Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática
ISBN: 978-980-7464-17-8

ASPECTOS LINGÜÍSTICOS DEL ÁLGEBRA UNIVERSITARIA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA[1]

Andrés González R.
UPEL IP Maracay
agorondell@yahoo.es
Pensamiento Algebraico. Nivel Universitario

RESUMEN

El componente algebraico ocupa un espacio preponderante en la formación inicial de los profesores de matemáticas (FIPM), lo cual se puede constatar en el diseño curricular para tal especialidad de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Se ha insistido en torno a la importancia de vincular dicho componente con el álgebra escolar presente a lo largo del currículo del sistema educativo venezolano. Sin embargo, hemos detectado que los futuros profesores tienen dificultades para manejar el simbolismo del álgebra lineal, lo cual tiende a magnificarse dada su riqueza sígnica, manifestándose en: (a) la poca capacidad que muestran algunos para desenvolverse con los frecuentes cambios de representación limitándolos para distinguir el objeto algebraico representado y para aplicar sus propiedades distintivas; y (b) la escasa presencia de intercambios entre el lenguaje natural y el simbólico. Estas anomalías las identificamos como concernientes al pensamiento algebraico (PA) de la FIPM. Nos preguntamos ¿Cuáles elementos del PA activan los estudiantes para profesor en el aprendizaje del Álgebra universitaria? Llevamos a cabo una investigación cualitativa, fenomenológica e interpretativa y basada en un estudio de caso. Las teorías referenciales fueron de los registros de representación semiótica de Duval y la Objetivación de Radford, también consideramos la Epistemografía de Drouhard por su interés en las escrituras algebraicas. Dado que el investigador fue el mismo docente que dictó el Curso que sirvió de base para la obtención de la información la técnica fue la observación participante. Los instrumentos fueron los Diarios de clase con los cuales se elaboró la Cronogénesis. Los hallazgos y las conclusiones aquí presentadas constituyen un aspecto parcial referido particularmente a asuntos emergentes de naturaleza lingüística. Develamos el Lenguaje Algebraicamente Significativo (LAS), conformado por la Expresión Oral Algebraicamente Significativa (EXOAS) y la Lectura Algebraicamente Significativa (LEAS) los cuales, desde nuestra perspectiva, debieran propenderse a desarrollar durante la FIPM.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, lenguaje, formación inicial de profesores de matemáticas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Alcanzar un nivel deseable de pensamiento algebraico en los escolares pasa porque los profesores de matemáticas adquieran conciencia del papel que ocupa el álgebra educativa en el currículo, el cual tiene que ver con los procesos de razonamiento y generalización, los cuales se hacen presentes en los procesos modelación, resolución de problemas, entre otros. En esto cobra importancia la elaboración de una visión del álgebra escolar más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales. En este

[1] Este trabajo forma parte de la tesis doctoral *Procesos del Pensamiento Algebraico en Entornos de Aprendizaje Mediados Tecnológicamente* presentada en la UCV y dirigida por el Dr. Fredy E. González.

sentido, el educador matemático debe ser competente en lo que se refiere al manejo del lenguaje algebraico.

Por ende, es importante que el profesor de matemática propenda al desarrollo del pensamiento algebraico de sus estudiantes de forma consciente, sin descuidar el rigor disciplinar y mediante el manejo de estrategias didácticas efectivas. De tal forma que el despliegue de este pensamiento adquiere particular relevancia en la formación inicial de estos profesores.

Consecuente con lo anterior, el perfil específico vigente de la especialidad de matemática de la UPEL señala que un docente debe ser capaz de desarrollar en sus estudiantes hábitos y esquemas lógicos de pensamiento, y de orientar el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática utilizando estrategias que permitan, el logro de un pensamiento formal, por lo que se puede concluir que es necesario que el educador matemático posea un óptimo desarrollo de su pensamiento algebraico a fin de que pueda promoverlo en sus estudiantes

En este contexto es menester tomar en cuenta el papel que juega actualmente el simbolismo algebraico pues, como afirma Devlin (2003), sin símbolos algebraicos, una gran parte de la Matemática no sería posible. Es decir, para comunicar ideas matemáticas el símbolo es insustituible, no es posible hacerlo sin recurrir a él, puesto que "en Matemáticas, el símbolo convencional constituye el único medio de evocar el concepto mismo" (Pimm 2002, p.222).

Sin embargo, diversos trabajos (Chevallard, 1985; Kieran y Filloy, 1989; Filloy, 1999), dan cuenta de las dificultades u obstáculos que se oponen a la comprensión y al aprendizaje del álgebra (escolar). Entre estas dificultades sobresalen las experimentadas por los alumnos cuando se avanza a un sistema de representación más abstracto, en el cual aumenta tanto el poder del lenguaje simbólico como el grado de generalización.

La aparición del álgebra simbólica significó una transformación extraordinaria no solo en la manera de hacer, sino en la forma de enseñar y aprender Matemáticas pues se trató de una revolución en el lenguaje matemático, particularmente el algebraico, que durante mucho tiempo estuvo basado en el lenguaje natural; la trascendencia de este hecho lo describe Gómez-Granell (1997) de la siguiente manera: "El uso de la notación mediante letras posibilita la independencia con respecto al objeto que se representa, el símbolo cobra entonces un significado que va más allá del objeto simbolizado" (p.208). Este sistema de símbolos rápidamente se extendió y popularizó haciendo olvidar, como advierte Pimm (2002) que el Álgebra "en el sentido de la formulación y manipulación de expresiones de generalidad, puede construirse sin necesidad de emplear letras, utilizando, por ejemplo, palabras o símbolos no alfabéticos" (p. 193).

ISBN: 978-980-7464-17-8

A pesar de que en la práctica manipulativa el símbolo sustituye al objeto, es necesario tener conciencia de la ambigüedad que los une y/o separa. Lo particular no es que el símbolo no sea un buen representante del objeto, pues el problema no se presenta en la representación como tal, sino que la entidad matemática que aspira representar es probable que se desnaturalice, se pierda en el nivel de las operaciones que ejecuta el estudiante, y esto es posible pues se opera sobre el símbolo sin intentar ver si las operaciones que se desarrollan son significativas en términos del objeto que éste representa (Artigue, 2003).

En el contexto del Álgebra Lineal Miranda (2012) cree que entre las dificultades que conlleva están las diferentes representaciones que puede tener un mismo objeto, y para las cuales no resulta muy claro para un estudiante que se trata del mismo objeto, además está la variedad de lenguajes y representaciones semióticas con los que se estudian. En este sentido, Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) llaman obstáculo del formalismo al hecho de que los estudiantes puedan ser capaces de manipular las representaciones formales simbólicas sin tener las suficientes aptitudes para comprenderlas.

En consecuencia, didácticamente es posible que el estudiante se confunda al interpretar el objeto matemático a través del símbolo, lo que a su vez no es algo trivial tomando en cuenta que "en Matemáticas, el símbolo convencional constituye el único medio de evocar el concepto mismo" (Pimm 2002; p. 222).

En lo concerniente a un curso de Álgebra Lineal siempre está presente la exigencia en el desempeño de la formalidad. Desde el punto de vista matemático, lo formal está relacionado con el buen uso de los símbolos. En este sentido la lógica ha hecho una contribución enorme; pues desde esta perspectiva es claramente diferenciable lo sintáctico y lo semántico, en este contexto la formalización tiene que ver con el manejo correcto del simbolismo con independencia de los significados. Por ejemplo, un razonamiento formal, es el proceso de establecer un razonamiento válido sin importar el contenido semántico de los símbolos involucrados (esto es, sin importar lo que significan los términos que se emplean). A manera de ilustración, en la regla de inferencia lógica conocida como *Modus Ponendo Ponens* partir de una implicación lógica (p $\rightarrow$ q) se llega a concluir el consecuente con solamente afirmar el antecedente (p); esto, en símbolos, significa que la forma proposicional $[(p \rightarrow q) \land p] \rightarrow q$ es una tautología. En consecuencia, para cualesquiera significados proposicionales de las letras p y q se tendrá un razonamiento válido.

Freudenthal (1983) señala que "un lenguaje es puramente formal si sus expresiones se pueden manejar, imitar y comprobar si son correctas (esto es, si exhiben la regularidad requerida) sin prestar atención a su significado, que quizá sea incluso absurdo" (p.3). Esto sólo es posible mediante el manejo del significado de los elementos lingüísticos significativos y dominar el funcionamiento de los elementos estructurantes (Freudenthal, 1983; p. 3).

Todo esto debe adquirir sentido a nivel de un Curso de álgebra lineal, con transferencias hacia los procesos de demostración. Sin embargo, hemos observado dificultades de los alumnos al manejar el lenguaje algebraico propio de un curso de esta naturaleza, inclusive en estudiantes con un satisfactorio desempeño en el curso inicial de álgebra, por lo que se confirma lo que dice Thom (1973) (citado por Pimm, 2002) cuando señala que "el problema fundamental de la enseñanza de las Matemáticas consiste en la construcción de significados más que en la cuestión del rigor" (p. 32).

En la administración de este Curso también hemos confirmado las discrepancias que presentan los estudiantes con respecto a la capacidad del concepto de espacio vectorial para resolver problemas nuevos y su valor como noción generalizadora, unificadora y formalizadora (Artigue, 2003); es decir, una cantidad importante de estudiantes no sienten la necesidad de recurrir a la construcción abstracta de espacio vectorial para resolver la mayoría de los problemas de los cursos de álgebra lineal, obviando así el valor epistemológico esencial del Álgebra Lineal. En torno a esto mismo Miranda (2012) cree que la complicación se presenta ya que los problemas asociados se resuelven usando la definición dada junto con argumentos derivados de la Lógica, esto hace que muchos estudiantes sientan que la materia es demasiado abstracta y que los contenidos son objetos que no tienen relación con algo que se pueda aplicar en la realidad

Según (Artigue, 2003) romper esta anomalía pasa por desarrollar conexiones complejas entre los modos de razonamiento, los puntos de vista, lenguajes y sistemas de representaciones simbólicas. A lo cual podemos agregar lo altamente positivo que pueden resultar las aplicaciones cuya amplitud forma parte sustancial de esta área.

Objetivo de la investigación

Establecer los aspectos del pensamiento algebraico activados por los futuros profesores de matemática durante el aprendizaje del álgebra universitaria.

MARCO TEÓRICO

Para esta investigación son importantes los aportes relacionados con el papel que juega la semiótica en la Educación Matemática. En consecuencia, se tomaron como referentes conceptuales las teorías de *los Registros de Representación Semiótica* de Duval y *la Objetivación* de Radford. Además, *la Epistemografía* de Drouhard por el foco que pone en el registro escrito algebraico.

En el campo matemático el lenguaje puede manifestarse de formas diversas, por medio de sistemas de escritura, como numerales, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes diagramas, esquemas, entre otros. También se incluyen los enunciados verbales, un segmento, un símbolo, una figura o una fórmula matemática; estos objetos Duval (2002) los denomina representaciones semióticas y son medios de

ISBN: 978-980-7464-17-8

exteriorización de las representaciones mentales para fines instrumentales y/o comunicativos.

Duval se plantea dos preguntas las cuales considera que constituyen el núcleo del aprendizaje de las matemáticas: (a) ¿Cómo se aprende a cambiar de registro?, y (b) ¿cómo se aprende a no confundir un objeto con la representación que se propone? Según él, muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se originan en el desconocimiento que tienen los profesores sobre los fenómenos relativos a estas cuestiones.

Señala que es esencial para la actividad matemática que se puedan movilizar varios signos en el curso de una misma acción, o bien que se tenga la habilidad para elegir un signo en lugar de otro. Postula que: (a) La actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación, y (b) los estudiantes deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos.

Para Duval estos dos elementos son posibles, metodológicamente, mediante dos clases de transformaciones de las representaciones semióticas: *la conversión* y *el tratamiento*; y, metacognitivamente, empleando como estrategia el concepto de *coordinación interna*, la cual debe ser construida entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; ya que sin esta coordinación "dos representaciones diferentes significarían dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos "contextos de representación" diferentes del mismo objeto" (Duval, 2006; p. 145).

La *conversión* es la transformación de una representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. Se trata de una transformación externa a un registro. Mientras que el *tratamiento* de una representación se entiende como su transformación en el mismo registro en el cual ha sido formulada. Se trata entonces de una transformación interna a un registro.

Por su parte, la teoría de la objetivación de Radford (2014a, 2014b), puede equipararse como una pedagogía de la Educación Matemática. Se identifica como una del tipo Sociocultural, forma parte de las corrientes emergentes en educación matemática que surgieron en el contexto de la PME, su motivo principal es entender el problema del papel de la cultura, de la historia y de la sociedad en el aprendizaje del alumno. Esta teoría otorga un papel relevante a la acción (entendida como labor o actividad) y la palabra (lenguaje). De acuerdo con esto la teoría vygotskyana es uno de sus soportes teóricos.

Al colocarse el lenguaje entre sujeto y objeto hace que el objeto sea percibido por el sujeto ya no como el objeto puro, sino como objeto transformado por la acción que ejercen los lentes que ofrece la cultura significación (Radford, 2010a).

Radford (2010a) considera que los signos y símbolos utilizados en el álgebra escolar se han considerado como un sistema semiótico por excelencia. Sin embargo, también admite que, desde una perspectiva semiótica, las palabras y los gestos también pueden ser signos de naturaleza algebraica, sin que esto signifique que deban ser equivalentes o que simplemente puedan sustituirse unos por otros, esto es así debido a que no es en sí misma la simbología utilizada lo que en realidad identifica un sistema semiótico, sino las significaciones que hacen las personas.

La idea de Medios Semióticos de Objetivación (MSO), en la que se incluyen artefactos, gestos, símbolos, palabras, es considerada como recurso semiótico. Para Radford (2010a, 2010b) estos MSO no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo, sino mediadores de nuestros actos intencionales, portadores de una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva de las generaciones precedentes. De acuerdo con Radford (2010b), estos medios semióticos estratifican el objeto matemático en niveles de generalidad de acuerdo con la actividad reflexiva que ellos median.

En cuanto a la Epistemografía de Drohuard (2009): (a) Es un modelo de tipo lingüístico para describir las expresiones simbólicas del álgebra elemental y las transformaciones formales de reescritura; (b) defiende la idea de que no se puede hablar de la significación dejando de lado la sintaxis (convenciones ligadas a la escritura de las expresiones algebraicas); (c) da cuenta de la complejidad que supone el dominio de las escrituras simbólicas algebraicas; (d) se interesa por las relaciones entre las distintas categorías que él establece en el proceso de comprensión de las escrituras; y, (e) permite analizar los conocimientos de naturaleza diferente puestos en juego y cuál ha sido su evolución histórica al realizar la actividad matemática.

Para Drouhard (2009), las palabras y los enunciados en lenguaje natural se constituyen en herramientas semiolingüísticas.

MARCO METODOLÓGICO

Dado que el interés fue en comprender el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes en un contexto lo más natural posible, que tomara en cuenta sus debilidades para contribuir a superarlas, pero también considerara sus fortalezas para emplearlas como herramientas para el desarrollo del aprendizaje del álgebra no sólo de forma individual, sino en interacción con sus pares diseñamos y desarrollamos la investigación desde un punto de vista cualitativo con un enfoque fenomenológico e interpretativo y enmarcada en un estudio de casos. A tal efecto, para recaudar los datos el investigador se valió de un Curso de Álgebra lineal del cual el mismo era facilitador, por eso la técnica de la que se echó mano fue la observación participante.

Desde el comienzo del Curso se instruyó a los estudiantes a que escribieran un Diario en el cual debían describir los pormenores objetivos y subjetivos con relación al desarrollo del Curso. Dicho Diario fue el instrumento que se empleó en esta pesquisa.

Luego, mediante las herramientas analíticas desarrolladas por González (1998), a partir de estos Diarios se obtuvo la Cronogésis del Curso, la cual se convirtió en una herramienta metodológica clave pues en ella se plantean pormenorizadamente momentos y episodios regulares para cada una de las sesiones de clase que conformaron el Curso junto con inferencias elaboradas por el investigador.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

La teoría de Radford (2010a, 2010b) incluye el término enseñanza y aprendizaje significativos con lo cual alude a: formas pedagógicas de acción que conllevan una comprensión profunda de los conceptos matemáticos. Estableciendo una analogía entre el planteamiento teórico anterior, a continuación presentaremos el tipo de lenguaje que hemos denominado *Lenguaje Algebraicamente Significativo* (*LAS*).

Producto del análisis de los Diarios reportamos la presencia de un tipo de lenguaje que hemos denominado *Lenguaje Algebraicamente Significativo*, (*LAS*) el cual se manifiesta mediante dos componentes: la *Lectura Algebraicamente Significativa* (*LEAS*) y la *Expresión Oral Algebraicamente Significativa* (*EXOAS*).

El primer componente, *LEAS*, de acuerdo con nuestro punto de vista, se aproxima a la noción de traducción, no se realiza desagregando partes, sino mediante la integración y globalización. Lo que subyace es el que el todo (la comprensión de lo que subyace en el símbolo) es mucho más que la suma aislada de las partes (la comprensión de cada una de las partes desconectadas). Es decir, *LEAS* es una opción ante la lectura literal (*LL*), o lectura a nivel de los símbolos (Pimm, 1999); sin embargo no la niega ya que, en la práctica, el primer contacto del discente con el simbolismo es a través de una *LL*.

Desde el punto de vista didáctico y a semejanza de lo que ocurre en el aprendizaje de la lectura en los primeros niveles de escolaridad, esta lectura algebraicamente significativa pasa por una fase retórica.

El segundo componente, *EXOAS*, es la puesta en práctica de la verbalización para comunicar inteligible y eficientemente ideas algebraicas, por ejemplo en la identificación de objetos, conceptos y procesos algebraicos. En general, ocurre como consecuencia de la puesta en práctica de la *LEAS*.

Comencemos con un ejemplo de *LL*:

> *El tema principal de esta clase fue Gram-schmidt el cual indica que si poseemos betas los cuales representan vectores que son independientes a partir de ellos se puede construir una base ortogonal de alfas (DC)*

Aun cuando el estudiante afirma *"los cuales representan vectores",* la consideración global del comentario nos hace creer que sobreestima el papel de las letras griegas al considerarlas efectivamente como vectores como consecuencia de una *LL* (El contexto del planteamiento es el llamado teorema de Gram-Schmidt, en el cual a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes se puede construir una base ortogonal del espacio vectorial).

En algunos casos, mediante *LL* los estudiantes se encuentran muy pendientes de la morfología del símbolo lo que les impide tratar su contenido, veamos esto a través de los comentarios que hacen JC y MS:

> *Se dio inicio a la clase con el siguiente ejercicio [A+ B/ C] = [A/C] + [B/C] con un producto interno. Aquí <u>no lograba comprender el asunto de la notación entre paréntesis y corchetes</u> (JC)<u>La simbología fue la que me presento confusión</u>, como lo fue cuando <u>utilizamos los corchetes para decir que estaríamos hablando de generador</u> (MS)*

De continuar esta fijación con la notación entre paréntesis y corchetes existe una posibilidad de no comprender la propiedad que se le está indicando. En el siguiente comentario GB nos muestra dos posibles variantes de lecturas de la expresión $\alpha + \beta$:

> *Nuestras experiencias matemáticas me parece que contribuye de forma positiva en nuestro aprendizaje, ya que nos permite <u>detectar nuestras fallas con relación al lenguaje</u> y la forma de expresar de manera escrita el significado de los símbolos que muchas veces lo que hacemos y lo que <u>hemos venido haciendo es leerlos y llamarlos por un nombre especifico, por ejemplo alfa más beta, siendo alfa y beta vectores, también podríamos decir la suma de dos vectores</u> (GB)*

En la primera parte del comentario anterior, se realiza una lectura "símbolo por símbolo" (En la cual incluso a nivel verbal no guarda diferencia con la lectura de $\alpha, +, \beta$) muy asociada a las primeras experiencias de lecturas aritméticas realizadas en los primeros años de escolaridad; mientras que en la segunda, se ofrece una opción en la que la operación aparece antes que los vectores, o sea en ésta queda en evidencia la práctica de una lectura de mayor nivel de elaboración.

Observemos el comentario que hace CB en relación con la *LL* de los símbolos:

> *Si no estamos atentos podríamos confundir esta notación con una idea vaga de un slash, lo cual en nuestro contexto no tiene sentido, por otra parte no permitiría el desarrollo del lenguaje algebraico, sino de forma contraria sólo lo estaremos limitando sin permitirnos la maravillosa oportunidad de ver, leer y contextualizar lo que otros no pueden, es decir, mientras que algunas personas <u>sólo leen esto H_a como H sub a</u>, nosotros al visualizar esta notación algebraica reconoceremos de forma inmediata que se trata de la clase lateral derecha de H asociada al elemento a, lo mismo ocurre para otras situaciones enmarcadas en contextos algebraicos (CB)*

Nótese que cuando dice lenguaje algebraico lo alude en su versión retórica, en este caso CB cuestiona la *LL* de los símbolos, en este caso de "/ " y de "Ha", por lo cual expresa la necesidad de llenarlos de significados. En el primer caso relevándolo de su significado usual como signo de la división o el denominado "*slash*", y develando el objeto producto interno que hay en él; y, en el segundo, reiterando la necesidad de suprimir la *LL* (al decir "H sub a", Nótese como el registro escrito recoge exactamente la expresión oral, en lo que sigue los registros orales se plasman de la misma manera) por la respectiva comprensión del objeto subyacente que, en este caso, como bien lo dice CB, se trata *de la clase lateral derecha de H asociada al elemento a*.

Con el símbolo de pertenencia, "$\in$ ", de acuerdo con la experiencia del autor, es muy frecuente que haya una especie de fijación en su lectura, esto ocurre cuando no se emplean expresiones sinónimas para expresar la idea matemática subyacente. En torno a esto, NA reporta un caso que se ubica en la dirección que hemos señalando al identificarla como una *LL*:

> *Al comenzar a leer el material, éste nos proporcionaba la siguiente notación f $\in Z[X]$, la cual leemos generalmente como: "f que pertenece a $Z[X]$", lo que carece de significado como lo indicaba el docente en ese momento ya que simplemente leemos pero no nos detenemos a interpretar cada detalle de la expresión y lo que involucra. Particularmente, éste hecho me hizo ruido porque si reflexionamos sobre dicha expresión nos damos cuenta que al leerlo de esa manera no estamos haciendo una interpretación adecuada de la notación, y por ende, no nos arroja la información allí involucrada de una manera clara (NA)*

En este caso, la expresión "*carece de significado*" que empleó no es quizás la más exacta en la descripción que estamos haciendo, no recoge lo que queremos decir, sin embargo su reflexión en cuanto a que *al leerlo de esa manera… no nos arroja la información allí involucrada de una manera clara* probablemente haga referencia a la necesidad de propiciar otro tipo de lectura.

En algunos casos, durante el proceso de aprendizaje se sobreestima el papel del signo, al otorgarle cualidades que no posee, por ejemplo, obsérvese como en el siguiente comentario de EC le confiere al símbolo el poder de identificar *per se* el objeto:

> *la suma "+" en el cuerpo se refiere a la suma de escalares, pero en el espacio vectorial se refiere a la adición de vectores, pienso que debería haber alguna forma de diferenciar el símbolo en el cuerpo y en el espacio, puesto que si uno no está claro en el contexto va tener muchos problemas (EC)*

La importancia que EC le atribuye a la sintaxis, en torno al uso de corchetes y paréntesis, también resulta sobreestimada:

> *Otra cosa en cuanto a los símbolos fue el significado de los paréntesis y corchetes, encerramos en paréntesis o corchetes dependiendo si hablamos del producto interno o de las operaciones con los elementos (EC)*

En los dos comentarios de EC, se puede observar cómo la semántica del símbolo la hace recaer sobre él, obviando el hecho de que su riqueza no está en el símbolo, sino en las relaciones que se establezcan en los cambios de representación en dónde es vital la creación de significados.

Veamos los siguientes comentarios de AH y AP en ellos nos muestran que los símbolos son un medio, y no un fin en sí mismos; y que en álgebra es posible darle sentido a tanta letra:

> *<u>Aprendí que al momento de estudiar es necesario primero conocer el lenguaje matemático</u>, luego entender el significado de lo que expresa cada concepto, posteriormente generalizar tal concepto y <u>no apegarse a los símbolos o letras</u> que exponga algún teorema o definición dado el caso, además <u>debemos leer adecuadamente</u> porque esa es la base para la comprensión, el buen entendimiento y la comunicación (AH)*

> *En muchas ocasiones me sentí aturdida porque no comprendía lo que estaba sucediendo, al momento que usted <u>colocó las maneras de enfrentar el ejercicio</u> como lo conocíamos <u>logré darle sentido a tanta letra,</u> que en un principio no entendía (AP)*

AH reitera la importancia de leer adecuadamente dejando de lado el apego a los símbolos. Desde nuestra interpretación, su opinión deje entrever que los signos, desde el punto de vista matemático, no son el mensaje, son instrumentos semióticos que permiten la transmisión de ideas matemáticas.

A continuación, AH prosigue su comentario, haciendo el contraste entre un leer caletreado y la importancia de darle significado a los símbolos:

> *<u>En este curso de álgebra lineal</u> me he dado cuenta que no todo lo que aprendí caletreado me sirvió, ya que <u>se trabaja en función de la importancia del significado de los símbolos matemáticas</u>, ¿Qué es?, ¿Para qué sirve?, ¿Cómo lo podemos abordar?, <u>¿Con qué otro contenido lo puedo relacionar?, ¿Qué conclusiones puedo obtener de tal expresión?.(AH)</u>*

Ahora bien, ante la *LL*, como se ha mostrado, existe la posibilidad de otro tipo de lectura que puede conducir a un *LAS* que hemos caracterizado mediante dos componentes, *LEAS* y *EXOAS*. En una primera aproximación puede aparecer como un parafraseo, para ejemplificarlo tomemos el comentario de YG:

> *Comenzamos a interpretar la definición que nos presenta el autor Hoffman de p.i, además el profesor <u>nos pidió que la parafraseáramos</u> para una mejor interpretación, lo cual <u>me permitió darme cuenta de que se puede ver al p.i como una función de dos variables y es interesante como dos expresiones tan distintas como éstas:(α|β) y φ(α,β) sean iguales</u> (YG)*

En el comentario anterior se muestra como *LEAS* se constituye en una herramienta lingüística con la cual se posibilita una atención a la sinonimia; en este caso su enunciación verbal, *EXOAS*, permite aceptar y comprender las dos representaciones semióticas, $(\alpha|\beta)$ y $\varphi(\alpha,\beta)$, de un mismo objeto algebraico, en este caso el de producto interno.

La siguiente, es la reflexión de GT, en ella queda en evidencia el contraste conceptual existente entre *LL* y *LEAS*:

> *Además ya no vamos a ver a [S], como un corchete S corchete, sino que cada vez que aparezca esa notación va a significar SUBESPACIO GENERADO POR S* (GT)

ISBN: 978-980-7464-17-8

Cabe destacar que el uso de las mayúsculas corresponde a la escritura original de GT, posiblemente lo hizo para llamar la atención en torno a la fuerte discrepancia que encontró entre decir *corchete S corchete* y *subespacio generado por S.*

Sin embargo, tal tipo de lectura no está exenta de dificultad para los estudiantes, por ejemplo, en los siguientes comentarios se puede ver la complejidad que significa para los ellos asumir *LEAS*:

Estuve leyendo como dijo, corrido hasta el teorema 9, los transcribí, pero no me puedo concentrar para recordarlos con definición, dijo que los parafrasearan pero no es fácil. (JM)

El siguiente ejemplo, lo podemos considerar como una comparación entre LL y LEAS, en el que además se resalta la ventaja de ésta última, dado el acento que la primera coloca sobre la morfología del símbolo:

Lo más relevante fue la introducción de nuevos símbolos, ejemplo F ∞ particularmente a simple vista cualquiera diría que es efe elevado al infinito, pero realmente su significado va mas allá, el cual representa el conjunto de sucesiones del tipo infinitas. Igualmente, F[x] quizás para muchos o para nosotros mismos vemos simplemente un par de corchetes; literalmente es así, pero en nuestro contexto su significado es un subespacio generado de F ∞ el cual cada elemento es un polinomio de F (DC)

La riqueza de significados que ofrece *LEAS,* mediante su componente *EXOAS*, es mostrada a continuación a través de los siguientes tres comentarios referidos al símbolo: $p \rightarrow q$:

Esta clase también me pareció muy importante ya que logré enriquecer mi lenguaje matemático porque por lo menos en introducción al álgebra cuando yo tenía p→q decimos que eso significaba p implica a q, o tomábamos a p como el antecedente y a q como nuestro consecuente, o a p como nuestra hipótesis y a q como nuestra tesis, pero en esta clase aprendí que este tipo de notación se puede manifestar como una condición necesaria. Por lo menos en el hecho de un ejercicio particular que decía "Demuestre que si el entero c es raíz de f entonces c divide al termino independiente de f" pero lo que nos quiere decir este ejercicio es que es necesario que c sea divisor del término independiente para que c sea una raíz del polinomio, quizás nos ponemos a pensar en ese ejercicio y en otros que hemos trabajado y nos damos cuenta de la necesidad de enriquecer nuestro lenguaje matemático (AP)

Quiero hacer referencia a la siguiente notación p → q; que surgió de la lectura de un ejercicio durante la clase, pues, el docente basándose en ello expuso la notación indicada anteriormente y nos pregunta: ¿Cuál es la condición necesaria en este ejercicio? Ó ¿ Cómo se le llama a p?, situación que me confundió un poco y además no entendía a que se estaba refiriendo con eso ya que por primera vez había escuchado que "p era la condición suficiente", pues, desconocía que dicha implicación dependiendo del contexto en el que se esté trabajando se le llamará de la siguiente manera; a p puede llamársele como antecedente, hipótesis o condición suficiente; y a q se le puede llamar consecuente, tesis o condición necesaria, situación que capto mi atención porque en cursos anteriores no se indicó lo mencionado anteriormente(NA)

Otra parte que también fue muy llamativa es lo que realmente es la forma verdadera como que nombre recibe p → q ya que p es la condición suficiente y q es la condición necesaria de lo cual nunca lo había escuchado llamar así, siempre p implica a q (MM)

Una vez más, al decir lenguaje matemático, se observa que AP lo refiere en la versión oral; en este caso, además, colocó un ejemplo muy significativo para la idea que aquí estamos manejando. Creemos que las primeras lecturas que se hace del símbolo $p \to q$ son necesarias en un primer momento (*LL*), pero no suficientes tal como ella lo destacó al indicar sus interpretaciones iniciales. En la lectura que ha sido develada no se niegan éstas últimas, sino que las incluye, porque tal como los tres lo afirman, las siguientes son lecturas válidas para este símbolo: p implica a q, p es antecedente y q es consecuente, o p es hipótesis y q es tesis.

Sin embargo, en este caso, una manera de acceder al contenido de este símbolo (lo que AP identifica con "*lo que nos quiere decir este ejercicio*") es a través de la otra lectura basada en la identificación de las condiciones necesaria y suficiente. En la siguiente tabla se comparan ambos tipos de lecturas:

<table>
<tr><td colspan="2">Si el entero c es raíz de f entonces c divide al termino independiente de f</td></tr>
<tr><td>Lecturas usuales (válidas)</td><td>Lectura que plantea AH (LEAS)</td></tr>
<tr><td>c es raíz de f es la hipótesis, y la tesis es que c divide al termino independiente de f</td><td rowspan="3">Es necesario que c sea divisor del término independiente para que c sea una raíz del polinomio</td></tr>
<tr><td>c es raíz de f implica que c divide al termino independiente de f</td></tr>
<tr><td>c es raíz de f es el antecedente y
c divide al termino independiente de f es el consecuente</td></tr>
</table>

Tabla N° 1. Comparación entre LL y LEAS mediante la expresión $p \to q$

En el contexto de aprendizaje de los polinomios un problema que surge está siempre asociado con la pregunta: ¿cuáles son sus raíces?, por lo que esta *LEAS*, en la columna de la derecha, se ve nuevamente como una herramienta que mejora las lecturas plasmadas en la columna de la izquierda.

Otro hecho que no debe pasar inadvertido, en los tres comentarios anteriores, es que la *LEAS* develada en la expresión $p \to q$ se efectuó de derecha a izquierda, lo cual es un cambio en la manera usual de leer. Otro ejemplo de este cambio de orientación, mediante *LEAS*, se obtiene considerando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\left|\left(\alpha|\beta\right)\right| \le \|\alpha\|.\|\beta\|$ la cual puede ser leída verbalmente de izquierda de derecha como es lo usual, empleando, por ejemplo, las expresiones a lo sumo, no sobrepasa, entre otras. En este caso diremos, el valor absoluto del producto interno de dos vectores es a lo sumo el producto de las normas de los dos vectores. Otra forma, menos usual, de leerla, a través de *LEAS*, es de derecha a izquierda enunciándola oralmente así: el producto de las normas de dos vectores es al menos (o por lo menos) el valor absoluto del producto interno de los dos vectores, etc.

En ocasiones, la *LL* puede ser la causa de la imposibilidad de resolver un ejercicio o problema, por ejemplo:

ISBN: 978-980-7464-17-8

> *Me pareció muy importante el hecho de todos los símbolos matemáticos que debemos tener en cuenta pues para estas alturas cuando escribimos el ejercicio que era [1, (ax+b), (ax+b)^2 (ax+b)^3]=F[x], creo que ninguno nos percatamos de lo que nos estaba diciendo el ejercicio pues veíamos un corchete con toda esa expresión pero es de gran importancia tener en cuenta que en este contexto cuando tomamos en cuenta un corchete pues estamos hablando de un subespacio generado (AP)*

En este comentario *AP* contrasta la *LL* con la lectura comprensiva que se nos ha develado, en la cual hay un mayor nivel de comprensión que el ofrecido por la *LL*. La primera expresión subrayada es producto de una *LL* realizada por los resolutores del problema, la consecuencia es que, como dice *AP, "veíamos un corchete con toda esa expresión"*. Este énfasis en la forma del símbolo, en su aspecto externo, en el contexto de resolución de un problema lo que ofrece es silencio pues no hay aporte efectivo para la solución. Todo lo cual contrasta con la elocuencia de la otra expresión subrayada (consecuencia de *LEAS*) que destaca *AP* así: *"estamos hablando de un subespacio generado"*

La *LL* es señalada por algunos estudiantes como sinónimo de lectura lineal en el cual los símbolos están colocados ahí, inmutables, por ejemplo a continuación se mostrará un caso a través de la escritura de los conjuntos:

> *Por otro lado, en esta clase desarrollamos un ejercicio donde definíamos N = {α ϵ V | T(α) = c.α}, lo que generalmente hacemos cuando se nos presentan este tipo de ejercicios es leer de forma lineal lo planteado sin desglosar parte por parte e interpretar la expresión dada, muchas veces leemos por ejemplo T(α) = c.α (es decir, T de alfa igual a c por alfa) en vez de decir esta expresión indica que aquí están todos los múltiplos escalares del vector α. Todas la situaciones anteriormente son de suma importancia en nuestro aprendizaje, es por ello, que la labor que realiza el docente durante cada sesión de clase en cuanto al lenguaje matemático es fundamental porque durante la misma me ha permitido reflexionar y darle la importancia adecuada a cada una de estas expresiones. (NA)*

Este ejemplo es destacable, pues cuando dice que en el conjunto están *todos los múltiplos escalares del vector α* (Esta descripción de NA se corresponde con el subespacio generado por el vector *α*) no es correcta la afirmación porque no considera la transformación T*)*; sin embargo, NA ha tomado conciencia de la debilidad que supone la *LL*, (NA lo ejemplifica con: "en el caso de *T(α) = c.α, es decir, T de alfa igual a c por alfa");* ese pudiese ser el primer paso. Desde nuestro punto de vista está en el camino indicado de *LEAS* (Una lectura correcta es que en el conjunto están todos los vectores del espacio que son múltiplos escalares de sí mismos mediante la transformación T).

Pasar de una lectura LL a una como la que estamos describiendo no parece darse fácilmente. Como ocurre con el aprendizaje de cualquier contenido matemático, algunas personas tienen que invertir más tiempo en ello o les puede resultar más complejo. Veamos esto en los siguientes tres comentarios de RR:

> *Los comentarios del profesor se referían a los subespacios generados por los vectores, aquí me resultó interesante y muy insistente la aclaratoria y afianzamiento que tiene el profesor*

cuando insiste en hacernos ver que el espacio generado por S lo denotamos [S], pero que no veamos paréntesis, resulta hasta cómico que yo decía que fastidio ya eso se sabe, y el prof. dura minutos haciendo la misma aclaratoria cada vez que lee o está explicando el espacio generado; pero lo cómico es que cuando alguien leía las copias del Hoffman no pronunciaba espacio generado por S, sino que empezaban a balbucear otras cosas o se confundían y detenían la lectura(RR)

La verdad me correspondió leer a mí, y no sé si es porque lo estoy leyendo yo pero me resultó fácil" (RR)

Comenzamos igual leyendo y realizando la debida explicación, sin embargo, la persona que estaba leyendo se enredaba y tendía a confundir los símbolos con otras cosas (RR)

Para entender el contexto de estos comentarios se señalará que en el desarrollo del Curso eran habituales las prácticas de lectura en voz alta. De acuerdo con las primeras observaciones de RR, ha alcanzado un buen nivel de *LEAS* en el respectivo contenido algebraico. En las siguientes, RR estaba leyendo en una condición activa, pues lo hacía directamente; y, de acuerdo con su reflexión le resultó favorable. En el tercer comentario, RR estaba pasiva, oyendo la lectura que hacía su compañero; sin embargo éste no ponía en práctica una *LEAS* y al llegar a los símbolos *balbuceaba* o los confundía *con otras cosas.*

A continuación se mostrará una evidencia de que para algunas personas existe un vínculo identifica torio entre símbolo y objeto simbolizado, por ello develar este último consiste en descifrar esta "lógica" que los conecta:

Cuando leí la definición no establecí relación entre la definición dada y la notación asociada a la misma, es decir, $S^{\perp}$ significa Complemento Ortogonal. Luego, haciendo una lectura más detallada (paso a paso) me di cuenta de la notación asignada a dicha definición (NA)

Siguiendo la metáfora de la matemática como lenguaje esto pudiese ser comparado con la misma situación que ocurre en el aprendizaje de un nuevo idioma al cual se le quieren transferir las mismas propiedades del idioma materno.

En toda la anterior descripción que se ha hecho de *LEAS* lo referido a la verbalización ha quedado implícito, por lo que a continuación procuraremos un mayor acercamiento:

En la mayoría de los casos cuando nos presentaban una simbología o notación simplemente leemos lo planteado pero no le damos la interpretación adecuada y esto se convierte en una dificultad al momento de resolver ejercicios o demostraciones, ya que carece de significado la lectura realizada. De hecho, durante la clase el docente nos indicaba la siguiente notación $[T]\ B_V\ B_W$ *lo cual generalmente leemos como está expresado pero no lo llenamos de significado, es decir, no expresamos con palabras representa aunque sabemos su aplicabilidad; sin ser capaces de decir que tenemos "una matriz asociada a T según las bases* B_V *y* B_w *o la matriz cuyas columnas son las coordenadas de* $T(\alpha_1), T(\alpha_2), \ldots, T(\alpha_n)$ *según la base* B_W *(NA)*

El anterior comentario es destacable si se toma en cuenta la morfología del símbolo: Un corchete, una T mayúscula y dos B mayúsculas diferenciadas por dos subíndices; pero

ISBN: 978-980-7464-17-8

además ocurre que la letra T denota una transformación lineal, y las dos B bases de dos espacios vectoriales los cuales están identificados con los respectivos subíndices. Con toda esta descripción es de entender su naturaleza compleja; por lo que decir en palabras que el mismo es *una matriz asociada a T según las bases B_V y B_w* constituye una *EXOAS*

En la siguiente tabla se compara la práctica de una *EXOAS* con otras dos expresiones que no lo son:

Aprendí que cada vez que tengamos dF[x] no vamos a decir que "d por F[x]", sino que se refiere a todos los múltiplos de d (GT)	*Las matrices en general no son conmutativas (AH)* *Los polinomios en realidad son estructuras algebraicas (AH)*

Tabla N° 2. Comparación de una EXOA con otra expresión

En la columna derecha se le atribuyen, respectivamente, a las matrices y polinomios las condiciones de ser *conmutativas* y de *estructura algebraica*. La primera, es una condición específicamente de una operación; mientras que la segunda, le corresponde a los conjuntos. En consecuencia, dichas expresiones carecen de significado, y, por lo tanto no son representativas de una *EXOAS*.

En la siguiente tabla se hace un resumen comparado de ambas modalidades de lecturas del lenguaje algebraico.

Lectura literal/lineal (LL)	**LEAS**
Ambiguo	Dinámica
Énfasis en la forma	Flexible
Rigidez –estática (sintáctica y semántica)	Énfasis en el fondo
Lectura direccionada	No hay sentido predefinido en la lectura
Estancamiento contextual	Amplitud contextual y conceptual
Pobreza discursiva (sin desplazamiento por la sinonimia y la polisemia)	Expresivamente rica
Desconoce el SMS	Enriquece el SMS

Tabla N° 3. Comparación entre *LL* y *LEAS*

CONCLUSIONES

La descripción que hemos hecho del lenguaje algebraicamente significativo (*LAS*) está en correspondencia con el punto de vista metafórico que considera la matemática como un lenguaje, dicha asociación ha sido asumida por diversos autores (Pimm, 2002; Freudenthal, 1983); este es pues nuestro punto de vista el cual sirvió como un eje transversal que impregnó muchas de las aseveraciones que realizamos. También, está a tono con el lenguajeo de Maturana (1988) mediante el cual los seres humanos logramos activar emociones, pues ellas están presentes en el más puro y excelso razonar (p. 60).

La *EXOAS* adquiere relevancia para la construcción de conceptos, ya que además de las fases manipulativa, ideográfica y simbólica (González, 2005) el aspecto verbal es una de las fases por las que transita dicha construcción en la cual el matemático, profesional o aprendiz, *lenguajea,* es decir, habla acerca de aquellos asuntos de los que se ha dado cuenta durante las otras fases (González, 2005).

Finalmente, creemos que a través del *LAS* podemos explicar los frecuentes abusos notacionales (llamados también abusos del lenguaje), así como también muchas de las situaciones que emergen del hecho que el lenguaje natural sea un metalenguaje en la enseñanza de la Matemática. También es posible sacar provecho conscientemente de las metáforas; por ejemplo, en una definición o teorema es posible identificar sujetos y predicados con sus correspondientes adjetivos y adverbios.

REFERENCIAS

Artigue, M (2003). ¿Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X (2), 117-134.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique á l algébre dans l'enseignement des mathématiques au college. Premiére partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petix x*, 5, 51-94.

Devlin, K. (2003). *Mathematics: The Science of Patterns.* New York: Owl Books

Drouhard, J.P. (2009). *Epistemography and algebra*. Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. January 28th - February 1st 2009, Lyon (France). Recuperado de http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/cerme6.

Duval, R. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico, I, 3-26

Esquinas, A. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica docente*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid. España

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. 20, Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados.* México: CINVESTAV, 2001

Gómez-Granell, C. (1997). Hacia una epistemología del conocimiento escolar: El caso de la Educación Matemática. En María J. Rodrigo y José Arnay, (Comps), *La construcción del conocimiento escolar.* España: Paidos

González, F. (2005). Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. *Fundamentos en humanidades,* Año VI, Nº I, 11/2005, 37-80.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), 229-240.

ISBN: 978-980-7464-17-8

Maturana, H. (1988). Lenguaje y realidad: el origen de lo humano. *Arch. Biol. Med. Exp. 22,* 77-81.

Miranda, E. (2012).*Generación de modelos de enseñanza–aprendizaje en el álgebra lineal. Primera Fase: Transformaciones Lineales*. Recuperado de http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/30_eduardo_miranda_montoya.doc.

Pimm, D. (2002). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillel, J. (1999). *Evaluación de un diseño de la enseñanza del álgebra lineal: El caso de transformaciones lineales*. Recuperado de: http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=2011497.

Thom, R. (1973). Modern mathematics: does it exist? En A. G. Howson (ed), *Developments in Mathematis Education*, Cambridge University Press, Cambridge