Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática
ISBN: 978-980-7464-17-8

INTERPRETACIONES DEL ÁLGEBRA POR FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA

Andrés González R y **Fredy E. González**
UPEL IP Maracay
agorondell@hotmail.com, fredygonzalez1950@gmail.com
Formación de docentes y Pensamiento algebraico. Educación Universitaria

RESUMEN

Reportamos los resultados parciales de una investigación realizada en el contexto de la formación inicial de profesores de matemática, en una institución formadora de docentes en el centro del país. En la indagación amplia, el problema, vinculado con las dificultades de los estudiantes para asumir los contenidos del álgebra universitaria y comprender su importancia en su formación, se estudia desde la perspectiva del pensamiento algebraico. Empleamos el término aritmetización del álgebra para identificar la percepción aritmética que tienen ellos de los conceptos y procesos algebraicos. Por ello, nos preguntamos ¿Qué sentido tiene el álgebra universitaria para los futuros educadores matemáticos? Para buscar la respuesta desarrollamos una investigación cualitativa con un enfoque fenomenológico interpretativo basado en un estudio de caso. Los instrumentos fueron los Diarios de clases y la técnica fue la observación participante. Con esta técnica logramos comprender el punto de vista de los estudiantes mediante un proceso de identificación con su cotidianidad académica en una interacción continua y directa con ellos. Presentamos las reflexiones producto del desarrollo de la metodología de organización y análisis de los Diarios y del proceso descrito en la Cronogénesis de esta investigación, vinculadas con las interpretaciones que los estudiantes hacen del álgebra desde su condición discente, pero en prospectiva hacia el papel que jugará esta área en su futuro rol como profesor de matemática. Es decir, lo referido al cómo vislumbran los futuros profesores el álgebra en su formación profesional. Las categorías interpretativas, de acuerdo con el análisis de los Diarios, fueron, el álgebra: (a) como objeto instrumental; y, (b) como objeto disciplinar. En el primer caso están los papeles en cuanto a: la teoría, la demostración y su presencia en el nivel medio de escolaridad. En el segundo, están: rama de la matemática, como asignatura, como estructura, como lenguaje y equivalente al cálculo.

Palabras clave: formación inicial de profesores de matemáticas, álgebra universitaria, interpretación.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La calidad de la enseñanza de la Matemática está fuertemente vinculada con la formación inicial (FIPM) y permanente de los educadores matemáticos, por lo que este último proceso se ha convertido en un asunto de interés indagatorio de la Educación Matemática. Para González (1999) la FIPM "es concebida como un proceso de cambio conceptual y contextual" (p.12), en el cual los estudiantes para profesor debieran vivenciar por ellos mismos nuevas formas de aprender Matemática, involucrándose personalmente en situaciones de aprendizaje y enseñanza como "las que se espera que ellos sean capaces de diseñar y gestionar durante el ejercicio profesional de su rol como Profesor de Matemática" (p. 12).

Además, en relación con los contenidos programáticos de la formación inicial hace más de cien años el conocido matemático alemán Félix Klein sugirió la necesidad de establecer conexiones entre lo nuevo que se aprende en la Universidad y la Matemática escolar.

Sin embargo, llama la atención que luego de transcurrir más de un siglo desde lo que planteó Klein, en el informe sobre la formación inicial y continua del docente de Matemática en Venezuela, León y otros (2013) concluyen que existe una desvinculación de la teoría con la realidad y un parcelamiento de saberes que dificulta el desenvolvimiento del educador matemático. Por ejemplo, señalan los autores:

> Al graduarse e incorporarse al ámbito laboral, el profesor se encuentra en serios problemas al tratar de adaptar lo que sabe a las exigencias de ese nivel educativo y al desarrollo cognitivo de sus estudiantes, siendo que tanto su formación matemática como la pedagógica han sido excesivamente teóricas y no han tenido puntos de convergencia. (p.100)

Esto coincide con el reporte de algunas carencias señaladas por Acevedo y Falk (2000) en cuanto a las necesarias transferencias que debe realizar un docente en el aula. En este sentido, afirman que "la formación avanzada que reciben los futuros docentes de la Educación Básica en general no enriquece su enseñanza, sino que el docente retorna a su propia experiencia escolar como guía prioritaria de su ejercicio docente elemental" (p. 247). Por ejemplo, las mismas autoras señalan que "el docente no establece nexos entre la teoría de polinomios, que se supone conoce de sus cursos universitarios, y el álgebra de polinomios que se trabaja en la secundaria" (p. 248).

Paredes (2014) encontró insuficiencias, tanto en la dimensión cognitiva como en la actitudinal en relación con el aprendizaje del álgebra universitaria. En el primer caso, comprobó que los conocimientos algebraicos que poseen los estudiantes se clasifican en comunes, haciéndose notar todas las fallas o deficiencias que presentan como ausencia de sentido en las notaciones y convenciones del lenguaje formal algebraico; es decir, en su mayoría presenta una de razonamiento algebraico (nivel 0), originando la presencia de diferentes tipos de errores en la resolución de problemas. Todo lo cual hace que posean un deficiente conocimiento algebraico, lo cual se manifiesta en la resolución de problemas y en su rendimiento académico. El otro caso, se refiere a la actitud hacia el Álgebra como poco favorable o negativa.

En González y González (2012) se rinde cuenta de otras características específicas, relacionadas con el desenvolvimiento del pensamiento algebraico. A manera de síntesis, las siguientes expresiones resumen los hallazgos: (a) Dificultad para avanzar en la capacidad para asumir conceptos abstractos; (b) Desarrollo de un proceso de *aritmetización del Álgebra;* (c) Dificultad para la manipulación del símbolo (limitación en el manejo de la sintaxis y la

ISBN: 978-980-7464-17-8

semántica); (d) Poco aprecio por la demostración (y dificultad para hacerlas); (e) Elevado número de estudiantes reprobados en las asignaturas del Área de Álgebra, lo cual genera un estado de ansiedad-rechazo por esta área; (f) Limitaciones de los educadores para captar el Álgebra superior (o Álgebra universitaria) como apoyo para el Álgebra escolar; (g) Dificultad para comprender el enunciado de un Problema Algebraico; y, (h) Confusión cuando el lenguaje natural funciona como metalenguaje en los problemas de Álgebra.

En esta descripción, el término *aritmetización del álgebra* lo empleamos para identificar el proceso de aprendizaje llevado a cabo por los estudiantes en el que parece que: los objetos algebraicos son reducidos a entidades numéricas, se le endosan las propiedades específicas de la aritmética a los procesos estrictamente algebraicos (los espacios vectoriales, las estructuras de grupo, etc., son vistos como conjunto de números). Por ejemplo, sucede cuando los estudiantes reconocen el objeto vector como un segmento orientado con módulo, dirección y sentido. Desde el punto de vista del álgebra universitaria creemos que esta apreciación se convierte en un obstáculo epistemológico, en el sentido de Bachelard (2007), para el necesario proceso de generalización y compresión que deben transitar en la construcción del concepto de espacio vectorial, puesto que la identificación que realizan es de tipo geométrica por lo que es válida solamente para el caso de los espacios R^2 y R^3.

En el contexto de la *aritmetización del álgebra* también insertamos la noción de infinito como "número muy grande", lo cual la convierte en una idea vaga y confusa. Basado en la experiencia del autor en la enseñanza, se ha observado un uso no consciente de la existencia de distintos tipos de infinito como el de los números naturales y el de los números irracionales (en esta limitación se cree que convergen dos nociones históricamente enfrentadas como lo son la noción de infinito potencial y el infinito actual); se piensa que se hace una transferencia de la idea de infinito conseguido en el cálculo de límites (o el Cálculo en general) hacia el álgebra; así entonces, por ejemplo, se confunde esta idea de "crecimiento infinito, sin límite", con la noción algebraica de un conjunto de cardinal infinito. Pero además, ocurre que en álgebra el infinito también es usado para denotar la ausencia de una propiedad caracterizada por su finitud. Como un ejemplo de lo anterior se tiene la definición de orden en un grupo. Según Saracino (1980), si e es el elemento neutro de un grupo G se dice que un elemento x de ese grupo es de orden finito si existe un número natural n para el cual $x^n = e$, de no existir tal n se dirá que x es de orden infinito en cuyo caso se escribirá $o(x) = \infty$. Otro ejemplo del infinito como ausencia de finitud se consigue en Hoffman y Kunze (1973) al definir base infinita.

De acuerdo con lo planteado nos preguntamos ¿cómo interpretan el álgebra universitaria prevista en su plan de formación los futuros profesores de matemáticas?

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

En virtud de la pregunta planteada, el objetivo de esta investigación es: Caracterizar las interpretaciones de los futuros profesores de matemáticas relacionadas con el álgebra universitaria.

MARCO TEÓRICO

En esta investigación suscribimos algunos aspectos teóricos de la teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (2006) relacionados con el papel que juega la representación en la construcción de cualquier concepto matemático, desde la perspectiva de este autor: (a) La actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de Representación, y (b) los estudiantes también deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos.

Para Duval estos dos elementos son posibles, metodológicamente, mediante dos clases de transformaciones de las representaciones semióticas: *la conversión* y *el tratamiento*; y, metacognitivamente, empleando como estrategia el concepto de *coordinación interna*, la cual debe ser construida entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; ya que sin esta coordinación "dos representaciones diferentes significarían dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos "contextos de representación" diferentes del mismo objeto" (Duval, 2006, p. 145)

La *conversión* es la transformación de una representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. Se trata de una transformación externa a un registro. Un ejemplo es la transformación de la representación algebraica $y = x^2 + 9x + 14$ en su correspondiente representación gráfica.

Por su parte, el *tratamiento* de una representación se entiende como su transformación en el mismo registro en el cual ha sido formulada. Se trata entonces de una transformación interna a un registro. Un ejemplo es la transformación de la expresión algebraica (continuando con el mismo ejemplo anterior) $y = x^2 + 9x + 14$ en su forma factorizada $y = (x + 2)(x + 7)$.

Por otra parte, el enfoque sociocultural de Vygotsky (1979) es considerado en este trabajo por dos razones fundamentales: el papel que le otorga al lenguaje en el aprendizaje, y la importancia que le otorga a la mediación. Según Radford (2010) para Vygotsky los conceptos de labor y de herramientas desempeñan un papel primordial. El signo desempeña una función mediadora entre el individuo y su contexto.

Para la teoría vigotskiana la Mediación se puede interpretar como la experiencia de aprendizaje en la cual un agente (mediador) se *interpone* entre el aprendiz y su entorno para ayudarle a organizar y a desarrollar su sistema de pensamiento y facilitar la aplicación de los

ISBN: 978-980-7464-17-8

nuevos instrumentos intelectuales a los problemas que se le presenten.

La Epistemografía es una teoría desarrollada por Drohuard (2009) en el contexto específico de la Didáctica del álgebra, en ella se plantea como problema básico clarificar qué son las escrituras algebraicas (ya que no son conceptos) y cuáles sus significaciones (Rojano, 1994, p. 52). Sus consideraciones también fueron tomadas en cuenta en el análisis de la información y la elaboración de las conclusiones. Algunos aspectos distintivos de esta teoría son: (a) Es un modelo de tipo lingüístico para describir las expresiones simbólicas del álgebra elemental y las transformaciones formales de reescritura; (b) defiende la idea de que no se puede hablar de la significación dejando de lado la sintaxis (convenciones ligadas a la escritura de las expresiones algebraicas); (c) da cuenta de la complejidad que supone el dominio de las escrituras simbólicas algebraicas; (d) se interesa por las relaciones entre las distintas categorías que él establece en el proceso de comprensión de las escrituras; y, (e) permite analizar los conocimientos de naturaleza diferente puestos en juego y cuál ha sido su evolución histórica al realizar la actividad matemática.

MARCO METODOLÓGICO

Esta investigación se inscribe en el campo de la Educación Matemática, en el área de la didáctica del Álgebra y en el ámbito de la formación inicial de profesores; los participantes fueron un grupo de estudiantes durante el desarrollo semestral de un curso de Álgebra Lineal. Constituye un estudio cualitativo del tipo fenomenológico interpretativo con base en un estudio de caso. Una de las técnicas empleadas fue la observación participante la cual se justificó ya que el investigador tuvo un doble rol, pues además fue el facilitador del Curso con que se recabaron los datos. A través esta técnica se pudo comprender el punto de vista de los estudiantes mediante un proceso de identificación con su cotidianidad académica en una interacción continua y directa con ellos. El instrumento fue el Diario de clase.

Procedimiento

Al comienzo del período académico los estudiantes fueron instruidos para la elaboración de un Diario; se trataba de tener a la mano una mirada del proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra universitaria desde la perspectiva de los participantes con la expresa intención de acumular evidencias relativas al punto de vista de ellos acerca de los objetos, conceptos y procesos algebraicos manejados en el Curso, sobre la base de sus reflexiones en cuanto a sus vivencias experienciadas (González, 1998). Se incluyó también aquí el Diario del docente.

Se recabaron treinta (30) Diarios, los cuales: (a) tuvieron varias lecturas preliminares de sus contenidos; (b) se reescribieron con el editor de texto Word; (c) fueron corregidos en relación con algunos detalles de forma como los errores ortográficos; (d) se estandarizaron en cuanto a su presentación con un diseño uniforme (tipo y tamaño de letra, paginación, etc.), pero conservando la integridad de su contenido; (e) se organizaron en un libro cuyo índice los registra con un código de la forma siguiente: DN°-XY (en esta codificación los números van desde uno (1) hasta treinta (30) y fueron asignados al azar, mientras que las letras son las iniciales del nombre y apellido del autor. Esto permitió identificar inequívocamente cada Diario). En este proceso de lectura y organización con la ayuda del editor de texto se les insertaron comentarios a los Diarios respecto a cualquier aspecto que resultase significativo para el investigador. Luego, se diseñó una tabla que contuvo algunos de sus aspectos descriptivos generales.

Luego, se procedió a elaborar una matriz de orden 30x42. En cada fila se colocaron los 30 Diarios correspondientes ordenados de forma ascendente, en las columnas se colocaron los números de cada clase desde la número 1 hasta la 42, contabilizando todos los martes y viernes a partir del 14 de octubre (primera clase) hasta el último día que aparece reseñado.

Se revisó minuciosamente cada Diario, si el autor hacía referencia a una determinada clase se marcaba una equis (X) en la celda que resulta de la intersección de la fila del Diario con la columna de la clase correspondiente. El proceso terminó cuando se agotaron los Diarios.

El siguiente paso consistió en elaborar una caracterización preliminar de cada encuentro presencial para ello se procedió a leer todos los Diarios que hacían referencia a una determinada clase. El proceso consistía en fijar una columna de la tabla anterior y rastrear cada una de sus filas para tener acceso a los Diarios correspondientes. Una vez detectado el número del Diario que la describía se ubicaba en el libro y se procedía a leerlo tratando de identificar los episodios y las acciones referidas a los momentos de entrada, desarrollo y salida de la respectiva clase. Si alguna frase, afirmación, o cualquier idea del autor resultaba significativa para el investigador se accedía al documento digital correspondiente y se copiaba la frase textual. Una vez agotada la lectura y la revisión se repetía el proceso con el siguiente Diario hasta completar el último de la columna fijada. Luego se continuaba con la siguiente columna para la descripción de la próxima clase.

Con fines organizativos e interpretativos se siguió una estrategia similar a la puesta en práctica por González (1998), por ello se tomaron en cuenta las siguientes herramientas analíticas: (a) línea del tiempo; (b) esquema reconstructivo del discurso del aula, todo lo cual condujo a lo que sería la trayectoria del Curso a lo largo del tiempo; es decir su (c) Cronogénesis.

La línea del tiempo constituye un resumen de los aspectos más resaltantes acontecidos en cada una de las clases, permitió el reconocimiento de regularidades y semejanzas las cuales, luego de un proceso continuo de análisis fenomenológico e interpretativo, se formalizaron mediante el establecimiento de categorías que generalizan la descripción de cada uno de sus distintos momentos (introducción, desarrollo y cierre); con estas categorías definidas se diseñó el esquema reconstructivo del discurso del aula; y, con

ISBN: 978-980-7464-17-8

la ayuda de esta herramienta analítica finalmente se reconstruyeron las cuarenta y dos clases obteniéndose así la cronogénesis del curso.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Reconocimiento del papel que juega la teoría

Daremos una interpretación del rol que el estudiante le asigna a la teoría. Para ello, en primer lugar la definiremos: desde nuestro punto de vista la teoría en álgebra está conformada por el conjunto de definiciones de los distintos objetos algebraicos tratados, teoremas; también se incluyen los ejemplos, los comentarios y notas aclaratorias de los autores.

El uso de la teoría es un asunto que constantemente es reforzado por los profesores, y es un aspecto cuya importancia, en algunos casos, es comprendido por los estudiantes como se puede ver en los siguientes comentarios:

> *El álgebra se fundamenta en la comprensión de la teoría, es ahí donde se forjan sus cimientos, sin teoría no hay "paraíso" (MA)*
>
> *Otra de las cosas que también resulta necesarias a la hora de resolver un problema es manejar como es debida la teoría. Entre la teoría y la práctica se genera un estudio exitoso" (AH)*

Incluso los estudiantes se plantean estrategias para el abordaje organizativo de la teoría:

> *Hice un mapa como lo sugirió el profesor para englobar toda la teoría que seguro voy a necesitar, éste me ayudó a aprenderme las definiciones, y los teoremas pero igual debo seguir pensando cómo terminar las demostraciones de éste capítulo.*

El mapa al cual hace alusión el autor del comentario anterior es uno del tipo conceptual, formó parte de una estrategia que incluyó los mapas metales propuesto por el docente-investigador; la idea central es que a través de un esquema gráfico que involucre los distintos conceptos se pueden establecer relaciones de subordinación o de contención entre la teoría.

Además, el papel de la teoría en el aprendizaje del álgebra es un asunto que va más allá de la cantidad de ejercicios o problemas que se resuelvan, tiene que ver con la necesidad de crear significados orientados hacia la abstracción, la generalización y la formalización:

> *Comprendí que <u>no es importante la cantidad de ejercicios o demostraciones que puedas realizar,</u> sino comprender las definiciones de cualquier tema, para así resolver cualquier tipo de ejercicio o demostración, es decir, <u>primero es necesario conocer e identificar la teoría para luego enfocarnos en la práctica</u> (AH)*

Sin embargo develar, hacer explícita la conexión entre la teoría y la práctica no es un hecho que se da por descontado, no es inmediata ni es una labor sencilla, para algunos estudiantes la dificultad para explicitar el vínculo entre la teoría y la práctica es expuesta así:

> *Es muy complejo para mí saber por dónde comenzar, me detengo mucho a pensar por donde comenzar y aunque me conozco la teoría no la sé usar, al menos que consiga una pista o me den una sugerencia de por dónde empezar o qué hacer (YG)*
>
> *Trato de entender <u>primero la teoría y luego los ejemplos de los libros</u> pero me <u>vuelvo un caos al tratar de desarrollar los ejercicios</u> (JM)*
>
> *<u>Me cuesta entender la aplicación de la teoría en los ejercicios</u> por más que busco y trato de resolver nada logro. (IA)*

La complejidad para establecer la debida correspondencia entre teoría y práctica la hace recurrir a la memorización ("*caletreo*" en palabras de AH), o como lo comenta GM:

> *Porque particularmente me ha pasado que <u>me sé de memoria un teorema pero no veo la funcionalidad, no sé cómo aplicarlo</u>.(GM)*

Por lo que ambos contextos, lo teórico y lo práctico, se hacen vacíos pues carecen de esas relaciones intrínsecas de las que se nutren mutuamente; una explicación probable a este fenómeno se puede conseguir a través del concepto de tarea intelectualmente exigente de González (TIE´S; González, 1998), efectivamente determinar relaciones entre la teoría y la práctica requiere poner en escena funciones cognitivas de alto nivel. Tal como sostiene este autor, para relacionar lo teórico con lo práctico no basta con:

> La mera ejercitación del recuerdo memorístico, ni con la utilización mecánica de esquemas algorítmicos, ni con la aplicación de recetas preconcebidas; al contrario, ameritan la realización de un esfuerzo intelectual sostenido; y, además, requieren la ejercitación de variadas habilidades cognitivas básicas; por ejemplo, el razonamiento, la lectura, la escritura y/o el cálculo o manejo de relaciones cuantitativas o simbólicas. (p. 4)

Papel que ocupa la demostración

Los teoremas y su demostración pudieran estar incluidos en la teoría; sin embargo, se han separado pues, en algunos casos, los estudiantes manifestaron conocer un teorema lo cual hacen equivalente a aplicarlo, pero obviando su demostración como se puede apreciar a través del comentario de RR:

> *Porque el álgebra no es que no me guste, sino que es tan abstracta que las <u>demostraciones son tan largas</u> y con tantos axiomas, teorema, artificios que resulta siempre más fácil la aplicación (RR)*

Es decir, en la práctica los estudiantes separan la demostración de un teorema de su aplicación, creemos que aquí subyace un asunto más profundo relacionado con el cómo interpretan el proceso de demostrar. En todo caso, se ha destacado, pues en primer lugar constituye un eje transversal, no sólo de este Curso, sino en todos los restantes del área; en segundo lugar, por las dificultades que tienen los estudiantes para realizarlas.

Sin embargo, tal énfasis en la aplicación tampoco arroja beneficios inmediatos, como lo señala IA:

> *Tengo muchas dudas con respecto de la aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz ya que no tengo claro cuando y donde utilizar esta desigualdad (IA).*

Para algunos estudiantes, no es posible realizar la aplicación de una propiedad si antes no se ha demostrado, por ejemplo, veamos el comentario de JC:

> *Aprovecho la anécdota para hacer mención con respecto a que muchas veces los estudiantes no entienden el hecho de que un teorema, una definición, corolario, etc., no pueden ser empleados si no se han demostrado o si no se ha visto previamente en clases (JC)*

Creemos que en el comentario de JC se evidencia una confusión entre producir matemáticas (la que realiza un matemático) y la matemática como objeto de enseñanza, también creemos que ella manifiesta una especie de tabú con respecto al álgebra. En la enseñanza, una manera de abordar la demostración es considerando los casos particulares de su aplicación, es decir, mediante un ejemplo se ponen en funcionamiento las condiciones iniciales y la hipótesis de un teorema para evaluar el impacto de la tesis; otra manera es negando parte o todas estas condiciones y ver lo que ocurre; luego, en un siguiente momento, se desarrolla la demostración. Analicemos la valoración que hacen JR y YC de esta manera de proceder:

> *Hubo algo que me llamó mucho la atención porque creo que nos salimos del "libreto matemático", esto debido a que previo a la demostración formal del teorema vimos la aplicabilidad del mismo que quizás fue algo extraño, ya que siempre estamos acostumbrados hacer la demostración y luego hacer la aplicación, sin embargo, creo que fue una buena estrategia porque pude entender la demostración. (JR)*
>
> *Me llamó mucho la atención la manera en la que el profesor me dijo que abordara las demostraciones, primero la particularizaba y luego la generalizábamos; cuando otros docentes van directo a la demostración. (YC)*

En el siguiente comentario RR declara su aburrimiento con las demostraciones y, consecuentemente, su preferencia por la respectiva aplicación:

> *Se hizo una demostración larga y algo confusa para mí, en realidad no le presté atención porque cuando me canso o me aburro, cuando resultan tan largas, solo lo tomo como cierto (RR)*

Por su parte, AH, afirma lo engorroso de las demostraciones a causa del simbolismo que se emplea:

La demostración en letras es un poco engorrosa, pero no difícil, basta leerla detalladamente para entenderla y relacionarla con la práctica diaria (AH)

Vislumbrando el papel del álgebra en el desempeño profesional del profesor de matemática

Los hallazgos indican que algunos estudiantes sí logran percibir las implicaciones del aprendizaje del álgebra en su futuro desempeño profesional:

En el siguiente comentario podemos observar como NA logró establecer una vinculación entre la multiplicación de polinomios tal como es dada en uno de los libros que sirvieron de referencia y la misma operación en el ámbito escolar:

En la clase de hoy vimos como Herstein define la multiplicación de dos polinomios de una manera muy interesante y hago referencia a este aspecto ya que es un tema de Educación Básica que se puede abordar de esta forma que plantea el autor (NA)

No obstante, tal conexión no es realizada de forma inmediata, ni por todos los estudiantes, por ejemplo, analicemos la pregunta que se hace RZ:

De hecho, me resultó importante porque muchas veces uno cree que los contenidos dados a este nivel son proporcionados de una manera tan general o si se quiere abstracto que llegamos a preguntarnos ¿Esto se da en educación básica? Por ello, es importante que muchas veces el docente nos induzca a darnos cuenta de la relación que existe entre lo estudiado en este nivel y lo estudiado en educación básica (RZ)

Interpretando lo que expresa RZ se deduce que el docente es un actor fundamental para las relaciones que los estudiantes deben establecer entre el álgebra universitaria y el álgebra escolar, como bien lo señala RZ el docente debe inducir, o en algunos casos explicitar, las relaciones entre lo que se estudia en este nivel y lo que se estudia en la educación media.

El siguiente comentario muestra el interés de los estudiantes sobre el cómo realizar las debidas transferencias entre esta álgebra universitaria y el álgebra escolar:

Estoy con algunas dudas pero básicamente de cómo llevar el álgebra superior a las aulas de clases del liceo, espero más adelante ver con claridad y poder hacer la transferencia necesaria para impartir lo aprendido en álgebra lineal allá en el bachillerato cuando me esté desarrollando como docente.(MA)

Por su parte, GB nos muestra con su reflexión que mirar los objetos desde una perspectiva amplia "*se amplía la visión, observo a los polinomios desde otra manera*" (LA) puede servir para la producción de estrategias didácticas:

El estudio de polinomios en esta unidad, bajo otro contexto o nivel al que no estaba acostumbrada, me parece, sin duda una experiencia muy buena, enriquecedora y útil para mí como futura docente graduada ya que al manejar y estudiar las propiedades

ISBN: 978-980-7464-17-8

y leyes de estos, se amplía la visión a la hora de resolver ejercicios y de buscar estrategias didácticas para la enseñanza de dicho tema a nivel escolar. (GB)

Desde nuestra perspectiva de docente-investigador creemos que las anteriores opiniones dejan entrever una matemática como fuente para la producción de estrategias didácticas, esto no es un asunto que deba trivializarse, durante mucho tiempo el saber matemático estuvo relegado a ser un "espectador" más de la didáctica general, por lo que colocarla como centro de su didáctica puede ser una reinterpretación innovadora.

Álgebra lineal como objeto

Los estudiantes también mostraron diversas interpretaciones del álgebra cuando se la considera como objeto disciplinar. En primer lugar, tomaremos en cuenta la interpretación que hace AH respecto al álgebra como asignatura:

Álgebra lineal es una materia que requiere de destrezas y habilidades, es decir, se deben conocer y manejar bien los conceptos, pero aún es más importante su significado (AH)

En cuanto a su complejidad AH la admite como consecuencia de la conexión existente entre el álgebra lineal y muchas otras áreas de la matemática:

Cuando pensaba en álgebra lineal me venían a la mente solo demostraciones abstractas, pero a medida que se ha desarrollado el contenido de la materia he notado que tiene mucha relación con análisis matemático, álgebra matricial, cálculo vectorial, cálculo integral y el manejo de muchas demostraciones. (AH)

Por lo tanto, AH manifiesta saber que el álgebra lineal tiene que ver con mucho de las otras asignaturas de su carrera.

En el caso del comentario de YC, también observa las referidas conexiones, pero va más allá al considerarla como una asignatura que recoge todo lo visto en las *álgebras anteriores.*

Me pareció interesante volver a repasar, pues estos contenidos están muy relacionados entre ellos, ya que el álgebra lineal es una recopilación de las álgebras anteriores (YC)

En realidad esta álgebra es difícil ya que reúne todos los componentes ya vistos en las demás materias (MS)

La calificación "*difícil*" que hace MS es probable que la realice por el mismo hecho de ser una materia en la cual se reúne todo lo visto anteriormente.

El álgebra lineal también puede sconsiderada como estructura álgebraica y como rama de las matemáticas, pero esto puede ser un motivo de confusión para los estudiantes, en esta dirección se encuentra la reflexión que hace YC:

La unidad de polinomios comienza hablando de álgebra lineal como un espacio vectorial sobre un cuerpo con otra operación llamada multiplicación de vectores y

> *cuando busco en internet lo que es un álgebra lineal me dice que es una rama de la matemática que estudia.... comencé la unidad con esa inquietud ¿serán diferentes estas definiciones?(YC)*

En el caso del comentario de JR, a continuación, la confusión se dio entre el álgebra lineal como asignatura y como estructura algebraica:

> *El primer impacto cognitivo se produjo con la palabra álgebra lineal, nunca pensé que existía una definición como tal, ya que siempre la había asociado a la asignatura, es decir, la consideraba como un todo (JR)*

Existen evidencias de que los estudiantes, además de las anteriores miradas al álgebra, también la conciben como un lenguaje:

> *Hasta la fecha la principal función de lenguaje algebraico es estructurar un idioma que ayude a generalizar las diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética (AP)*

El comentario de AP es interesante ya que interpreta este idioma como una herramienta que contribuye a la generalización lo cual es un aspecto clave del pensamiento algebraico.

Otra caracterización develada mediante esta investigación es el álgebra como un área equivalente al cálculo, veamos esto en los siguientes comentarios:

> *Hasta los momentos yo he resuelto ejercicios de la copia de libro Hoffman los más prácticos o sea que tienen más cálculos (SC)*
> *A la hora de estudiar seguía un procedimiento, utilizaba formulas, técnicas o ciertas herramientas que eran necesarias para la resolución de algún ejercicio, es decir, mi formación se enfocaba en un estudio sistemático y procedimental, mas no importaba el significado que pudiese tener tal expresión matemática (AH)*

CONCLUSIONES

Las interpretaciones del álgebra realizadas por los futuros profesores de matemática constituyen elementos que deben ser tomados en cuenta en un programa de formación inicial. El Curso sobre el cual se desarrolló la investigación está situado en el nivel de profundización, es obligatorio y no homologado. La primera característica alude a los tres niveles en que se constituye el currículo de la especialidad de matemática de la Universidad; el primero es de fundamentación, el segundo es de integración y el tercero de profundización. Las otras dos características dicen que todos los estudiantes de la especialidad de matemática del Instituto deben cursar esta asignatura; sin embargo, hay otros núcleos de la Universidad en donde no es obligatoria, sino que es electiva.

Toda esta descripción, básicamente administrativa, junto con la presentación del contenido programático de la asignatura no es suficiente para comprender los juicios valorativos que hacen de ella los estudiantes, creemos que si los interpretamos debidamente

ISBN: 978-980-7464-17-8

como una especie de atmósfera o cosmovisión pudiésemos tomar correctivos, por lo menos en lo que respecta al aspecto afectivo del aprendizaje. En el desarrollo de este trabajo se identificaron dos (2) categorías interpretativas que los estudiantes realizan con relación a esta asignatura, por un lado está la que tiene que ver con los usos dados al álgebra y a sus contenidos, y por otro lo relativo a ella como objeto de aprendizaje, en ésta parecen expresiones calificativas tales como difícil, engorrosa y compleja.

En lo referido al uso, se hallaron evidencias de que los estudiantes sí estiman la materia como importante para su futuro desarrollo profesional; sin embargo, también existe una especie de relación directamente proporcional con las explicitaciones de estos vínculos por parte de los docentes. Esto es importante, por cuanto las evidencias señalaron la presencia de equiparaciones del álgebra y el cálculo. Son los docentes, mediante sus prácticas, quienes, consciente o inconscientemente, refuerzan en gran medida estas posturas. Consideremos, por ejemplo, el siguiente comentario de MG que resulta revelador para lo que estamos planteando:

> *Son muy pocos los libros que leemos, pues con dificultad leemos las guías que nos facilitan algunos de los profesores y sólo nos limitamos a eso (MG).*

Esto contrasta con lo que señalan Míguez y Martín (2006) en el sentido de que debemos rescatar el valor de la lectura como actividad consustancial con el aprendizaje de la Matemática.

En el proceso de demostrar no hay consenso en los estudiantes, algunos no lo aprecian como importante, pues, desde su punto de vista, son las aplicaciones de los teoremas lo que debe enfatizarse. Creemos que este asunto requiere ser revisado con más detenimiento. Observemos con detalle los siguientes dos comentarios:

> *Siempre ha sido un problema severo enfrentarse a las demostraciones, independientemente de que sean sencillas o no, solo con el simple hecho de mencionar la palabra misma o hablar de una generalización causa un impacto en las estructuras cognitivas que dificulta el proceso de enseñanza aprendizaje (JR)*
>
> *La forma de demostrar utilizada por el profesor es distinta a la que he aprendido en cursos anteriores (JC)*

En el primer comentario llama la atención las palabras que emplea JR para referirse a la demostración: *problema severo, con sólo mencionar la palabra misma*. Por otro lado, en la siguiente reflexión JC alude a la demostración y la identifica con el estilo personal del docente, por estas razones parece razonable pensar en la necesidad de profundizar sobre la demostración en álgebra en un contexto de formación inicial de profesores de matemática.

En cuanto a atender la necesaria conexión entre teoría y práctica, tal como se evidenció, es una tarea intelectualmente exigente por ello creemos que debe ser entendida y atendida como un asunto de esfuerzo institucional sostenido a largo plazo.

Por otro lado, en el aprendizaje del álgebra lineal son frecuentes los cambios de representación de los objetos, un caso de esto es la sinonimia. Para Duval (2006) muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se originan en el desconocimiento que tienen los profesores sobre los fenómenos relativos a estas cuestiones.

Durante el desarrollo del Curso se detectó con mucha insistencia dificultades en cuanto al empleo e interpretación del simbolismo algebraico, como ejemplos se tienen los siguientes comentarios:

> *La clave para la realización de los ejercicios y de la interpretación de las propiedades de producto interno ha sido el buen empleo y lectura adecuada de los símbolos (JR)*
>
> *El símbolo con que se denoto el espacio Vectorial (la letra a) me causó mucha controversia, ya que no sé lo que significa el mismo. Sin embargo, no le presté mucha atención debido a que el profesor nos indicó que colocáramos cualquier letra si es que esa no nos gustaba (JR)*
>
> *No comprendí lo que se deseaba comprobar. Hasta que el profesor dio una pista y era de simbología (JM)*

Todo lo cual sugiere que el simbolismo no sea visto como “algo dado”, sobreentendido, tácito o implícito, por el contrario amerita ser tratado directamente durante el desarrollo de las clases como un aspecto que afecta el desenvolvimiento del pensamiento algebraico de estos futuros docentes. Nótese, mediante el siguiente comentario, lo que se quiere decir:

> *$V^t=\{0\}$ es decir, el complemento del espacio es igual al conjunto vacío. Y $\{0\}^t=V$, el complemento del conjunto vacío es igual al espacio (KT)*

Lo anterior es un ejemplo concreto de una errónea interpretación del símbolo. El estudiante no discrimina entre el conjunto vacío y el conjunto cuyo único elemento es el vector nulo.

Para finalizar, en esta investigación obtuvimos información que nos confirmó que los futuros profesores de matemáticas no son conscientes de la naturaleza de los obstáculos que conlleva el álgebra, por esa razón al estudiarla no siguen una metodología específica, adaptada a los tipos de conceptos y procesos que se manipulan en ella. Es decir, las anomalías presentadas en el Problema podemos afirmar que están directamente vinculadas con la forma en que los futuros educadores matemáticos estudian el álgebra universitaria. Así, podemos asegurar que estos estudiantes no consideran los tiempos ni los contextos para hacerlo, ello los desfavorece en su rendimiento. En consecuencia, luce importante sensibilizar a los estudiantes en lo que respecta a la adopción de estrategias de aprendizaje específicas del álgebra prevista en su plan de formación, eso les ayudaría a diseñar especies de modelos ajustados para el estudio eficaz y eficiente de las asignaturas de esta área.

ISBN: 978-980-7464-17-8

REFERENCIAS

Acevedo de M. y Falk de L. (2000). Formación del pensamiento algebraico de los docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol 3, N° 003, México.

Bachelard, G. (2007). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. México: Siglo veintiuno editores.

Drouhard, J.P. (2009). *Epistemography and algebra*. Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. January 28th - February 1st 2009, Lyon (France). Recuperado de: http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/cerme6. [Fecha de consulta: 11 enero 2015]

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La RSME*, Vol. 9.1 (2006), 143–168.

González, F. (1998). *Procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos* (Tesis doctoral). Universidad de Carabobo, Valencia.

González, F. (1999). *Los Nuevos Roles del Profesor de Matemática. Retos de la Formación de Docentes para el Siglo XXI.* Conferencia presentada en la Décima Tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 13). Santo Domingo, República Dominicana del 12 AL 16 Julio de 1999

González, A. y González, F. (2012, abril, 24). Exploración del pensamiento algebraico de profesores de matemática en formación. La Prueba EVAPAL. *Acta Scientiae*. Recuperado de:

http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/22/19.

Hoffman, K. y Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal*. México: Prentice-Hall.

León, N., Beyer, W., Serres, Y., Iglesias, M. (2013). Informe sobre la formación inicial y continua del docente de Matemática: Venezuela. *Cuadernos de investigación y Formación en Educación Matemática*, Año 8, 89-129. Recuperado de: http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/12224/11494

Míguez, A. y Martín, M. (2006). El lenguaje Natural en el aula de Matemáticas. En Mora, D. y Serrano, W. (Eds), *Lenguaje, Comunicación y Significado en Educación Matemática. Algunos aspectos sobre la relación entre Matemática, lenguaje, pensamiento y realidad desde una perspectiva crítica.* Bolivia: Campo Iris, s.r l.

Paredes, Z. (2014) *Estudio de la repitencia en el área de álgebra desde la visión de los estudiantes* (Tesis Doctoral). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias,* 1994, 12 (l), 45-56

Saracino, D. (1980). *Abstract Algebra*: *A first course*. USA. Addison-Wesley

Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica