $x(t)$ acotada, entonces $y(t)$ también es acotada. Sabemos que $|y(t)| = \left|\int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\, d\tau\right| \leq \int_0^t |g(\tau)|\, |x(t-\tau)|\, d\tau \leq M \int_0^t |g(\tau)|\, d\tau$.

Pero por el valor negativo que tienen todas las partes reales de los polos de $G(s)$ entonces en los sumandos de $g(\tau)$ figuran funciones exponenciales con exponente negativo que hacen que $\int_0^t |g(\tau)|\, d\tau \leq \int_0^{+\infty} |g(\tau)|\, d\tau = K$, luego. $|y(t)| \leq M \int_0^t |g(\tau)|\, d\tau \leq M\ K$; es decir $y(t)$ es acotada como queríamos demostrar, resultando estable el sistema.

Resumiendo, la estabilidad del sistema es equivalente a que la parte real α de todos los polos de su función de transferencia $G(s)$ sea negativa, lo cual es equivalente a que la integral impropia $\int_0^{+\infty} |g(\tau)|\, d\tau$ sea convergente.

En sistemas estables, si $x(t)$ es acotada, la respuesta $y(t)$ debe ser acotada, lo que se puede determinar por las consideraciones realizadas sobre $G(s)$, sin calcular $y(t)$.

Resumiremos los casos que pueden presentarse: Si $G(s)$ tiene todos sus polos con parte real $\alpha < 0$, el sistema es estable. Si $G(s)$ tiene exactamente un polo con $\alpha = 0$, y los restantes tienen $\alpha < 0$, el sistema es marginalmente estable. En este caso aún cuando la función de entrada $x(t)$ sea acotada, será necesario incluir el análisis de los polos de $X(s) = L[x(t)]$, para decidir si su función de salida $y(t)$, es o no acotada. Por otra parte, es suficiente que un solo polo de $G(s)$ tenga $\alpha > 0$ para afirmar que el sistema es inestable. Mediante la integral de convolución resolveremos ejemplos de cada tipo de sistemas.

Ejemplos:

1. $y'' + 7y' + 10y = e^{-3t}$, $G(s) = 1/(s+2)(s+5)$, $g(t) = (1/3)\,(e^{-2t} - e^{-5t})$.

Así, $y(t) = \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t (1/3)(e^{-2t} - e^{-5t})\, e^{-3(t-\tau)}d\tau = (1/6)(e^{-5t} - 3e^{-3t} + 2e^{-2t})$.

La función respuesta permanece acotada pues $\lim_{t\to+\infty} (1/6)(e^{-5t} - 3e^{-3t} + 2e^{-2t}) = 0$.

2. $y''(t) + 5y'(t) = 4$; $G(s) = 1/s(s+5) = (1/5s) - (1/5(s+5))$; y $X(s) = 4/s$. Luego, $G(s)\,X(s) = 4/s^2(s+5)$. Vemos que $s = 0$ es polo doble de $G(s)\,X(s)$; ello implica que $y(t)$ no es acotada. Resolvemos la integral de convolución, siendo $g(t) = L^{-1}[1/5s] - L^{-1}[1/5(s+5)] = (1/5) - (1/5)e^{-5t}$. Aplicando la integral de convolución $y(t) = \int_0^t x(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \int_0^t 4\left((1/5) - (1/5)e^{-5\tau}\right) d\tau = (4/25)(5\,t + e^{-5\,t} - 1)$.

La función respuesta no permanece acotada pues $\lim_{t\to+\infty} (4/25)(5\,t + e^{-5\,t} - 1) = +\infty$.

3. $y''(t) + 5y'(t) = e^{-t}$. Esta ecuación tiene la misma función de transferencia de la anterior, pero su señal de entrada es la función acotada $x(t) = e^{-t}$. Así $G(s)\,X(s) = 1/s(s+5)(s+1)$. Observemos que $s = 0$ es polo simple de $G(s)\,X(s)$; luego $y(t)$ es acotada. $y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}((1/5) - (1/5)e^{-5\tau})\, d\tau = (1/20)(4 + e^{-5t} - 5\,e^{-t})$ La función respuesta permanece acotada pues $\lim_{t\to\infty}(1/20)(4 + e^{-5t} - 5\,e^{-t}) = 1/5$.

4. $y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 8e^{-5t}$; $G(s) = 1/(s-3)(s+2)$. Tiene un polo en $\alpha = 3$, así el sistema es inestable aunque $x(t) = 8e^{-5t}$ es acotada. Efectivamente, como $y(t) = \int_0^t (8/5)(e^{3\tau} - e^{-2\tau})e^{-5(t-\tau)}\, d\tau = (1/15)(3\,e^{3t} - 8e^{-2t} + 5\,e^{-5t})$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.

Observaciones finales

Para alumnos de distintos niveles de conocimiento, el método aquí descrito persiguió la finalidad de relacionar la ecuación diferencial que modela un sistema de variable continua, lineal, invariante en el tiempo, de señal de entrada acotada, con la estabilidad del sistema,. Es así que se evolucionó desde una inducción intuitiva hasta una justificación formal de los criterios de estabilidad. Es evidente que si se persigue como único objetivo clasificar el sistema en estable, inestable o marginalmente estable, se puede reemplazar la obtención de la función de transferencia $G(s)$ y el análisis de sus polos por la simple determinación de los ceros de la ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea, pues sus ceros serían los polos de la de transferencia.

De los textos mencionados a continuación para complementar este trabajo tienen mayor información los libros de Glyn, J. (2002) y de Wunsch, A. (1999) J. Los restantes sirven básicamente para complementar el estudio de las ecuaciones diferenciales.

Referencias Bibliográficas

Bressan, J, Ferrazzi, A. (1995). *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior*. Buenos Aires: Ediciones UADE.

Edwards, H., Penney, D.(2001). *Ecuaciones diferenciales*. México: Prentice-Hall.

Glyn, J. (2002). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. México: Prentice-Hall.

Wunsch, A. (1999). *Variable compleja con aplicaciones*. Pearson Educación.

Zill D. (1999). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Thomson.