LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS Y EL TRATAMIENTO DEL ERROR

Marta Bonacina - Alejandra Haidar - Claudia Teti
Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas - U.N.R
e-mail: mbacuario@yahoo.com.ar

INTRODUCCIÓN

La potencia de las computadoras permite hoy día realizar cálculos de envergadura y complejidad impensables algunas décadas atrás. Si a este hecho se agrega el de que posibilitan llevar a cabo distintos procesos de "simulación", nos encontramos entonces frente a un dispositivo revolucionador del área educativa.

Sin dudas el ordenador ya ha invadido el aula pero estimamos importante que, a la hora de integrar el recurso informático al proceso de enseñanza y aprendizaje, maestros y alumnos tengamos bien en claro la diferencia entre lo que hace la máquina cuando procesa la información y lo que hace la mente cuando piensa; particularmente, cuando existe cierta ideología que insiste en desdibujar la frontera entre "máquina y mente", con el riesgo cierto de que "razón e imaginación" (facultades que la educación debe exaltar y fortalecer) resulten reducidas a imitaciones mecánicas de grado inferior. Sin dudas, y hasta ahora, la forma de actuar del resolutor mecánico es más simple, menos elaborada que la del actor humano; entre otras cosas porque el primero concentra su actividad en el modo de resolución, en los procesos necesarios para alcanzarla sin llevar a cabo ningún tipo de control sobre la calidad del mismo, mientras que el segundo reconoce la necesidad de tal control y lo ejercita a los efectos de validar resultados.

La consideración de esta tecnología en la enseñanza de cualquier nivel resulta ya ineludible, pero estamos convencidos que esto no puede hacerse sin un cambio profundo en las currículas, sin un importante "reacomodamiento" de contenidos y estrategias de enseñanza y aprendizaje. Se impone un **uso inteligente** del soporte informático, para ello resulta indispensable cuidar que la relación entre alumno y equipo sea interactiva, no mecanicista, que contemple un espacio para el análisis crítico. Bien usado, se constituye en una herramienta didáctica muy rica. Por ejemplo, un campo amplio en posibilidades es el de la simulación de procesos; en él se pueden hallar cuestiones de interés, factibles de ser tratadas con los alumnos y hasta motivadoras del trabajo del mismo. Los problemas que involucran un número muy grande de variables y que pueden ser abordados por este medio son corrientes en el quehacer de la ciencia y tecnología actual (por ej.: los cómputos de química, del diseño de fármacos y de la metalurgia involucran las posiciones espaciales y los momentos de millares de partículas). No escapan a esta problemática las cuestiones financieras, ecológicas, meteorológicas y tantas otras que afectan a la humanidad en estos días. La simulación de procesos permite entonces, y entre otras cosas, mostrar la vitalidad y utilidad de la Matemática contemporánea.

Es una realidad que en los cursos tradicionales el estudiante accede a la Matemática de otros siglos. Esto puede hacer que muchos de ellos crean que la Matemática es una ciencia muerta, que murió allá con Euclides o Pitágoras o, a lo sumo, con Newton o Leibnitz. Ciertamente la Matemática es una ciencia "acumulativa" y por lo tanto el acceso a temas de actualidad requiere de una sólida base conceptual sustentada en los "resultados de siglos pasados". La validez de éstos, dado la base lógica que los determina, es siempre vigente; no está sujeta al paso del tiempo ni a nuevos descubrimientos. Luego, su estudio es ineludible. Pero esto no quita que se pueda buscar y hallar un espacio y tiempo para dar una visión de lo nuevo en Matemática, de su utilidad en la resolución de problemas que "hoy" aquejan a la humanidad. Este propósito no es fácil de concretar y constituye, sin dudas, un desafío docente.

En esta búsqueda, las sucesiones numéricas y particularmente las definidas por recurrencia aparecen como una importante fuente para la confección de estrategias didácticas que contemplen los aspectos mencionados. Este concepto presenta ciertas ventajas, tales como:

- el acceso al mismo no necesita de un importante bagaje teórico previo, y
- existen muchos procesos cuya simulación se puede soportar en él.

Veremos entonces algunos problemas que, según entendemos, contemplan lo conceptualmente explicitado y proporcionan por tanto la posibilidad de lograr una interacción reflexiva y crítica entre docente, alumno y ordenador. Esencialmente involucran a las sucesiones numéricas a través del planteo de procesos iterativos y resaltan la necesidad del manejo cuidadoso de las aproximaciones numéricas y de la elección del algoritmo a utilizar.

ARITMETICA de PUNTO FLOTANTE y ALGORITMOS

En general los errores de truncamiento y/o redondeo (aritmética de computadora) no son muy importantes cuando son pocas las operaciones a realizar o cuando no existen exigencias demasiado rigurosas en cuanto a la precisión del resultado. Pero es bien sabido que esto no es así cuando aumenta el número de operaciones o las exigencias de precisión. Por otro lado un mismo problema puede ser modelado de diversas formas, contándose por lo tanto con distintos algoritmos para su resolución, cada uno de ellos con su respectivo grado de bondad. Esto, sumado a lo anterior, lleva a la necesidad de un manejo cuidadoso de los recursos: el uso o elección incorrecta de un algoritmo puede conducir a conclusiones inaceptables.
Es decir, el empleo de nuevas tecnologías presenta nuevas dificultades, en ellas (calculadoras y /o computadoras) no se almacenan, por ejemplo, números como , $\frac{2}{3}; \pi$; $\sqrt{2}$. En vez de ello emplean lo que se llama aritmética de punto flotante.

1) *ARITMÉTICA DE PUNTO FLOTANTE*

En este sistema cualquier número se representa como:

$$x = \pm 0.d_1 d_2 ....d_k \times 10^n$$; donde di es un dígito y n un entero.

- todo número escrito de esta forma se llama: número de punto flotante;
- $\pm 0.d_1 d_2 ....d_k$ se llama: mantisa ;
- k se denomina: número de dígitos significativos.

Cada instrumento de cálculo tiene una capacidad distinta en cuanto al intervalo de números expresables en la forma indicada.
En cuanto a las calculadoras, éstas permiten normalmente un despliegue o exhibición de entre 8 y 10 dígitos en notación de punto flotante; aunque interiormente trabajan con más cifras que las indicadas para asegurar más precisión en los cálculos. Las de tipo científico proporcionan la representación de números en notación científica, lo cual amplía el alcance a números con orden de magnitud de 10^{-99} a 10^{99}.

Posibles errores en el uso de los instrumentos de cálculo:

Podemos distinguir dos tipos de errores:

a) errores causados por el usuario: oprimir mal una tecla, desconocimiento de jerarquías u otras características del instrumento.
b) errores debidos a las limitaciones propias del instrumento: o errores debidos a algoritmos y procesos internos del mismo, por ejemplo:
   - si un valor sobrepasa el alcance de la calculadora la misma se bloquea e indica “error”.
   - cualquiera sea el instrumento, para poder “desplegar y/o exhibir” números irracionales o racionales con representación decimal periódica, el mismo procede al truncamiento o redondeo de dichos números (*), con la aparición de los consecuentes *errores de redondeo (o truncamiento).*

(*) vimos que la calculadora trabaja con aritmética de punto flotante; luego

$$\frac{2}{3} = 0.666666.............. \text{ se almacena como } \frac{2}{3} = 0.d_1 d_2 ......d_k \times 10^n$$

(I) *truncamiento*: en este caso simplemente se cortan todos los dígitos significativos después del k-ésimo dígito. Así para 2/3, si *k=8* tenemos:

$$\frac{2}{3} = 0.66666666 \times 10^0 = 0.66666666$$

(II) *redondeo*: si $d_{k+1} \geq 5$, entonces se suma uno a d_k y el número resultante se trunca. En caso contrario el número simplemente se trunca. Así para 2/3 y *k=8*:

$$\frac{2}{3} = 0.66666667 \times 10^0 = 0.66666667$$

Luego, y si como sucede normalmente, se opera con estos números, tales errores tienden a acumularse pudiendo llegar al punto de desvirtuar totalmente el resultado.
A continuación y al efecto de ilustrar las situaciones indicadas, consideremos algunos ejemplos:

Problemas de exactitud

Dada $F(x) = \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x - 0.66666665}}$; se pide calcular F(2/3)

a) trabajando con truncamiento: $2/3 \cong 0.66666666$

$\Rightarrow 2/3 - 0.66666665 \cong 0.00000001 = 10^{-8}$

$\Rightarrow F(2/3) = 1/ 10^{-8}$ ➔ **F(2/3)= 100.000.000**

b) trabajando con redondeo: $2/3 \cong 0.66666667$

$\Rightarrow 2/3 - 0.66666665 \cong 0.00000002 = 1/ (2.10^{-8})$

$\Rightarrow F(2/3) = ½ .10^{8}$ ➔ **F(2/3) = 50.000.000**

c) trabajando con fracciones:

$$\Rightarrow F(2/3) = \frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{66.666.665}{100.000.000}} = \frac{1}{\frac{2.10^{8} - 3 \times 66.666.665}{3.10^{8}}} = \frac{3.10^{8}}{2.10^{8} - 199.999.995} = \frac{3.10^{8}}{5}$$

➔ **F (2/3) = 60.000.000** **VERDADERO VALOR**

2) SELECCIÓN DEL ALGORITMO

Muchas veces un mismo problema admite distintos caminos para su abordaje originándose entonces a partir de esta particularidad distintos algoritmos de resolución. Esto plantea otro problema: el de la selección del más adecuado al caso.
Por ejemplo, una sucesión numérica se puede representar recursivamente de distintas maneras; pero ni aún en casos elementales es posible asegurar que la resolución numérica de los algoritmos resultantes produzca la solución correcta.

Veamos un ejemplo de esta afirmación considerando la sucesión $(1/3)^n$.
No es difícil comprobar (desde el punto de vista teórico) que la misma converge a cero y que "recursivamente" se la puede representar a través de los siguientes algoritmos:

Si $x_n = (1/3)^n \xrightarrow{entonces} \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ y,

$\{x_n\}_{n\in N}$ se puede expresar recursivamente como:

Algoritmo I) $x_1 = 1$	Algoritmo II) $x_1 = 1$;
$x_{n+1} = 1/3.\ x_n$	$x_2 = 1/3$
	$x_{n+2} = 10/3.\ x_{n+1} - x_n$

Si en la resolución de ambos algoritmos se realizan los cálculos usando aritmética de redondeo a 5 dígitos en punto flotante; trabajando con una planilla de cálculo se obtiene:

ALGORITMO I		
n	x_n	x_{n+1}
1	1	0,33333
2	0,33333	0,11111
3	0,11111	0,03704
4	0,03704	0,01235
5	0,01235	0,00412
6	0,00412	0,00137
7	0,00137	0,00046
8	0,00046	0,00015
9	0,00015	0,00005
10	0,00005	0,00002
11	0,00002	0,00001
12	0,00001	0,00000
13	0,00000	0,00000
14	0,00000	0,00000
15	0,00000	0,00000
16	0,00000	0,00000
17	0,00000	0,00000

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

ALGORITMO II		
n	x_n	x_{n+1}
1	1	
2	0,33333	0,111098889
3	0,11110	0,03700
4	0,03700	0,01223
5	0,01223	0,00377
6	0,00377	0,00035
7	0,00035	-0,00262
8	-0,00262	-0,00907
9	-0,00907	-0,02763
10	-0,02763	-0,08302
11	-0,08302	-0,24910
12	-0,24910	-0,74733
13	-0,74733	-2,24198
14	-2,24198	-6,72594
15	-6,72594	-20,17781
16	-20,17781	-60,53334
17	-60,53334	-181,59981

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

CONCLUSIONES:

- La resolución numérica del ALGORITMO II muestra que el mismo resulta absolutamente inadecuado para el estudio del carácter de la sucesión; o sea, que existe una diferencia significativa entre ambos algoritmos en lo referente a los cálculos y errores de procesamiento que involucran.
- El uso de la herramienta computacional exige la discusión del algoritmo más adecuado al caso, el análisis de resultados y el estudio en profundidad de la propagación de errores para evitar llegar a conclusiones falsas.

USO DE HERRAMIENTAS DE CÁLCULO EN LA PRÁCTICA DOCENTE

El Informe Cockcroft (1985) afirma que: “el conjunto de las investigaciones prueba de manera fehaciente que el uso de las calculadoras no ha producido ningún efecto adverso sobre la capacidad de cálculo básica".
Así mismo, y ya en 1989, el Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM, por sus siglas en inglés) reafirma esta consideración. En un documento que data de esta época sostiene que la calculadora debe integrarse a la matemática escolar en todos sus niveles y modalidades.
Su uso ahorra mucho tiempo dedicado a practicar cálculos, tiempo que se puede utilizar para que el alumno aprenda a razonar y a resolver problemas. Estos conceptos, vertidos en ese entonces para las calculadoras, entendemos que son extensibles a cualquier de las herramientas de cálculo que han ido apareciendo en las últimas décadas, así también como las recomendaciones que se hacen para su uso. Específicamente se recomienda :

- Aprovechar las potencialidades de estas herramientas de cálculo para concentrarse en el proceso de resolución de problemas y evitar así que las operaciones aritméticas que los mismos demandan desvíen la atención y el esfuerzo respecto del proceso en sí.
- Lograr acceso a aplicaciones matemáticas que van más allá del cálculo aritmético, como ser el desarrollo de algoritmos, la simulación e investigación de procesos, etc.
- Usar estas herramientas para explorar, desarrollar y reforzar conceptos incluyendo estimación, cálculo y aproximación; para hacer conjeturas, generalizar a partir de casos particulares; resolver problemas con métodos heurísticos (por ejemplo: ensayo y error).
- Para experimentar con ideas y patrones matemáticos, investigar conceptos y aplicaciones, y, por supuesto, para cálculos tediosos o imposibles de realizar en forma mental o manual.

Cabe aclarar que el mismo informe no descarta la necesidad de aprender algoritmos, de continuar realizando prácticas con lápiz y papel, cálculos mentales, etc.; en definitiva y fundamentalmente, que aún reconociendo la importancia y utilidad de las calculadoras (computadoras) para operaciones o cálculos complicados señala que la capacidad de estimar resultados, evaluar costos y beneficios, optimizar recursos, etc., debe seguir acompañando el proceso de cálculo cualquiera sea el método o instrumento que se use para llevarlo a cabo, su potencia; que cualquiera sea el caso, al resolver un problema, siempre debe existir una instancia previa dedicada a discutir y decidir el método y/o estrategia más apropiada para su abordaje y resolución.
En la misma publicación se sostiene también que estos medios, bien usados, pueden resultar instrumentos valiosos para enseñar (aprender) Matemática; o sea, pueden resultar una ayuda didáctica para desarrollar conceptos y explorar, experimentar. Además y sin dudas llegará el día en que estos instrumentos de cálculo estén al alcance de todos, sean parte indiscutida de nuestras vidas, por lo tanto conviene que nuestros alumnos aprendan a usarlos pero, y fundamentalmente, a usarlos inteligentemente.

A este respecto, creemos que existen preguntas que pueden ayudar a la reflexión crítica:

- ¿puede un instrumento de cálculo ayudarnos a la introducción temprana de los números decimales, de la notación científica? , ¿qué papel jugarían las fracciones en tal caso?
- ¿puede constituirse en un auxiliar didáctico?, ¿si, no, por qué, cómo?
- ¿cuál o cuáles serían las estrategias didácticas que potencien el aprovechamiento de las nuevas tecnologías?, ¿serían las de la enseñanza tradicional o serían de otro índole?
- ¿Cómo asegurar una postura crítica del usuario hacia los resultados que obtiene con estos superpoderosos instrumentos de cálculo? ,
- ¿en qué momento se permiten los mismos en un examen? ¿Cambia el tipo de examen?.....

La forma de realizar operaciones combinadas o el trabajo con números aproximados, con gráficos, etc. depende del tipo de instrumento de cálculo con que se trabaje, luego, podemos proponer ejercicios que a la vez de permitir que nuestros alumnos exploren su calculadora, resulten también útiles e instructivos para nuestros objetivos pedagógicos. Por ejemplo:

- Conociendo la calculadora para ello se pide rellenar una tabla con distintos ejercicios donde para cada operación indicada se pide calcular (mentalmente o con lápiz y papel) y luego calcular con la calculadora, confrontar ambos resultados y concluir.

Nº	Manual	Calculadora	Secuencia correcta en la calculadora
$\frac{20}{\sqrt{3^2+4^2}}$	$\frac{20}{5}=4$		(depende del tipo de calculadora)

¿Por qué puede resultar útil este problemita? Porque existen alumnos (y no uno) que aún en la universidad continúan distribuyendo la raíz con respecto de la suma; o sea alumnos para los cuales: $\frac{20}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{20}{7}$

- Descubrimiento de patrones: podemos plantear cuestiones simples como,

a) Calcule: 12345679 x 9
12345679 x 18
12345679 x 27…………., y formule una conjetura.

b) Explore: 11^2 , 111^2 , 1111^2 , 11111^2 , ……........, formule una conjetura y acorde a ella diga cuanto será 111111111^2, verifique su conjetura.

c) Experimente qué pasa con $\sqrt{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[8]{a}, \ldots\ldots.$ para $a > 0$ y formule una conjetura.

d) Experimente qué pasa con $a^2, a^4, a^8, \ldots\ldots\ldots$ para $a > 0$ y formule una conjetura.

e) Analice la verdad o falsedad de la siguiente proposición:
"para todo n entero positivo; $n^3 - n$ es divisible por 3"

OBSERVACIÓN:

El ejercicio (b) puede ser útil para discutir y mostrar los errores a los que puede conducir el uso indiscriminado de un elemento de cálculo. En este caso, mostramos que, según la herramienta de cálculo que se use puede suceder que no pueda verificar la respuesta (en particular si ésta usa aritmética de punto flotante)

#1: $11^2 = 121$

#2: $111^2 = 12321$

#3: $1111^2 = 1234321$

#4: $11111^2 = 123454321$

#5: "CONJETURA: el resultado es un número que comienza con 1 , "

#6: " luego los siguientes dígitos van aumentando de a uno "

#7: " hasta llegar a la cantidad de unos que hay en la base de la potencia,"

#8: "para a partir de allí comenzar a descender, hasta llegar a 1"

#9: " "

#10: "luego el valor correspondiente a una base con nueve 1`s, sería: "

#11: $111111111^2 = 12345678987654321$

#12: "____"

#13: " con una calculadora obtenemos "

#14: $111111111^2 = 1.23456789 \cdot 10^{16}$

#15: " El verdadero valor es el conjeturado; luego, con la calculadora tenemos un error de:

#16: $12345678987654321 - 12345678900000000 = 87654321$

Sin dudas la aparición de las computadoras ha provocado una verdadera revolución en el mundo cultural de nuestra época. En pocos años y en función de los aportes producidos por la informática han surgido nuevos conocimientos, nuevas tecnologías y, por ende, nuevas posibilidades en el tratamiento de problemas (y “nuevas necesidades”).

La *simulación de procesos* se encuentra entre estas nuevas posibilidades de tratamiento de un problema. Resulta una herramienta importante a la hora de resolver cuestiones complejas para las cuales los métodos cuantitativos no son eficaces o no pueden aplicarse.

Algunos objetivos factibles de alcanzar a través de este camino son:

a) mostrar la actividad Matemática actual, su preocupación por desarrollar o mejorar modelos explicativos de fenómenos naturales.
b) enseñar a integrar técnicas analíticas, gráficas y computacionales.
c) trabajar en la confección e interpretación de modelos matemáticos sencillos.
d) mostrar la utilidad del modelo matemático para analizar un proceso o problema.

Robert Shannon (1988) define la simulación como “*el proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso, y conducir experimentos con este modelo con el propósito de entender el comportamiento del sistema o evaluar estrategias con las cuales se pueda operar sobre él*”.

Esta definición muestra las grandes posibilidades que brinda esta herramienta como así también permite entrever las `nuevas necesidades´ que generan las nuevas tecnologías y los tratamientos que ellas posibilitan. Por ejemplo, la experimentación con un modelo conlleva generalmente la necesidad de generar datos y/o investigar parámetros a los fines de analizar el comportamiento global del mismo o la sensibilidad a distintos parámetros. Tales procesos no son, en general, ni simples ni obvios y requieren de capacidades específicas que no son en general contempladas para su desarrollo en los cursos tradicionales.

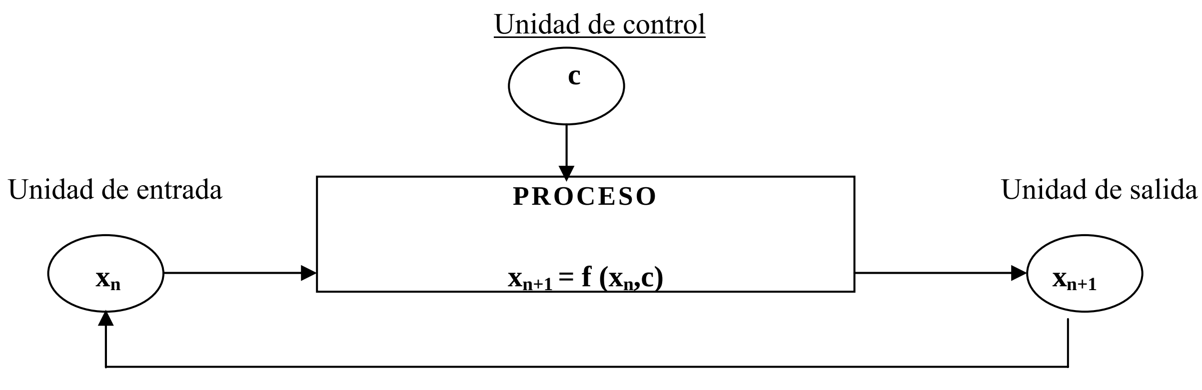
El aumento en la potencialidad de las computadoras de última generación tiene un costo; el gran número de variables que la misma permite manejar exige, por ejemplo, un mayor cuidado y profundidad en el estudio de la propagación de errores. La existencia de distintos caminos para la resolución de un mismo problema requiere del análisis previo de los “métodos” y “software ” disponibles a los efectos de prever la obtención de conclusiones erróneas.
Suele ocurrir que la dificultad intrínseca de garantizar la precisión de las soluciones numéricas crezca exponencialmente con el número de variables, llegándose incluso al caso en que el problema supere la capacidad resolutiva del ordenador. Lo notable es que este problema puede observarse también en situaciones que comportan un pequeño número de variables o que involucran en su formulación matemática una ley perfectamente definida y “regular”.

Un ejemplo de esto puede verse en las sucesiones numéricas. La mayoría de las veces las sucesiones numéricas constituyen modelos que presentan un comportamiento regular; el ´normalmente esperado´ para una entidad matemática durante mucho tiempo, tanto que por siglos no se prestó atención a los casos que no presentaban tal faceta de uniformidad y se descartaba su estudio por considerarlos casos ´patológicos´ carentes de interés científico.
Pero en las últimas décadas se comenzó a prestar atención a estos casos “raros”; o sea a aquellos que estando caracterizados por leyes determinísticas no garantizaban la presencia de “orden” ni de “regularidad” en el comportamiento de los valores obtenidos. A esta curiosa circunstancia se le dio un nombre y constituye una de las nuevas ramas de la investigación matemática: el CAOS DETERMINÍSTICO.
La investigación del caos puede servir para descifrar sus enigmáticos mensajes y estudiar con fines útiles cuestiones como por ejemplo: el funcionamiento del corazón humano, la actividad cerebral, el movimiento de los fluidos, las fluctuaciones demográficas, de valores negociables, etc. Tales investigaciones se pueden llevar a cabo a través de los llamados MODELOS MATEMÁTICOS.

¿CÓMO SE PUEDE “PRESENTAR” UN MODELO MATEMÁTICO?:

Una forma, a través de ecuaciones o sistema de ecuaciones diferenciales.
Estas últimas son la herramienta para la representación de los SISTEMAS DINÁMICOS, entendiéndose por tal todo sistema que desde un *estado inicial* evoluciona hacia un *estado final*, siendo el tiempo la variable esencial del proceso. Estos sistemas estudian entonces procesos en movimiento; de aquí que muchos procesos de la Naturaleza puedan ser modelizados a través de ellos. Uno de los más frecuentes y que suele usarse como ejemplificación es la evolución de una especie en un ambiente determinado.

Generalmente en un proceso en movimiento se observa que el valor de las variables en un momento dado queda determinado por el valor anterior. Luego estos procesos admiten ser simulados por los llamados “procesos realimentados”, entendiendo por proceso realimentado, aquel que, matemáticamente, puede ser representado por un “proceso de iteración” donde la salida de un paso es la entrada del paso siguiente.
Se puede representar por el siguiente esquema:



Hay procesos realimentados continuos o discretos. Por ejemplo, los modelos de población estudian los cambios producidos hora a hora ó año a año, por lo que generalmente se utilizan modelos discretos. Estos modelos pueden ser representados por fórmulas iterativas del tipo:

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = \mathbf{f}(x_n); \ \forall \ n \in N \end{cases}$$

Se observa así que este tipo de proceso a partir de un dato inicial x_0 *genera* una **sucesión**:

$\mathbf{x_0}$; $\mathbf{x_1} = f(x_0)$; $\mathbf{x_2} = f(x_1)$; .... ; $\mathbf{x_{n+1}} = f(x_n)$; ....

El interés de la simulación está en él análisis de la sucesión de puntos (estados) generados; o sea, en estudiar qué pasa con el estado del sistema a medida que el tiempo transcurre.
Esto, matemáticamente, equivale a preguntarse acerca del **límite de la sucesión**:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{x_n} = ?$$

Dado que la sucesión resultante se obtiene a partir de una fórmula iterativa decimos entonces que la misma está definida "por recurrencia". Este tipo de sucesiones resultan la herramienta matemática por excelencia para la simulación de procesos realimentados. Evidentemente este importante hecho determina también un cambio de *status* para este tipo de definición hasta ahora prácticamente ignorado en los cursos tradicionales de Matemática.

Para la ejemplificación de procesos realimentados los modelos de población resultan muy apropiados. Así, si con P_n indicamos la cantidad de individuos de una especie en el momento "n"; según las condiciones o variables que ponderemos, podemos obtener distintos modelos para el cálculo del número de individuos en cada "n" considerado. Así los más conocidos son:

$$\text{(I)} \qquad P_{n+1} = P_n + k.\, P_n$$

$$\text{(II)} \qquad P_{n+1} = k.\, P_n\,(1 - P_n)$$

(II) El segundo modelo (propuesto por Verhulst) ajusta mejor a la realidad pero en este caso no hay manera de expresar explícitamente P_n en función de la población inicial y "n", por este motivo no queda otra opción que realizar la iteración.

Aquí el parámetro **k** constituye una constante ecológica relativa al crecimiento de la población (propia por lo tanto de cada población y a determinar en cada caso). Este parámetro se halla generalmente entre 0 y 4.

P_n representa el porcentaje de la población óptima, en este caso normalizada a 1; o sea, varía entre 0 y 1. ($P_3 = 0.7$ se interpreta como que la población en el instante 3 es el 70% de la población máxima posible para esa especie).

Estos modelos son significativamente diferentes en cuanto a los cálculos que involucran y también en cuanto a todo lo señalado hasta aquí (errores de redondeo, bondad del modelo, etc.). También son diferentes respecto de otras cuestiones de las que no hablamos y hoy día comienzan a adquirir cada vez más relevancia. Por ejemplo en este caso y a pesar de lo simple de la regla de recurrencia, esta nos conduce hasta las mismas puertas del ***caos.***
Para ejemplificar esto podemos proponer una serie de casos que se pueden trabajar tanto con una calculadora, con una planilla de cálculo como, por supuesto, con un software matemático. En este último caso las conclusiones que se puedan sacar serán mucho más ricas y ajustadas a la realidad, particularmente porque se podrá acudir a la graficación del proceso circunstancia que, en un caso como este donde la propagación de errores resulta altamente peligrosa, constituye un importante aporte para la discusión de resultados.

En el siguiente ejemplo el parámetro **k** es el protagonista del drama:

$$P_0 = \alpha \quad ; \quad P_{n+1} = \mathbf{k}\,.\,P_n\,.(1 - P_n)\,; \ \forall \ n \geq 1$$

Empíricamente (*en la simulación*), partiendo de P_0 = 0.6 se puede constatar que la variación del parámetro **k** modifica drásticamente el comportamiento del sistema dinámico:

k = 2 ➔ los valores convergen a 0,5

k = 3,25 ➔ se observa un "período", los valores comienzan a oscilar entre 0,4953 y 0,8124

k = 4 ➔ los valores no parecen estabilizarse ni mostrar ningún comportamiento previsible. *El comportamiento es caótico.*

Esta diferencia de comportamiento también se puede observar, para valores de k muy próximos uno del otro. El hecho de que pequeñas modificaciones del parámetro modifiquen en forma tan importante el comportamiento del sistema hace que el estudio del mismo sea más complejo de lo que aparece a primera vista.
La ecuación que caracteriza este sistema recibe el nombre de ecuación logística y fue formulada por P. F. Verhulst en 1845.

En el caso de la ecuación logística se pudo concluir la existencia de un valor crítico:

$$\Lambda = 3.569945.$$

Para $1 < k < \Lambda$; el comportamiento de la sucesión de puntos es regular; equivalentemente: converge o presenta oscilaciones.

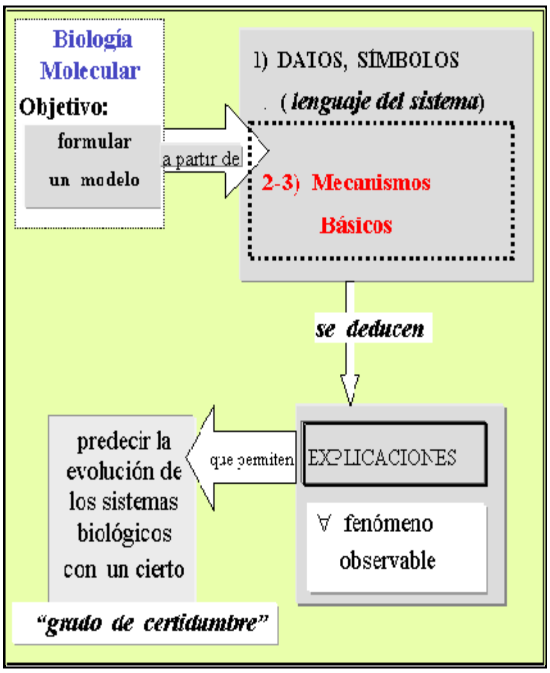
Para $k > \Lambda$; el comportamiento de la sucesión de puntos es caótico, presentándose algunas "ventanas" de comportamiento regular

Sin dudas la experimentación y juego con los distintos parámetros en la búsqueda de similitudes y diferencias en ecuaciones del tipo de la propuesta, presenta la posibilidad de enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática haciéndolo vital, entretenido y porque no, más efectivo.

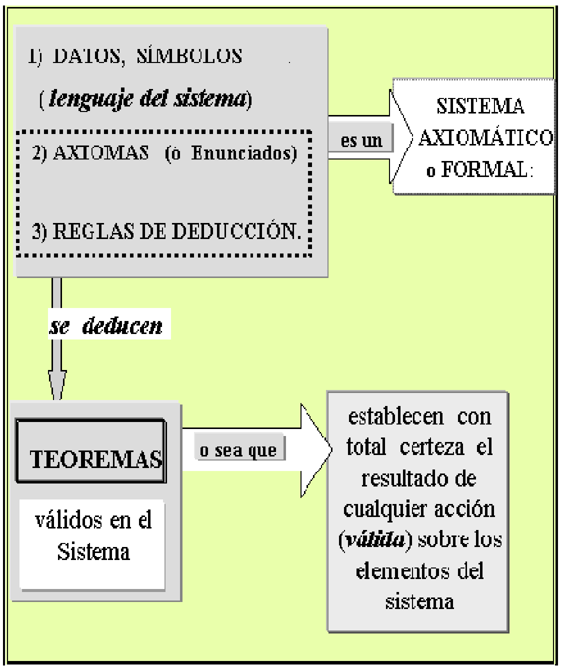
EL PARADIGMA EMERGENTE

La Matemática proporciona sin dudas herramientas con la que trasladar a otras Ciencias la "certidumbre" que le es propia. La modelización de un Sistema Real al modo de los Sistemas Formales, asegura la verdad de las conclusiones obtenidas al interior del mismo. Así, en una Teoría Axiomática (teoría desarrollada acorde al método axiomático) las dificultades inherentes a la defensa de la Tesis prácticamente "desaparece". Esta propiedad que "se atribuye" al método axiomático hace que hoy se lo privilegie sobre otros, se lo considere EL método científico por excelencia. (Ver cuadro)

EJEMPLO DE UNA TEORÍA MECANICISTA



ESTRUCTURA DE UNA SISTEMA FORMAL



A partir de la interrelación planteada entre los elementos del sistema (punto de partida del modelo), se desata una reacción en cadena consistente en una sucesión mecánica de cambios en los elementos del sistema (en el sentido que se procede acorde a “reglas” válidas en el mismo) hasta llegar a una conclusión lógicamente incuestionable, por ende, y acorde a la concepción dominante (la mecanicista) , incuestionable.
En realidad: ¿es esto tan así? ; ¿concluye aquí el proceso? Para quienes hemos comenzado a dudar de la capacidad de este paradigma (sus métodos) para contribuir al crecimiento en armonía del hombre, el proceso no concluye aquí, faltan considerar dos cuestiones:

- el tratamiento del “error” o “ruido de fondo” , ¿ es el acertado ?.
- las políticas surgidas al amparo de verdades “netamente lógicas”, ¿Evalúan el VALOR SOCIAL de tales verdades?

En resumen, entendemos que la idea actual de Ciencia engendra fenómenos inabordables al interior del paradigma mecanicista, pone claramente en evidencia la necesidad de revisar nuestras concepciones acerca de Ciencia, Matemática y, en particular, las relativa al tratamiento del “error” .

CONCLUSIONES:

A modo de conclusión estimamos que la experimentación y juego con los parámetros presentes en una ecuación, la búsqueda de similitudes y diferencias, ofrecen la posibilidad de enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, hacerlo más vital, entretenido y efectivo a la vez que nos permite acercar al alumno o al menos mostrarle la Matemática que hoy se requiere para dar solución a los problemas globales que nos aquejan.
Remarcamos que este tipo de trabajo se puede hacer aún cuando sólo se disponga de una calculadora, así como también que el mismo se puede graduar perfectamente según el nivel e instancia del aprendizaje de que se trate. Más aún, puede contribuir perfectamente al “espiralamiento” del aprendizaje ya que podemos trabajar con sucesiones y límite de sucesiones sin necesidad de definir estos conceptos. Consideramos que los ejemplos desarrollados abren las perspectivas respecto a un nuevo espacio a explorar a los efectos de enriquecer la tarea áulica.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Bachelard, G (1991): *La Formación del Espíritu Científico*. México: Siglo XXI.

Chalmers,A (1987).*Que ese esa cosa llamada ciencia*. Madrid: Siglo XXI.

Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

De Guzmán, M. (1997). *Aventuras Matemáticas. Una ventana hacia el caos y otros episodios*. Madrid: Pirámide.

Eggen, P. (1999).*Estrategias docentes: enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Gil Pérez, D.; De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, Tendencias e Innovaciones*. Madrid: Popular S.A.

Kuhn, T (1980). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: F.C.E.

Litwin, E.(2005, junio). *De caminos, puentes y atajos: el lugar de la tecnología en la enseñanza.* Conferencia Inaugural II Congreso Iberoamericano de Educación y Nuevas Tecnologías, Buenos Aires, Argentina.

Mochón S. (1997). Modelos matemáticos para todos los niveles. *Actas 11 Relme*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Moreno, L. La educación matemática hoy. *Revista EMA*. 2 (2), pp. 101-114.

Shannon,R.(1988).*Simulación de sistemas diseño, desarrollo e implementación*.México: Trillas.

*Las calculadoras y la educación de los jóvenes (*S.f.). Recuperado el 10 de Octubre de 2008, de http://www.eduteka.org/DeclaracionCalculadoras.php.

Principios para matemáticas escolares. (NCTM) (S.f.) .Recuperado el 2 de Noviembre de 2003 de http://www.eduteka.org/PrincipiosMath.php.