Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática
ISBN: 978-980-7464-17-8

ASPECTOS FUNDAMENTALES DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Andrés A. González Rondell[1], Oswaldo J. Martínez Padrón[2] y José F. Berríos Piña[3]
[1] UPEL IP Maracay, [2,3] UPEL El Mácaro
agorondell@yahoo.es, ommadail@gmail.com, joseferminp@gmail.com
Pensamiento Algebraico. Educación Primaria y Universitaria

RESUMEN

Estudiar los Sistemas de Numeración (SN) empleados por determinados grupos socioculturales exige un compendio de referentes que precisa la revisión de otros. Para materializar esta pretensión se realiza esta investigación documental, apoyada en un análisis de contenido, a fin de ir precisando y caracterizando definiciones, representaciones, reglas, procesos, técnicas o principios de conteo, tipo de operaciones y orden de colocación de los numerales. Luego del análisis correspondiente a SN ya declarados como binario, decimal, maya, romano, egipcio, babilónico y hiwi, aparecieron detalles que obligan a seguir indagando sobre estas aseveraciones, debido a que algunos parecen no soportar la clásica definición de SN. Por ser una investigación en proceso, queda pendiente abrir nuevos espacios de búsqueda que permitan despejar si algunos de ellos son realmente SN o simplemente numeraciones particulares asociados con sistemas, técnicas, procesos, métodos o principios de conteo o de enumeración. Igual hay que seguir revisando, repensando, caracterizando e, incluso, estableciendo aspectos que fundamenten los SN, incluyendo lo que tiene que ver con números, numerales, bases, simbologías, cantidad de símbolos y valores que asumen los numerales, según la posición que ocupan en su organización. También obliga a seguir indagando sobre procesos, ideas, representaciones y objetos asociados a los SN, lo cual no excluye tránsito entre lo verbal y lo simbólico, y las rutas para abordar conteos y mediciones utilizadas por algunas comunidades particulares. Independientemente de la lengua vinculada, en todos los casos se han vislumbrado principios que tienden a ser comunes, donde destacan el aditivo y el multiplicativo. Sigue pendiente el proceso de revisión de algunas numeraciones como la usada por los mayas o los hiwi en relación a si se ajustan o no a determinadas concepciones de SN y sus bases.

Palabras clave: Educación Matemática, Sistemas de Conteo, Sistemas de Numeración.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la investigación acerca de los SN que emplean algunos grupos socioculturales, suelen establecerse aseveraciones relacionadas con el concepto de número. Tal idea es un asunto que ha fascinado al ser humano desde todos los tiempos y no se sabe, con certeza, el tiempo histórico de su origen, puesto que son considerados como creaciones libres del espíritu humano que sirven como medio para concebir más fácil y claramente la diversidad de las cosas.

También existen evidencias de la manipulación de los números en prácticas habituales derivadas del establecimiento de relaciones con el entorno físico tales como conteo, medición y ordenación, estando, durante muchos siglos, asociados a ideas geométricas. Igualmente, se le han atribuido poderes mágicos-religiosos[1] a través de la

[1] Existe una carga imaginativa (o supersticiosa) alrededor de numerales tales como: **7, 13 y 666**.

numerología (seudo ciencia) pero esta consideración no será abordada en este documento, debido a que carece de bases científicas.

Ahora bien, al hacer el análisis de lo que muchos autores declaran como SN surgió la necesidad de revisar y estudiar su definición usual, la cual obliga a hablar de bases, reglas, orden, principios y de la cantidad de símbolos que la conforman considerando, en algunos casos, los valores que asumen según la posición que ocupan. A saber, se estaría hablando de un Sistema de Numeración **H**, representado como $\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R})$, donde:

$\boldsymbol{S}$: Conjunto de símbolos permitidos en el sistema.
$\boldsymbol{R}$: Reglas que permiten construir todos aquellos números considerados como válidos en el sistema.

Para el caso del SN decimal el conjunto de símbolos permitidos son diez: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9,** y su nombre deriva de la cantidad de símbolos permitidos. Entre las reglas que sustenta este sistema está una que suele ser común a otros SN y es aquella que dice que los nuevos números válidos para ese SN sólo pueden construirse utilizando los símbolos ya permitidos en ese sistema. Eso quiere decir, que para el SN Decimal sólo pueden construirse nuevos números a partir de los **10** símbolos ya mencionados. Igual ocurre para el SN Binario y el SN hexadecimal donde los símbolos permitidos para el primero son **0** y **1**; mientras que los permitidos para el segundo son: **0,1,...9, A, B, C, D, E, F**.

Puede notarse en el texto que a los SN ejemplificados, anteriormente, se la ha dado, respectivamente, el nombre de decimal, binario y hexadecimal, lo cual se deriva del agrupamiento que se hace de sus unidades para construir nuevos números.

Asumiremos, en primera instancia, que el tamaño de esta agrupación es conocida como base del SN. En nuestro caso, cuando se habla de un sistema decimal es porque su Base es **10** y se sustenta en agrupaciones de **10** unidades. Análogamente ocurre con las otras dos: la binaria de Base **2** y la hexadecimal de Base **16**. Si se revisa el número de símbolos de cada SN dado en el ejemplo, puede notarse que en estos casos coincide, cada vez, con su Base, lo cual permite precisar que, para este tipo de casos, los elementos básicos de ese tipo de SN son los siguientes:

- El Conjunto de símbolos permitidos en el sistema.
- Las Reglas que permiten construir todos aquellos números considerados como válidos en el sistema.
- La Base del Sistema

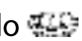
Puede notarse que la cantidad de símbolos básicos que se utilizan en los SN informa sobre la Base. De manera que si se está hablando de un SN vigesimal es porque en su Base tiene **20** símbolos diferentes que al combinarse permitirían la construcción de nuevos números válidos para ese sistema. En caso de utilizarse números indo-arábigos, uno de esos casos utilizaría los números naturales del **0** al **19**.En el caso de hablarse de un SN quinario, se

ISBN: 978-980-7464-17-8

requeriría usar, por ejemplo, las cifras: **0, 1, 2, 3 y 4** para construir todos los demás números válidos de ese SN. ¿Acaso esta misma concepción es aplicable para todos los casos?, es decir: ¿También se puede hablar de SN romano, egipcio, babilónico, maya o *hiwi*, por ejemplo? Lo que sigue en otras secciones apunta a ir penetrando en esta discusión, así como también se persigue ir perfilando lo que en definitiva representa a los elementos fundamentales de un SN.

De seguro, todas esas numeraciones que han surgido en determinadas civilizaciones y en diferentes momentos históricos del humano responden a la necesidad que ha tenido de contar y medir Antes de entrar en estos detalles se declara, por ejemplo, que para representar la numeración: (a) romanase utilizan siete símbolos permitidos**, V, X, L, C, D y M**; (b) egipcia se usan representaciones con figuras como: un bastón, un asa, una cuerda enrollada, una flor, un dedo, una rana, un hombre sentado con las manos alzadas; (c) babilónica se realiza con la ayuda de sólo dos símbolos: un punzón en forma de cuña vertical que representaba a la unidad y una cuña horizontal para el número diez.

Sin descuidar el tránsito entre lo verbal y lo simbólico, consideramos que para poder tener la pretensión de denominarse SN es necesario resistir la clásica definición dada con antelación, lo cual no siempre es posible de verificar para todos los casos estudiados: decimal, binario, romano, egipcio, babilónico, maya, *hiwi* y otros que resultaron de interés para constituir los insumos de un estudio posterior, en proceso, que tiene que ver con la presencia o no de SN propios de grupos socioculturales específicos.

Llama la atención que la idea de base asumida como el número de símbolos que emplea el SN no sea del todo satisfactoria para todos los casos. Por ejemplo, el llamado SN romano emplea siete símbolos y no es de Base **7** (Porta de Bressan, 1976); en el caso de la numeración babilónica, diversos autores coinciden en señalar que es un SN de Base **60**, pero "no necesitaban **60** símbolos para representar su sistema sexagesimal, necesitaban sólo dos" (González y Simondi, 2010). Igual ocurre con la numeración maya que sólo utiliza tres símbolos: el punto (·) para el 1, la raya horizontal (—) para el cinco y el óvalo  para el cero, para construir los demás numerales y, sin embargo, tanto este último autor junto con otros como Díaz, Escobar y Mosquera (2009) y Morales (s.f.) lo denominan de Base vigesimal. Todos acotan que la numeración maya responde a una notación constituida por puntos, rayas y el símbolo de la concha. El último autor señala que "con una combinación de estos se construyen los símbolos para representar los números del cero al diecinueve" (p. 1), mientras que Díaz y otros aseveran que "cada posición en el sistema es de veintenas" (p. 10). Por estas razones, se hizo evidente la necesidad de profundizar en la complejidad de los SN, a la luz del análisis de contenido de las declaraciones que hacen varios autores como los citados.

Sobre tales elementos se desarrolla esta pesquisa a fin de utilizarla como sustento de otra investigación que pretende producir insumos para la concreción de materiales educativos, sobre la base de los contenidos matemáticos que subyacen en las prácticas y objetos ancestrales correspondientes a los pueblos y comunidades indígenas venezolanas. Se presume que lo aquí declarado también puede servir de referencia para analizar cualquier otra estructura que sea declarada como SN.

INTERROGANTES Y OBJETIVOS

En virtud de lo expuesto, las interrogantes que guiaron este estudio fueron las siguientes: ¿Cuáles son los principios de conteo asociados con determinados SN?, ¿Cuáles aspectos de naturaleza práctica y teórica lo caracterizan? En función de estas interrogantes nos trazamos el siguiente objetivo:

Determinar los aspectos teóricos y prácticos que permiten fundamentar un Sistema de Numeración.

MARCO TEÓRICO

Número y pensamiento

Afirma Jiménez (2000) que "Nuestra mente, tan civilizada, como mecanizada, ha eliminado las referencias físicas del proceso de contar y las ha sustituido por referencias ideales, constituidas por los nombres y signos asignadas a las cantidades" (p. 44), es lo que ocurre con la idea de número. Todo niño, a partir de una cierta edad, sabe intuitivamente que una bolsa de metras con quince unidades tiene *algo en común* con un estacionamiento en el cual hay quince vehículos estacionados o con una nevera en la que hay quince helados. Desde el punto de vista matemático lo que ocurre es que, interpretándolos como conjuntos, los tres ejemplos pertenecen a una misma clase, la del número *quince*. Investigaciones llevadas a cabo por Piaget (1952) y continuadas, entre otros, por Lovell (1986) han demostrado que a medida que el niño va desentrañando ese *algo en común* mediante un complejo proceso cognitivo de abstracción, en el que se hacen presentes la clasificación y la seriación, va percibiendo cuáles conjuntos pueden ser integrantes de esta clase, así mismo va construyendo la noción o idea del número *quince,* el cual es un ente matemático independiente de los objetos físicos.

Dado que la noción de número forma parte de los primeros conceptos matemáticos que se construyen en la vida de un sujeto, en el proceso anteriormente descrito juega un papel importante la escolarización para reforzar esa idea inicial, pero aún vaga, de que lo representativo no es lo fundamental sino accesorio. En este sentido, debería consolidarse en el niño que lo que identifica ese *algo en común* no es el símbolo $\mathbf{15}$, pues éste es sólo un aspecto referencial, dado que también sirven $\mathbf{1111_2}$, $\mathbf{XV}$, $\mathbf{120_3}$ u otras expresiones simbólicas equivalentes.Para efectos de este documento, tales escrituras son denominadas numerales. Sin embargo, en algunas ocasiones dejamos que sea el contexto el que se

ISBN: 978-980-7464-17-8

encargue de dirimir la diferencia sin que prive la tradición de llamarles números en la cotidianidad.

Un manejo óptimo de esta noción tiene connotadas implicaciones para la Educación Matemática, a tal punto que se ha acuñado el término anumerismo (Paulos, 1998) para describir el estado de una persona caracterizado por "la falta de una perspectiva numérica, la apreciación exagerada de coincidencias que no tienen otro significado" (p. 12); y, por el contrario, la ausencia de valoración de "evidencias estadísticas menos relumbrantes, pero absolutamente concluyentes" (p. 44). Es decir, la persona anumérica tiende a otorgar importancia matemática a eventos que no la tienen y se la resta a otras situaciones en las que lo matemático es vital e indiscutible. Un ejemplo de anumerismo es el que se presenta con los juegos azar, algunas personas sacan "cuentas fascinantes" para dar con el número salidor, pero pueden ser incapaces para comprender que el **000** tiene la misma probabilidad de salir ganador como cualquier otro de tres cifras. Igual pueden no aceptar que existe una alta probabilidad de que en una reunión con más de cincuenta personas existan dos que cumplan año el mismo día.

Ahora bien, la idea de número ha fascinado a los seres humanos desde todos los tiempos, incluso, con base en un pensamiento anumérico, se ha posicionado a la numerología como seudo ciencia y toda la carga de atribuciones que allí se representan. En realidad, esto no es un asunto nuevo ni moderno, tienes raíces históricas bien profundas y ya identificadas. Desde Pitágoras y su escuela, por ejemplo, se enseñaba que los números[2] regían la vida, éstos eran la esencia de las cosas, "el universo está regido por el número, y mediante él llegamos a las raíces y fuentes de la naturaleza" (Casalderrey y Fuentes, 2005, p.112).

En este sentido, matemáticas y números eran un mismo objeto para los pitagóricos, percepción ésta que, en la actualidad, se mantiene, casi inextinguible, en las mentes de una importante cantidad de personas. Esta manera de pensar, incluso, ha dejado huellas en el simbolismo. No es casual que $\mathbb{Z}$ sea el símbolo que denota el conjunto de los números enteros, dado que *Zahlen* significa números en alemán. Puede que la escogencia de la inicial de este término esté vinculada con esta identificación de los enteros con el universo, en la perspectiva pitagórica.

No se sabe, con certeza, el tiempo histórico del origen del número, ni cuánto hace que se les usa; sin embargo, existen evidencias de su manipulación en sus prácticas habituales derivadas del establecimiento de relaciones con su entorno físico, tales como conteo y medición.

[2] En este contexto se reduce a los enteros positivos.

En el caso de los números enteros, éstos prevalecieron durante mucho tiempo y fueron exaltados notablemente por Pitágoras y sus seguidores, aproximadamente en el 580 A.C, quienes reducían a número (entero) su visión del cosmos (Wussing, 1998).

En una de las obras de Dedekind (1998) señala el carácter humano, ideal y abstracto de la noción de número. Al respecto dice que:

> son creaciones libres del espíritu humano, sirven como medio para concebir más fácil y claramente la diversidad de las cosas. Mediante la construcción puramente lógica de la ciencia de los números, y mediante el dominio numérico continuo que con ella se obtiene, nos encontramos por vez primera en situación de investigar con precisión nuestras representaciones (de espacio y tiempo) relacionándolas con este dominio numérico creado en nuestra mente. Considerando atentamente lo que hacemos al contar una cantidad o número de cosas, nos vemos llevados a observar la capacidad mental de relacionar cosas con cosas, hacer corresponder una cosa a otra, o representar una cosa mediante otra, facultad sin la cual sería absolutamente imposible el pensamiento (p. 785).

Durante muchos siglos el número estuvo asociado a ideas geométricas, por lo que no fueron pocos los intentos por su establecimiento formal independiente. No fue sino hasta mediados del siglo XIX, a través del proceso denominado *aritmetización del análisis*[3], en el que se lograron establecer las bases definitivas del concepto de número real, logrando su independencia total de cualquier atisbo geométrico.

En este breve recorrido puede acotarse que lo que tiene que ver con los números configura parte de una ciencia que va más allá de contar, medir, ordenar o de realizar operaciones aritméticas. Constituye un algo que genera la creación de "conceptos abstractos que cumplen reglas para poder integrarlas a la realidad" (Rumbos, 2011, p. 5). Según la misma autora, la emergencia del 0, de las cantidades infinitesimales, de la medición de las incertidumbres y de la presencia de otros objetos matemáticos han dado pie para comunicarnos con el universo y descifrarlo en todo su esplendor. Por tanto, se vitaliza la necesidad de hurgar en las raíces vitales de las cantidades, los conteos, las numeraciones y los diferentes SN existentes.

Acerca de contar

Adaptarse al medio ambiente donde se encuentra, proteger sus pertenencias y afrontar los cambios en la naturaleza, son algunas de las necesidades del hombre a través de los tiempos. Igualmente, contar ha sido otra necesidad intrínseca, una vez que adquirió conciencia de su existencia (González y Simondi, 2010). Para el común de las personas, el proceso de contar está fuertemente asociado con los números naturales, soliendo ser asumido como la actividad que indica que después de uno viene dos, luego el tres, siguiendo el cuatro y así

[3] Expresión acuñada por Félix Klein en 1895.

ISBN: 978-980-7464-17-8

sucesivamente, quedando claro que es un proceso interminable. También está relacionado con la designación de un número cuya representación es obtenida de diversas formas, bien utilizando piedras, muescas en palos, nudos e, incluso, partes del cuerpo como los dedos de las manos y de los pies. Cuando, por ejemplo, enunciamos **1**, **2**, **3**, **4**,…, **n**, para explicitar la cantidad de cosas materiales que hay en algún lugar determinado, en este último caso la idea de contar es "asignar un número que corresponde a la cantidad de elementos de un conjunto" (Jiménez, 2000, p. 40), sin importar la naturaleza de estos elementos. Este método de conteo es el de enumeración. Sin embargo, no siempre es posible ni siquiera deseable aplicar este método en algunos casos. Es materialmente insostenible recurrir al método de enumeración para contar, por ejemplo, la cantidad de maneras en que se pueden ordenar veinte libros diferentes en un estante.

Agrupación y base

En principio, se asume que la idea de base está relacionada con las nociones de conteo y agrupamiento. Igual se presume que dependiendo de la cultura existen diferentes métodos de conteo, así lo contemplan Britton y Bello (1982) al señalar que:

> los incas hacían nudos en una cinta o cuerda para levantar el censo, los chinos usaron guijarros o varitas en sus cálculos y los ingleses utilizaban pequeños palos con marcas como comprobantes de los impuestos recibidos. Como resultado del esfuerzo humano para mantener un registro de las cantidades se inventaron los primeros numerales que reflejaban el proceso de conteo (p. 186).

A medida que fueron aumentando las cantidades, se hizo evidente que el conteo con marcas resultaba difícil e inconveniente. De esta forma, los números empezaron a ser ordenados en grupos y reemplazados por otros mayores, como sucedía en la numeración egipcia en el que diez rayas eran sustituidas por una pezuña (∩).Pero este agrupamiento, que puede ser considerado como antecedente para la idea de base, no ocurre en el caso de los *hiwi*, dado que ni siquiera cuentan con representaciones simbólicas propias para representar sus números, a pesar de que Lara (2007) declara que ellos poseen SN.

Es usual definir la base de un SN como el número de símbolos que emplea dicho sistema. Por ejemplo, Rey Pastor y Babini (1997) "la base está constituida por… los números mediante cuyas combinaciones aritméticas puede expresarse cualquier número" (p. 65). Sin embargo, esta definición puede ser insuficiente para dilucidar tal concepto, pues como lo indica Porta de Bressan (1976), parece que la base de un sistema coincide con el número de cifras a utilizar, solamente en el caso que el sistema sea posicional, lo cual tampoco es generalizable.

Técnicas de conteo

Como se ha mostrado, el origen del concepto de número está relacionado con el proceso de contar. En sus diversas culturas, el hombre se ha valido de distintos instrumentos para contar, entre ellos sus dedos, lo cual dio origen al vocablo dígito. Por ejemplo, los miembros de la tribu Sibiller de Nueva Guinea, cuentan hasta el veintisiete empleando:

> su dedo índice derecho para señalar los dedos de la mano izquierda para contar del uno al cinco. Después, usan su muñeca izquierda, antebrazo, codo, bíceps, clavícula, hombro, oreja u ojo para contar del seis al trece; la nariz es el catorce, luego señalando con el índice izquierdo bajan del ojo hasta el meñique para los números del quince al veintisiete (De la Peña, 1999, p. 19).

Como puede verse, esta tribu no muestra claramente la noción de agrupamiento por lo que no se hace explícita su base, pero como veremos en otros grupos étnicos sí existe una idea primitiva de agrupar, razón por la que es posible señalar una idea incipiente del concepto de base, y por la que en este trabajo consideramos la idea de *sistemas de conteo*. De acuerdo con los hallazgos de Bishop (1999), la cantidad de sistemas empleados por el hombre para contar pasan de 500. Este mismo autor reseña **225** sistemas de conteo los cuales agrupa en cuatro tipos: (a) I: basados en contar partes del cuerpo; (b) II: emplean piezas, por ejemplo varillas; (c) III: bases mixtas de **5** y **20** que emplean nombres de números compuestos; y (d) IV: sistemas de base **10** con varios nombres discretos para los números en vez de nombres compuestos.

Número y Numeral

Antes de la era cristiana, diversas las civilizaciones tales como los egipcios, sumerios, babilonios, romanos, hindúes y árabes pusieron empeño para asignarle a los números un símbolo o numeral correspondiente (González y Simondi, 2010). En palabras de Bishop (1999), diríamos que cada cultura ha desarrollado su propia tecnología simbólica para representar los números.

Lo anterior significa que se debe distinguir entre el número y su representación. Ahora bien, tal como ocurre en algunas partes de este trabajo, la fuerza de la práctica precipita un abuso de lenguaje que hace confundir estos dos sustantivos, aun cuando desde el punto de vista de la enseñanza de la Matemática es importante distinguirlos. El número es un ente abstracto construido a partir de un complejo proceso cognitivo que conlleva la clasificación y la seriación. Un número determinado alude a la propiedad que tienen todos los conjuntos que lo representan, la cual no es más que la de poderse establecer una biyección entre ellos. Por su parte, el numeral es la representación simbólica que se hace de un número. En consecuencia, no existen números romanos, ni arábigos, ni binarios. Esta nota aclaratoria es pertinente ya que, en algunos casos de la enseñanza, se hace mención a propiedades aritméticas del número, pero enfatizándolas en el aspecto físico del numeral lo cual, de por sí, las hacen francamente erróneas y débiles, didácticamente.

ISBN: 978-980-7464-17-8

Sistema de numeración

Antes de concretar detalles relacionados con lo que para este estudio será considerado como SN, resulta oportuno hacer un breve recorrido histórico por varios sistemas de talante decimal. Por ejemplo, el duodecimal (Base **12**) tuvo bastante difusión y según Fomín (1975) fue de un origen anatómico, inspirado en las doce falanges de los cuatro dedos de una mano, exceptuando el pulgar. Según este autor. “pasando el pulgar por estas falanges se puede contar desde uno hasta doce. Después se toma doce como unidad de orden siguiente, etc.” (p. 10). En nuestra vida cotidiana tenemos vestigios de este sistema pues muchos artículos se expenden por docenas, en lugar de decenas. Igual ocurre, en sistema inglés, con lo siguiente: un pie son doce pulgadas. A nivel comercial, aún se emplea la unidad de tercer orden de este sistema como la gruesa: doce docenas. Mientras que, ya casi en desuso, la masa aludía a una docena de gruesas.

Del sistema sexagesimal (Base **60**) empleado por los babilonios quedan, también, rastros de uso cotidiano en la división que se hace del tiempo (**1**hora=**60** minutos; **1** minuto=**60** segundos), y del sistema de medición de los ángulos (**1** grado= **60** minutos y **1** minuto=**60** segundos). Sin embargo, tal como afirma Fomín (1975), este sistema que requiere de **60** cifras diferentes, es bastante complicado y menos cómodo que el decimal.

Se pueden dar nuevas ejemplificaciones de este objeto pero este estudio no amerita recorrer tantos casos, de la misma categoría. Sin embargo hay uno que ha ocupado un lugar preponderante en nuestras vidas: el SN decimal. Dicho sistema ha estado tan arraigado en este momento histórico que, con frecuencia, nos olvidamos de su trayectoria histórica y su epistemológica. No obstante, su caracterización es la más abordada en el resto de las secciones de este documento, tal como ocurre con algunas de las consideraciones siguientes.

En las primeras secciones de este documento también se hizo mención de los SN. Si el mismo es denotado como **H = (S, R)**, se dijo que **S** constituye el conjunto de símbolos permitidos en el **H** y que **R** es el conjunto de reglas que permiten construir todos aquellos números considerados como válidos en **H**. Puede ocurrir que el valor de un símbolo, en ese SN, dependa de la posición que ocupa en el numeral, siendo así se dice que el sistema es posicional, tal como ocurre con el SN decimal. Por ejemplo, en este sistema el símbolo $\mathbf{3}$ en los numerales $\mathbf{123}$ y $\mathbf{735}$ representa un valor diferente: en el primer caso representa $\mathbf{3}$ unidades, mientras que en el segundo representa $\mathbf{3}$ decenas ($\mathbf{30}$ unidades). Similarmente, en el sistema binario, que también es posicional, el $\mathbf{1}$ en el numeral $\mathbf{101}$ tiene valores distintos, según al que se refiera.

Por su parte, el número doce de la numeración egipcia es no posicional, puede estar representado por ‖ ∩ ó por ∩‖; mientras que el babilónico es posicional. Puede ocurrir que no importe la posición del símbolo en el número tal como ocurre en la numeración romana donde, por ejemplo, el valor del símbolo **X** es el mismo en los numerales **XV** y **XC**.

MARCO METODOLÓGICO

La presente investigación se desarrolló mediante una investigación de tipo documental. Para la concreción de los insumos se apoyó en un análisis de contenido aplicado a los diferentes documentos que abordan el tema sobre SN.

ALGUNOS RESULTADOS

Al analizar los diferentes documentos revisados, determinamos que:

1. En cuanto al **acerca de contar,** los niños establecen comparaciones entre distintas cantidades de objetos (de juguetes, por ejemplo) y son capaces de seleccionar el mayor, aun cuando no sepan "contar", según un esquema enumerativo. En otro marco de referencia, observemos que si en una reunión de personas hay sillas desocupadas y no hay personas paradas sabemos, inequívocamente, que hay más sillas que personas presentes[4] (o equivalentemente, que hay menos personas que sillas), lo cual se convierte en una información rápida y útil para tomar decisiones que tienen que ver con el conteo. Tales referentes nos invitan a repensar el concepto de contar, dado que en ellos está implícita la noción de correspondencia entre conjuntos. Actualmente, en virtud del análisis de estos procesos de ordenamiento ha emergido la Teoría Combinatoria como área de la Matemática dedicada al estudio de los diversos métodos de conteo, y para destacar la relevancia y brillantez de esta actividad en la comunidad de autores matemáticos se ha acuñado la expresión "el arte de contar".
2. Lo que tiene que ver con **agrupaciones y base** genera importantes referentes para la determinación de los SN. Al analizar una de las versiones de los números mayas (Ver Gráfico 1), encontramos que todos sus numerales siempre se escriben en función de los tres símbolos previamente señalados. Sin embargo, varios de los autores ya citados lo declaran como un SN de Base 20.

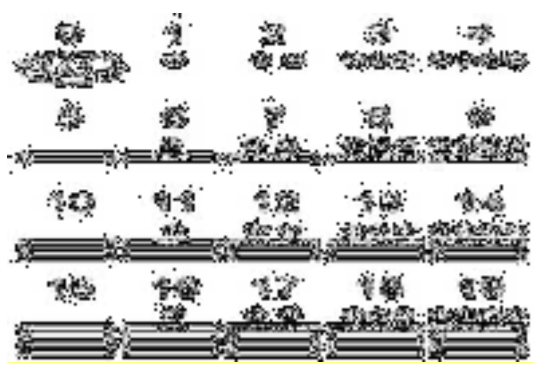


***Gráfico 1*. Representación de los primeros 20 números mayas**. *Tomado* *<u>http://sobrehistoria. com/</u>sistema-de-numeracion-maya-y-numeros-mayas/*

[4]En este ejemplo se supone que las personas se sientan sólo en las sillas y que en cada una de ellas se sienta una y solo una persona.

ISBN: 978-980-7464-17-8

En vista de que no se precisa el número de símbolos requeridos para garantizar de que, en realidad, es de Base 20, a la luz de la definición clásica de Base, y en razón de que, hasta el momento, no se han encontrado otros argumentos teóricos-referenciales que sustenten una manera distinta de abordarlo como SN a través de, por ejemplo, un criterio robusto de bases mixtas u otra conexión que asocie dicho constructo con, por ejemplo, la numeración representada por variantes de cabezas y mencionada por Morales (s.f.), quedará pendiente esta discusión hasta el cierre de este proceso de investigación. Por cierto, esta colección de cabezas también es declarada de Base 20, aunque no cuenta con veinte simbologías diferenciadas para representar los primeros veinte números a través de deidades diferentes.

3. En función de las operaciones que intervienen en la construcción de los números validos de los denominados SN estos pueden ser clasificados como aditivos, sustractivos o multiplicativos, dependiendo de las descomposiciones operativas que puedan hacerse con sus numerales, pudiendo tener un carácter mixto. Además, si se toma en cuenta el orden de colocación de sus símbolos, en su escritura, pueden ser posicionales o no posicionales.

En el caso de un sistema aditivo, los nuevos números se pueden obtener mediante la suma de otros que intervienen en su construcción. De manera análoga ocurre con los sustractivos, componiendo el nuevo número válido con la diferencia entre otros ya definidos. Aunque está pendiente analizar si la numeración egipcia soporta la definición de SN, este tipo de numeración es aditiva. Por ejemplo, el número doce puede estar representado por ‖∩ ó por ∩‖, donde el símbolo ∩ tiene el valor de diez y la barra vertical | tiene el valor de uno.

Por su parte, el sistema es multiplicativo cuando el número se obtiene por la multiplicación sucesiva de cada una de sus cifras por uno o varios números componentes, tal como ocurre en el sistema decimal en el que cada cifra de un número es un factor que se multiplica una potencia de diez. Porta de Bressan (1976) señala que este tipo de sistema no se presenta de forma pura, tiene sólo un valor teórico, pues de ser así se perdería la idea de número primo con lo cual carecería de importancia desde el punto de vista matemático.

El SN es posicional cuando el valor de sus cifras depende de la posición que ocupa en el numeral. En este tipo de sistema, cada número puede ser descompuesto en forma polinómica y, por ende, es aditivo y multiplicativo, basta ver el Teorema Fundamental de la Numeración (Fomín, 1975): Dada una base $\boldsymbol{k} > 1$, todo número natural **N** puede descomponerse de forma única como $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a_k k^n} + \boldsymbol{a_{k-1} k^{n-1}} + \ldots + \boldsymbol{a_3 k^3} + \boldsymbol{a_2 k^2} + \boldsymbol{a_1 k} + \boldsymbol{a_0}$**.** Abreviadamente, este número $\boldsymbol{N}$ puede denotarse como**:** $(\boldsymbol{a_k a_{k-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0})_{\boldsymbol{k}}$, aunque lo normal es que omitamos el subíndice cuando se trata del sistema decimal.

Dos ejemplos de sistemas posicionales son los siguientes:

3.1 El SN decimal: utiliza un conjunto de diez símbolos: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9** y **0**, cuyo significado depende, fundamentalmente, de su posición relativa. Se dice de Base **10** porque requiere diez unidades para formar una decena, de diez decenas para formar una centena y así, sucesivamente, es decir, requiere diez unidades de un orden determinado para formar otro del orden inmediato superior. Por ejemplo, partiendo de que el número **847** contiene: **8** centenas, **4** decenas y **7** unidades, se puede escribir como: **847** = **800** + **40** + **7**, lo cual es equivalente a: $\mathbf{847 = 8.\ 10^2 + 4.10^1 + 7.10^0}$, y se corresponde con una descomposición en su forma aditiva-multiplicativa (Cespedes y Martínez Padrón, 2012). En el Gráfico 2 se muestra, sucintamente, la evolución de los diez símbolos empleados por este sistema numeral indo-arábigo, según lo reportado por Cervera (2014).

3.2 El SN binario (creado por B. W. Leibnitz, 1646-1716): es un sistema que tiene Base **2**, y sólo utiliza los símbolos: **1** y **0**. Por ejemplo, el binario $\mathbf{1001_2}$, representa al número **9** en el sistema de numeración decimal ya que:

$$\mathbf{1.\ 2^3 + 0.\ 2^2 + 0.\ 2^1 + 1.\ 2^0 = 9}$$

Puede observarse que para construir números válidos, en cualquier sistema posicional, deben usarse sólo los símbolos permitidos en cada uno de ellos, siendo esta cantidad la que, generalmente, se toma para determinar la base. Ya se ha indicado que el SN decimal es Base **10**, el binario es de Base **2**, el hexadecimal es de Base **16,** mientras que el octal tiene Base **8**. En sistemas ponderados, como los anteriores, el valor de cada dígito depende tanto del símbolo que se utiliza para su construcción como de la posición que ocupa en el número construido. Ese no es el caso de otros, como los no-posicionales, donde los dígitos tienen el valor del símbolo utilizado, independientemente de su posición (Cespedes y Martínez Padrón, 2012).

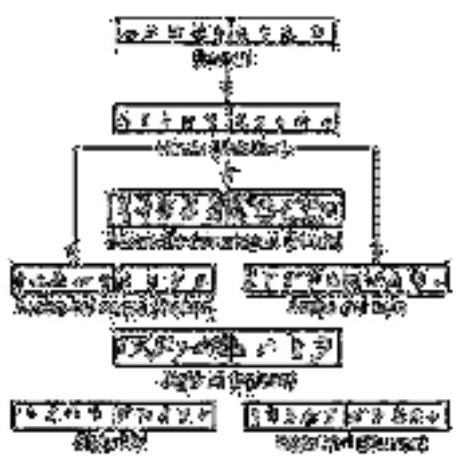


Gráfico 2. **Evolución de los diez símbolos empleados por este SN decimal**.

ISBN: 978-980-7464-17-8

Tomado de "Historia de los números I. El cero, los números romanos y los números indoarábidos", por F. Cervera, 2014, disponible en http://ulum.es/historia-de-los-numeros-i-el-cero-los-numeros-romanos-y-los-numeros-indoarabigos/

Aunque, en la actualidad, la numeración romana no suele ser usada para el desarrollo de operaciones, pero sigue siendo útil en casos donde se hace referencia a, por ejemplo, siglos o años. Tales numerales son no-posicionales y se escriben como combinaciones de algunas letras mayúsculas representativas de ciertos valores. A saber, las letras **I**, **V**, **X**, **L**, **C**, **D** y **M** representan, respectivamente, los siguientes números: **1**, **5**, **10**, **50**, **100**, **500** y **1000**, en el SN decimal y su principio de construcción es aditivo-sustractivo. Para escribir, por ejemplo, el año **2008**, se hace la siguiente combinación: **MMVIII**, lo cual no es más que la suma de **1000 + 1000 + 5 + 1+ 1+ 1**. Vale decir que para la simbolización de tales números aplican algunas reglas, pero las mismas no serán mostradas en este documento. De igual manera, para escribir el número **4**del SN Decimal se usa la siguiente simbología: **IV**, la cual representa el resultado de la operación: **V-I** que en el SN decimal se corresponde con: **5-1 = 4**

Como se ha visto hasta ahora, es posible combinar varias operaciones para determinar algunos números de determinados SN, cuando esto ocurre se obtiene un Sistema Mixto, tal como ocurre con SN decimal, pues combina lo multiplicativo y lo aditivo.

CONCLUSIONES

En vista de que los insumos obtenidos en esta investigación forman parte de otra que está en proceso, la cual tiene la pretensión de determinar aspectos fundamentales constitutivos de SN propios usados por grupos socioculturales ya definidos, podemos concluir que desde el punto de vista etnomatemático, el proceso de contar, inherentemente humano, está asociado con el de comparar, a sabiendas de que para Bishop (1999) contar forma parte de las seis actividades universales, junto con medir, localizar, diseñar, jugar y explicar, lo cual constituye el fundamento de las matemáticas propias de cada cultura. Análogamente, se encuentran las actividades típicamente científicas ya identificadas por D'Ambrosio (2005): observar, contar, ordenar, clasificar, medir y pesa, a razón de la similitud que se da entre algunas de ellas.

Respecto a agrupaciones y base se determinó que al igual de otros casos como el SN _hiwi_, declarado por Lara (2007) como vigesimal, también es necesario someter a juicio otras aseveraciones, de este mismo tenor, sobre todo cuando señala la existencia de SN en comunidades que no poseen, ni siquiera, simbologías propias para representar sus números, así como tampoco poseen expresiones que den cuenta de las operaciones que realizan en sus prácticas cotidianas. Según Martínez Padrón (2016), esto último restringe la posibilidad de hablar de bases y, por ende, de SN que sean autóctonos en esas comunidades. Mientras no queden claras las acepciones que sustentan las aseveraciones sostenidas por varios autores que declaran la existencia de determinados SN, nos atrevemos a conjeturar que en muchas de esas comunidades sólo podría hablarse de principios de conteo y de mediciones, sin mayores pretensiones ni compromisos teóricos.

Cuando se revisa, por ejemplo, la numeración maya, se encontró que aunque estos números suelen ser agrupados de 20 en 20, su escritura se sostiene sólo en función de tres símbolos: el punto (·), la raya horizontal (—) y el óvalo (). Por esta otra razón, dejamos abierta la interrogante en torno a la definición de base para cualquier SN, sobre todo cuando se tienen en escena las tres acepciones señaladas por Porta de Bressan (1976) para dicho concepto, las cuales muestran y confirman su complejidad conceptual, a la luz de los objetivos de esta investigación:

- Cardinal del conjunto de signos empleados para la escritura de cualquier número dentro del sistema.
- El número de unidades de un orden cualesquiera necesario para formar una unidad de un orden inmediato superior.
- El ciclo (sobre la sucesión natural) que permite usar en forma periódica los numerales básicos.

Para los efectos de la actual investigación, adelantamos que la segunda opción de base de un SN es la más conveniente para la mayoría de los casos, aunque otros coinciden con el número de numerales allí utilizados.

En relación con los SN, podemos afirmar que ellos representan una construcción humana en la que se hace uso de un adecuado simbolismo para representar los números. Destacamos que, a través de distintas épocas, el hombre ha dedicado grandes esfuerzos por lograr representaciones que, sin alterar las propiedades aritméticas de los numerales y las operaciones entre ellos, sean más eficientes. Si se toma en cuenta, por ejemplo, el impacto de las representaciones usadas por el SN binario en el desarrollo de la tecnología computacional queda claro que esta incesante búsqueda no responde a un simple capricho de estilo gráfico.

Desde el punto de vista formal, un SN es un concepto que podemos aproximar al de un sistema axiomático, pues es un conjunto de símbolos y reglas de generación que permiten construir todos los números válidos en él. También, en términos metafóricos, podemos establecer un paralelismo entre este concepto y el de alfabeto, ya que este último nos provee las herramientas para formar palabras en un determinado idioma, mientras que el SN hace lo propio para formar numerales.

Sin ánimos de pretender establecer inútiles separaciones discretas en la compleja caracterización del Sistema de Numeración, como objeto matemático, queremos secuenciar, sólo con fines didácticos, parte de los procedimientos asociados que encontramos con el abordaje de dicho objeto. A tal efecto, nos inspiramos en la revisión documental realizada,

ISBN: 978-980-7464-17-8

desde donde concluimos que dicha entidad matemática emerge a partir del proceso fundamental de contar y mediante la conjunción de otros procesos y representaciones de ideas, como son agrupar, la abstracción de número y su correspondiente simbolismo, tal como se ilustra en el Gráfico 3.

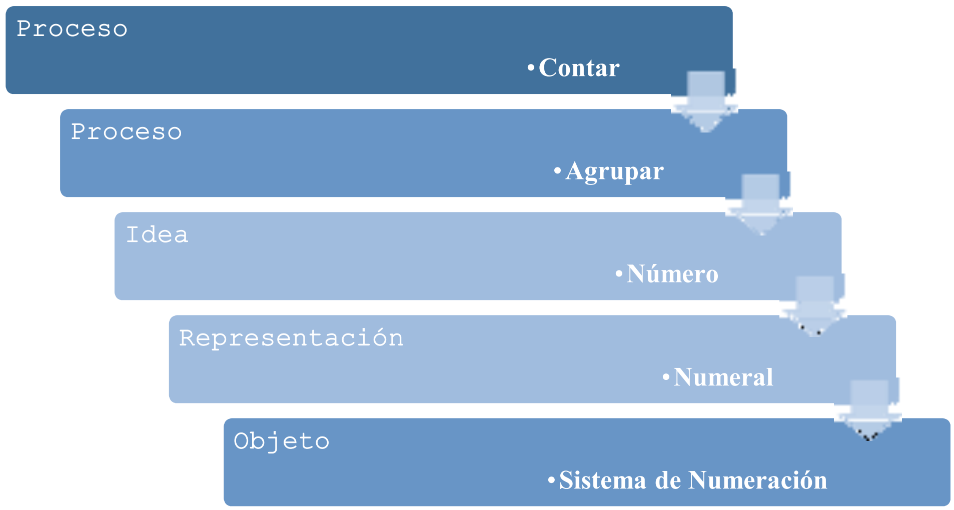


Gráfico 3. **Procesos asociados con el abordaje del objeto SN**

Finalmente, retomemos que cuando se hizo referencia a los agrupamientos, también afloró lo que tiene que ver con la base de un SN, donde se destacó que la misma podría corresponderse con el número de símbolos que emplea dicho sistema, pero Porta de Bressan (1976) colocó en juicio lo siguiente: la base de un SN coincide con el número de cifras a utilizar, solamente en el caso que el SN sea posicional. Para el caso del SN decimal, su nombre se deriva del número de símbolos permitidos, igual ocurre con el SN binario que permite dos. ¿Ocurre lo mismo con la numeración maya, llamado vigesimal, que también se dice que es posicional? Si se asume que el tamaño de esta agrupación es conocida como base del SN, se tendría que los elementos básicos de ese tipo de SN son los siguientes:

- El Conjunto de símbolos permitidos en el Sistema.
- Las Reglas que permiten construir todos aquellos números considerados como válidos en el Sistema.
- La Base del Sistema

REFERENCIAS

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática*. La educación matemática desde una perspectiva cultural. Barcelona: Paidós.

Britton, J. y Bello, I. (1982). *Matemáticas contemporáneas*. México, D.F: Harla

Casalderrey, F. y Fuentes, I. (2005). Textos de Miguel De Guzmán. *Suma*, Monografía N° 2

Cervera, F. (2014). *Historia de los números I. El cero, los números romanos y los números indoarábidos.* Recuperado de http://ulum.es/historia-de-los-numeros-i-el-cero-los-numeros-romanos-y-los-numeros-indoarabigos/

Cespedes Domínguez, G. y Martínez Padrón, O. (2012). *La matemágica va a la escuela. Curiosidades matemáticas con un enfoque didáctico*. Caracas: Dirección de Publicaciones de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

D'Ambrosio, U. (2005). *Etnomatemática. Elo entre as tradições e a modernidades*. Coleção tendências em Educação Matemática. Brasil: Autêntica Editora.

De la Peña, J. (1999). *Álgebra en todas partes*. México: Fondo de Cultura económica

Dedekind, R. (1998). *Qué son y para qué sirven los números*. Madrid: Alianza Editorial

Díaz, N., Escobar, S. V. y Mosquera, S. (2009). Actividades didácticas apoyadas en algunos aspectos históricos de la cultura y matemática Maya. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática,* 2(1). 4-26. Recuperado de http://www.etnomatematica.org/v2-n1-febrero2009/diaz.pdf.

Fomín, S. V. (1975). *Sistemas de numeración*. Moscú: Mir.

González, V. y Simondi, S. (2010). Tres civilizaciones. Tres numeraciones. *Revista de Educación Matemática*, *25(1), 3-25*. Recuperado de http://www2.famaf.unc.edu*.ar/rev_edu/*

Jiménez, D. (2000). *La aventura de la matemática. Sus secretos, protagonistas y grandes momentos*. Caracas: Libros de El Nacional.

Lara, J. (2007). *Software educativo: aprendiendo el idioma Jivi*. Trabajo de ascenso, no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador: Turmero, Aragua, Venezuela

Lovell, K. (1986). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. Madrid: Morata.

Martínez Padrón, O. (2016, en prensa). Aspectos retrospectivos e introspectivos de una experiencia de capacitación en Etnomatemática.*Journal of Mathematics and Culture.*

Morales, L. (s.f.). *Matemática maya. Capítulo 1*. Consultoría de Etnomatemática, Guatemala: DIGEBI, Ministerio de Educación.

Paulos, J. (1998). *El hombre anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias*. España: Tusquets, Editores, S.A.

Piaget, J. (1952). *The child´s conception of number*. London: Routledge and Kegan Paul.

Porta de Bressan, A. (1976). Sistemas y bases de numeración. *Cuadernos Universitarios*, Universidad Nacional de Comahue.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1997). *Historia de la Matemática. Volumen II. Del renacimiento a la actualidad* (3ª edición). Barcelona: Editorial Gedisa.

Rumbos, I. (2011). *Breve historia de las matemáticas: romanticismo ilustrado.* México: Editorial Trillas.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las Matemáticas*. España: Siglo veintiuno editores, S.A.

ISBN: 978-980-7464-17-8