Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática
ISBN: 978-980-7464-17-8

EL NÚMERO REAL: UNA VISIÓN DESDE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

Andreina Hernández y **Carmen Valdivé**
Liceo "Antonio Nicolás Briceño". UCLA
andre_montilla@hotmail.com, carmenv@ucla.edu.ve
Pensamiento Matemático Avanzado. Educación Universitaria

RESUMEN

En el presente manuscrito se exponen ideas y reflexiones que emergen de una investigación en educación matemática con el propósito de estudiar la conceptualización de la definición de número real en la historia y la evolución de los esquemas conceptuales asociados a la noción de número real en los profesores, participantes del curso de Análisis Numérico. Conceptualmente la investigación se enmarca dentro de la aproximación teórica cognitiva Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) desarrollada por Tall y colaboradores (2001, 2005). Metodológicamente, el estudio es de carácter Humanístico-Interpretativo, de corte descriptivo, exploratorio pues el objeto a investigar ha sido poco estudiado. La recolección de información se realizó mediante la aplicación de un cuestionario inicial y entrevistas semi-estructuradas. La técnica de análisis de la información son redes sistémicas propuestas por Bliss, Monk y Ogborn (1983) y el sistema de categorización. Para el estudio de casos, se utilizaron tres entrevistas semi-estructuradas, dos de ellas aplicadas al finalizar las dos unidades en la que se dividió el curso de Análisis Matemático. Entre los hallazgos se pueden indicar los siguientes: (1) En el estudio exploratorio se evidenció que 11 profesores de matemática que cursan la materia Análisis Matemático usan ideas informales, formales y mixtas al momento de afrontar las actividades matemáticas que se refieren a la definición del número real. (2) Se encontró siete esquemas conceptuales previos siendo dos de ellos formales tales como; el número real asociado a una cortadura de Dedekind y a una sucesión. (3) Se puedo evidenciar la evolución de las ideas asociadas al número real, pasaron de ideas intuitivas a ideas formales y mixtas.

Palabras clave: número real, pensamiento matemático avanzado, esquemas conceptuales.

PROBLEMA DE ESTUDIO

En la antigüedad, la matemática era considerada una ciencia que se dedicó principalmente al estudio de las magnitudes, los números y las generalizaciones de ambos, pero, al pasar del tiempo estos conceptos e ideas u objetos ideales evolucionaron y alcanzaron su formalización. Tal es el caso de la definición de número real, pues es un objeto matemático que tiene siglos siendo estudiado. Es un concepto matemático complejo, cuya evolución ha requerido un largo período histórico que se remonta, según los datos disponibles, a más de siete mil años (Bell, s/f). Su concepto actual es el resultado de diversas interpretaciones, obstáculos y saltos epistemológicos ocurridos a través del tiempo (Berge y Sessa, 2003, p. 165).

Así mismo, en el concepto de número real existe una brecha entre su evolución histórica dentro de la comunidad matemática, el concepto formal presentado en los procesos de enseñanza y los esquemas conceptuales estructurados por los estudiantes. Por tal razón, los procesos para construir la definición del concepto de número real, son lentos e involucran dificultades, ya que mezcla diferentes conjuntos numéricos (natural, entero, racional e irracional); cada uno con sus propiedades, operaciones y representaciones, además requiere de una comprensión formal de los procesos infinitos. Otros de los motivos que se pueden citar respecto a la dificultad de comprender rápidamente el concepto de número real, es su relación con los conceptos de límite, función y continuidad.

En tal sentido, el estudio de las limitaciones conceptuales sobre el número real que se presentaron en la historia de las matemáticas es interesante desde el punto de vista didáctico si se constata su continuidad en la enseñanza actual y, en particular, en los alumnos. Estas limitaciones también se observan en los estudiantes de la especialidad de Matemática y en los profesores de Matemática, ya que estas son vagas, incoherentes y fragmentadas (Fischbein, Jehiam y Choen; citado por Sánchez, 2010). Según Sánchez (2010), se pretende de manera intuitiva la introducción del concepto de número real, sin entrar en definiciones rigurosas ni demostraciones; es decir, en este subsistema de educación existe un problema didáctico en la forma de enseñar la definición de número real.

Igualmente, en Venezuela durante el bachillerato se construye la definición genérica de número real, se muestra su representación gráfica a través de la recta real, y algunas propiedades de estos números. Este proceso de aprendizaje se desarrolla de forma tradicional ya que se enfoca sólo en la triada teorema, demostración y ejemplo (Gascón, 2001). Asimismo, en las universidades los estudiantes de matemática presentan dificultades para comprender las definiciones formales de número real, límite y continuidad donde deben relacionar las ideas previas con las analíticas aprendidas en los cursos de matemática avanzada con el objeto de disminuir las formaciones de imágenes inapropiadas de estos conceptos (Romero, 1995; Santamaría, 2007; Valdivé, 2008; Sánchez, 2010; Ramos, 2011).

Por lo tanto, todas estas deficiencias cognitivas y epistemológicas conllevan analizar y estudiar los procesos de enseñanza y de aprendizaje del número real, concepto fundamental para la compresión de los contenidos del Cálculo y el Análisis Matemático, ya que persiste el interés por la problemática que se da en el proceso de instrucción de los conceptos de límite, continuidad, entre otros; que según Valdivé (2008) son nociones matemáticas y cognitivamente complejas, cuya conceptualización, se sirven de las ideas intuitivas que poseen los estudiantes.

Los planteamientos anteriores nos llevan a realizar un estudio sobre los esquemas conceptuales asociados a la definición de número real que tienen algunos profesores y licenciados en matemática que laboran en distintas universidades de la región ya que los mismos requieren de una noción coherente y consistente con la matemática formal. Por lo anteriormente expuesto es conveniente puntualizar las siguientes interrogantes: ¿Cuáles son los esquemas conceptuales formales e informales asociados a esta definición que

ISBN: 978-980-7464-17-8

presentan los profesores de matemática? ¿Cómo evoluciona el esquema conceptual asociado al número real del profesor de matemática cuando están en contacto con la teoría formal del Análisis Matemático?

Propósitos de la Investigación

El estudio que se presenta, tiene como propósito fundamental estudiar los esquemas conceptuales asociados al número real en los profesores, participantes del curso de Análisis Matemático de la maestría Interinstitucional en Matemática, mención Enseñanza de la Matemática UCLA-UNEXPO-UPEL-IPB.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Teoría Cognitiva Pensamiento Matemático Avanzado (PMA)

La investigación se encuentra enmarcada dentro de la teoría Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), la cual es una aproximación teórica cognitiva que ha sido desarrollada según Tall (1991, 1992, 1995, 2001, 2004, 2005) y Valdivé y Garbin (2008), afirman que el PMA es una teoría cognitiva que busca describir la naturaleza del conocimiento matemático, así como también, los procesos cognitivos que emplea el estudiante para el aprendizaje de algún conocimiento matemático. Por otra parte Tall (2001), a raíz de los trabajos de Pinto y Tall (citados por Valdivé 2008) identifican los esquemas conceptuales formales e informales.

Existen dos tipos de esquemas conceptuales, los cuales son: cognitivos y epistemológicos. Los esquemas conceptuales cognitivos son los conocimientos que el estudiante evoca sobre un concepto específico, que será de especial intereses en la investigación. En cambio el esquema conceptual en su carácter epistemológico, se refiriere a la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática (Valdivé, 2008, p.419).

Para Vinner (Citado por Sánchez, 2010) un esquema conceptual es algo que no siempre es verbal asociado mentalmente al nombre concepto. Puede ser una representación visual del concepto, pero incluye también las experiencias y sensaciones vividas en relación al mismo. Es evidente que las representaciones visuales, las imágenes mentales, las propiedades, los procedimientos, las sensaciones o las experiencias asociadas al nombre del concepto se pueden traducir a formas verbales pero, es importante recordar que dichas formas verbales no son las primeras cosa evocada en nuestra mente. Es decir, que el estudiante manipula objetos mentales sin ser necesariamente objetos físicos.

Por otra parte Tall (2001), a raíz de los trabajos de Pinto y Tall (Citados por Valdivé, 2008), identifican los esquemas conceptuales formales e informales, que son también de especial interés para la investigación que se presenta. En este orden de ideas, Valdivé (2008), considera que los esquemas formales e informales son parte del esquema conceptual asociado a un concepto que se forma en el mismo cerebro y que se pueden distinguir entre sí.

El esquema conceptual formal se entiende como aquella parte del esquema conceptual que está formalmente deducida de axiomas; es decir, cuando los estudiantes y los profesores utilizan propiedades de un concepto matemático para demostrar teoremas (Tall citado por Valdivé, 2008). Mientras el fragmento del esquema conceptual que es construido a partir de la experiencia natural del día a día, con ejemplificaciones, gráficas, procedimientos y métodos para darle significado a la definición formal, es llamado esquema conceptual informal (Valdivé, 2008, p. 417). Según Valdivé (2008) y Ramos (2011) los esquemas conceptuales evolucionan y se matizan, con rutas de aprendizaje formal, informal y mixta, producto de la experiencia. A continuación, señalamos ocho visiones históricas del número real.

Reconstrucción histórica del concepto de número real

I visión histórica: Nace la idea de número: "El número natural": Nuestras primeras ideas de número se remontan hasta tiempos muy antiguos en la Edad de Piedra, hace unos 40.000 años aproximadamente, éste nace como parte de la vida cotidiana del hombre siendo una especie de conciencia gradual producida dentro del desarrollo cultural del ser humano. Es decir que reconocieron una propiedad abstracta a la que llamaron número (Boyer, 2003; Edward, 1979; Struik, 2002).

II visión histórica: Surge "el racional" como segmento conmensurable, razón o proporción: Para la matemática griega una fracción que se escribía como a/b no se consideraba como número, como una sola entidad, sino como una relación o proporción$a:b$ entre el número a y b. (Edward, 1979; p.6).

III visión histórica: Surge "el irracional" en el contexto geométrico: La matemática egipcia tenía una falla, ya que no hacían una distinción entre las razones geométricas exactas y la aproximación de razones. Entre sus aporte se tiene que en el problema 50 de Ahmes admite que el área de un campo circular de 9 unidades de diámetro es la misma que el área de un cuadrado de lado 8 unidades (Boyer, 2003)

IV visión histórica: Aparece un número especial "el cero": Fue en la era de los Persas, llamada la "Invención del Cero" donde hizo su aparición el cero en el año 876 a.C para una posición que falta, así el sistema de numeración moderno incluye diez simbolos 0,1. 2.…,9 (Boyer, 2003)

*V visión histórica: aceptación del negativo como número***:** Para Struik (2002), Cantoral y Farfan (2004), los matemáticos L`Hôpital (1707) y Johan Dotre Witt (1659) vacilaron en aceptar números negativos para las coordenadas.

ISBN: 978-980-7464-17-8

VI visión histórica: Hacia la consolidación del número real como racionales o irracionales: Durante el siglo XI el matemático árabe Omar Khayyam (1050-1123 d. C) remplazo la teoría de proporciones geométrica de Euclides por un planteamiento numérico, éste matemático se acercó a la definición de número irracional, y lucho de hecho con el concepto de número real en general. (Edward, 1979; p. 81).

VII visión histórica: Surgen a lo largo de la historia las fracciones continuas y decimales para aproximar un número real: En el siglo XVI el matemático germánico Michael Stifel (1486-1567) expresaba que un número decimal infinito no es un número, un número irracional no es un número verdadero, pues para él los números eran o enteros o fraccionarios y obviamente, los irracionales no están incluidos en esta tipificación. (Boyer, 2003).

VIII visión histórica: Formalización del número real: Durante el año 1821 Agustín-Louis Cauchy (1789-1857), define el límite de una de una sucesión como un número real y después, a su vez define el número real como el límite de una sucesión de números racionales. (Edward, 1979). Por su parte, Méray (1835-1911) considero un número racional como límite o un "número ficticio" refiriéndose a los números irracionales De igual forma Cantor se basada en el conjunto de los números racionales, con el cual forma sucesiones fundamentales y una relación de equivalencia entre ellas; esto le permite definir los números irracionales y en términos generales, los números reales (Boyer, 2003; p. 694).

METODOLOGÍA

La investigación se enmarcará bajo el enfoque cualitativo-interpretativo, ya que es holística, intenta estudiar la realidad de manera global y los objetos de estudios no son reducidos a variable, sino considerados como un todo; es inductiva y descriptivo ya que se estudian diversos autores, respetando el punto de vista de cada uno con referencia al concepto en estudio. De tal manera que sus hallazgos permitan encontrar elementos que ayuden desde las voces de los autores aproximarnos a sus esquemas conceptuales asociados a la definición del número real.

Los informantes claves son once profesores de matemática que cursan la asignatura Análisis Matemático, durante el lapso académico I-2014, este curso está ubicado en el primer trimestre de la Maestría Interinstitucional de Matemática mención "Enseñanza de la Matemática" de UCLA-UNEXPO-UPEL. Las técnicas de recolección de la información utilizada fueron, cuestionarios y entrevistas semi-estructuradas. El cuestionario fue validado previamente por 3 expertos en el área a fin de obtener resultados confiables.

Tabla 1: Descripción del Cuestionario aplicado a los actores sociales

PARTE	Nº DE PREGUNTAS	PROPÓSITO
I	1era pregunta	Conocer la definición de número real que el estudiante evoca. Esto para saber si es intuitiva informal, analítica formal, aritmética informal o geométrica informal o formal.
	2da pregunta	Identificar si conoce todas las propiedades que cumplen los números reales y de qué manera las aplica. Esto para saber si conoce y dominan la definición axiomática de número real como conocimiento previo.
II	1era pregunta	Identificar en los estudiantes las representaciones (graficas, dibujos, símbolos) que hacen emerger un número real. Esto para saber si construir algunos números reales por medio de la intuición, la geometría informal o formal.
	2da pregunta	Indagar sobre la manera cómo el estudiante interpreta y expresa la relación entre el número real y a recta numérica. Para observar si conocen la continuidad de R y de y qué contexto utiliza para expresarla.
III	1 pregunta	Explicar la densidad de I, Q en R. Observar cómo relaciona estas tres cuestiones y en qué contexto el estudiante los asocia
IV	1era pregunta	Determinar la manera como asocia las cortaduras de Dedekind, los métodos y procedimientos que utiliza. Esto para saber si utiliza la definición de número real como cortadura.
	2da pregunta	Determinar la manera como el estudiante asocia e interpreta un número real como una sucesión de Cauchy, así como los métodos y procedimientos que utiliza y conocer las definiciones asociadas y teoremas que implementa.

Para el estudio de casos, se utilizaron tres entrevistas semi-estructuradas, dos de ellas aplicadas al finalizar las dos unidades en la que se dividió el curso de Análisis Matemático.

ISBN: 978-980-7464-17-8

Metodologías Específicas de análisis

Fragmentación de la información: Se resumió la información de la siguiente forma: (a) una transcripción de las repuestas proporcionadas por los actores sociales en el cuestionario inicial, (b) una transcripción de las respuestas proporcionada por informantes clave en las entrevistas semi-estructuradas. La información se separa en unidades de análisis tal como lo establece Valdivé (2008, p.110)

Identificación y clasificación de las unidades de análisis: los informantes se clasificaron según lo propuesto por Valdivé (2008, p. 459) tomando en cuenta las respuestas dadas por los actores y la interacción entre ellas. Luego, se seleccionaron los actores clave para el estudio de caso donde se les realizó una entrevista semi-estructurada al finalizar cada unidad en la que se divide el curso de Análisis Matemático.

Disposición y Organización de la Información: las respuestas de los profesores se organizan en unas matrices de análisis, la primera conformada por tres columnas donde analizó la respuesta de cada actor y se categorizó de acuerdo a las ideas formales e informales

Descripción estructurada: Hallazgos: Para el análisis de las respuestas del cuestionario inicial facilitadas por los actores sociales se utilizó como técnica la elaboración de redes sistémicas para cada pregunta del cuestionario que permitió acércanos a los esquemas conceptuales cognitivos, seguido de cada red sistémica se describen los hallazgos. Además, se identifican los esquemas conceptuales evocados por los actores sociales y se aplica la caracterización de los esquemas conceptuales hecha por Valdivé (2008). Para el estudio de caso se realizó un análisis simultáneo de las respuestas emitidas por los actores sociales en cada una de entrevistas y se hizo una caracterización final de los esquemas conceptuales asociados a la definición de número real que emergen al entrar en contacto con la teoría formal.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Análisis Descriptivo del Cuestionario Inicial

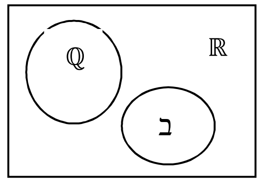
Se observó un gran número de respuesta al aplicar el cuestionario inicial al grupo de 11 profesores de matemática (estudiantes del curso Análisis Matemático) Se denominó como respuesta no contestada aquella dejada en blanco. En esta investigación, para el análisis se utilizará las iniciales Pn donde "n" indica el número del profesor, al cual se está haciendo referencia.

Análisis descriptivo de la primera pregunta parte I (Definición formal de número real)

Análisis de las respuestas de los profesores. Se encontró que los 11 profesores responden empleado ideas informales, expresando 4 profesores (1, 2, 6, 11) de manera errada que el número real se define como la unión de los números racionales y los irracionales. El profesor (6) Plantea sus ideas de la manera siguiente:

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \beth$

.



Se induce que los profesores (3, 4, 7, 8, 10) asocian un número real con un símbolo matemático pues expresan que es un símbolo o elemento matemático que puede ser racional o irracional. Por ejemplo, profesor (8) representan sus ideas como sigue:

P(8): Un numero x es un número real si $x \in \mathbb{Q}$ ó $x \in \beth$ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \beth$

Además, el estudiante (10) agrega a su respuesta, la representación del conjunto de los números reales a través de un diagrama de Venn:

En cambio, el estudiante (5) asocia un número real como un elemento del conjunto R, como el infinito potencial ya que expresa que los números reales son los números desde $(-\infty, +\infty)$. Contrariamente el profesor (9) afirma que es un objeto, una abstracción de nuestra mente, esta respuesta es insuficiente para caracterizar la idea informal que tiene de número real.

A partir de las redes sistémicas y el análisis descriptivo de cada una de las respuestas del cuestionario inicial dada por los profesores de Matemática, se extraen siete esquemas conceptuales previos (en esta investigación al hacer referencia al esquema conceptual Metbefore se usara las iníciales ECM_n, la “n” representa el número del esquema conceptual Metbefore), los cuales son:

EC_1: El número real como una cortadura de Dedekind.

ECM_1: El número real como un punto en la recta.

EC_2: El número real como una sucesión.

ECM_2: El número real asociado con el infinito.

ECM_3: El número real asociado a un elemento de un conjunto.

ECM_4: El número real como un racional o irracional.

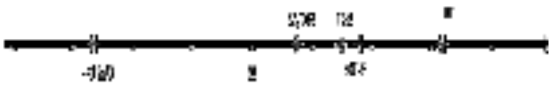
ISBN: 978-980-7464-17-8

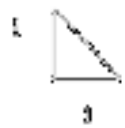
ECM_5: El número real asociado a un símbolo.

Caracterización del ECM_1: El número real como un punto en la recta.

Ideas: Representación de un número real en la línea recta.

Representaciones asociadas a la noción:





$$\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \hline 30 & 2,75 \\ 20 & \end{array}$$

$\sqrt{2} \approx 1,41$

Representaciones que los hacen emerger: (a) expansión decimal. (b) significado parte-todo de una fracción. (c) relación biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta. d) la relación de orden y densidad.

Contexto: (a) aritmético y b) geométrico.

Procedimiento: (a) Aritmético: cálculos de radicales y divisiones, aproximación de expresión decimal, proporción existente entre la longitud del perímetro del círculo y la longitud de su diámetro. (b) Geométrico: representación de un número mediante un punto de la recta, grafica $\sqrt{2}$ a través de un triángulo rectángulo de catetos 1unidad. (c) Intuitivo: Construyen los números reales por medio de aproximación decimal. Representa en la línea recta los algunos términos de la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ para visualizar que converge a 0.

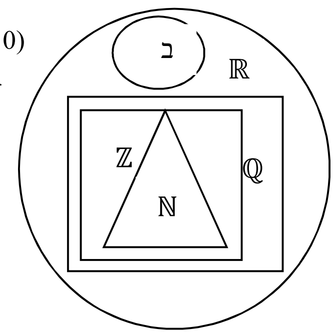
Conceptos asociados: Teorema de Pitágoras, números racionales e irracionales, perímetro del círculo, línea recta, densidad y sucesiones.

Define formalmente qué es para ti un número real.

El Número Real como elemento de la unión de conjuntos

- Aquel que tiene forma de toda las formas de los conjuntos $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, ב)$. (P3)
- Un número x es un número real si $x \in \mathbb{Q}$ ó $x \in ב$ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup ב$ (P4) (P7) (P8)
- Es un símbolo que puede representas cualquier número de los conjuntos Naturales, Enteros, racionales e Irracionales. (P 10)
- Es un conjunto formado por la unión de los números racionales y los irracionales*. (P 6) (P 11)
- Complementa las insuficiencias de sus subconjuntos Naturales, Enteros, racionales e Irracionales *. (P2) (P1)

Diagrama de Venn



El número real en un conjunto como infinito potencial

- Son los números desde $(-\infty, +\infty)$ (P 5)

El número real es un objeto

- una abstracción de nuestra mente que nos ayuda a representar parte de lo complejo de la vida. (P9)

Figura 1. Define formalmente qué es para ti un número real

Clasificación de los Profesores que cursan Análisis Matemático

Una vez realizado el análisis descriptivo por pregunta como por profesor se procede a la clasificación de los profesores según el tipo de ideas, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 2: Cuadro de Tipología de los Profesores

Categoría	Profesores
Profesor Formales	(9)
Profesor Informales	(1,2,3,4,5,6,8,10,11)
Profesor Mixto Puro	(7)
Profesor Mixto	---

Selección de los Profesores Clave

ISBN: 978-980-7464-17-8

El análisis descriptivo de las respuestas emitidas por los 11 profesores de Matemática en el cuestionario inicial permite seleccionar cuatro de ellos para describir por medio de redes sistémicas los procedimientos, representaciones empleadas y las definiciones asociadas al número real, y los esquemas conceptuales asociados a las definiciones estudiadas en Análisis Matemático.

Los profesores clave se eligen de acuerdo a su clasificación según tipo de ideas, para estudiar la evolución de los esquemas conceptuales previos encontrados en el cuestionario inicial.

Tabla 3: Tipología de los Informantes Clave según sus idea**s**

Profesores	Caracterización
Nº1	**Informal:** ya que en 2 respuestas utiliza ideas formales, en 4 respuestas ideas informales y en 1 respuesta mezcla ideas formales con ideas informales
Nº 7	**Mixto Puro:** ya que en 3 respuestas utiliza ideas formales, en 2 respuestas ideas informales y en 2 respuestas mezcla ideas formales con ideas informales.
Nº9	**Formal:** ya que en 4 respuestas utiliza ideas formales, en 2 respuestas ideas informales y en 1 respuestas mezcla ideas formales con ideas informales.

El profesor clave asocia al número real con un símbolo que puede ser racional o irracional (P7) y a un objeto abstracto (P9). Por su parte el informarte (P1) define el número real como un conjunto, lo cual es incorrecto. Pero estos informantes también asocian el número real con su definición axiomática, es decir elemento de un cuerpo ordenado y completo que cumple ciertas propiedades e incluso la utilizan en el contexto aritmético y analítico a través de resolución de ejercicios y demostraciones de teoremas.

En cuanto al procedimiento para construir algunos números los profesores utilizan: a) la intuición (P9) y b) geometría formal (P1, P9). Asimismo, los informantes claves (P1, P7) comprenden la propiedad de densidad en $\mathbb{R}$ e incluso el profesor clave (P9) demuestra el teorema que fundamenta esta propiedad. Sin embargo, al estudiar las cerradura de la adición de los números reales los profesores asocian la cortadura de Dedekind (P7) y la sucesión de Cauchy (P9) a esta noción, además estos profesores al momento de demostrar la convergencia de una sucesión emplean ideas intuitivas de límites y la definición informal (P1) y formal (P7, P9) de sucesiones convergentes. Esto hace pensar en el uso de ideas informales y formales por parte de los estudiantes en cuanto a la definición de número real.

Este análisis descriptivo sobre las ideas previas asociadas a la definición de número real que usan los 3 profesores clave se puede resumen a través de la siguiente tipología:

Tabla 8 Tipología de los profesores clave según los esquemas conceptuales previos que asocia al número real

PC/ ECM	El número real como una cortadura de Dedekind	El número real como un punto en la recta.	El número real como una sucesión	EL número real asociado con el infinito potencial	El número real asociado a un elemento de un conjunto.	El número real como un racional o irracional	El número real asociado a un símbolo.
(P1)		✓	✓		✓		✓
(P7)	✓	✓	✓		✓	✓	✓
(P9)			✓		✓		

Estudio de la Evolución y Caracterización de los Esquemas Conceptuales Asociados a la Definición de Número Real en los Profesores que cursan Análisis Matemático

Después de empezar el curso de Análisis Matemático fue de interés estudiar si los esquemas conceptuales previos asociados a la definición de número real de los profesores que cursaban la materia, que fueron encontrados en el cuestionario inicial, evolucionan e interactúan con definiciones, conceptos y teorías formales a lo largo de la materia.

Partiendo de lo expuesto y en función de los objetivos propuestos, se realizó un estudio de caso de los cuatro profesores clave que respondieron el cuestionario inicial y se les aplicaron dos entrevistas semí-estructuradas, al final de cada unidad del curso de Análisis Matemático, las cuales fueron grabadas ya que los actores no permiten que se les filme. Cada entrevista tuvo una mínima duración de 20 minutos y una máxima de 50 minutos. La primera se aplicó el día 10 de Abril y la segunda el día 15 de Mayo del 2014. A continuación, se expone el estudio de caso de uno de los profesores de Matemática donde se muestra dicho análisis.

Caso Profesor 1

Caracterización iniciar del profesor

El Profesor 1 fue inicialmente caracterizado como Informal, ya que en dos respuestas utiliza ideas formales, en cuatro respuestas ideas informales y en una respuesta mezcla ideas formales con ideas informales.

Caracterización final del Profesor 1.

Los esquemas conceptuales previos del Profesor asociado a la definición que se encontraron en el cuestionario inicial algunos evolucionan para acomodar la idea de la definición. Las ideas del número real que asocia a elementos de los conjuntos racionales e irracionales evolucionan y afloran nuevas ideas como las sucesiones convergentes de Cauchy y las cortaduras de Dedekind. Se piensa que el profesor también mantiene un pensamiento análogo al mostrado por Hilbert pues considera al número real como un objeto que cumple los axiomas del cálculo y de orden. La idea de número real la asocia a una aproximación decimal y a un punto de la recta.

Las ideas formales como las definiciones y teoremas donde alude al número real serian cortadura, cuerpo, sucesiones, perímetro, el Teorema de Densidad y Teorema de Pitágoras, pero en el caso de la definición de cortadura se apoya en una representación gráfica para describirla. La idea que evoca como punto de la recta que alude en las respuestas de la parte II del cuestionario inicial evoluciona, ya que justifica a partir del Teorema de Pitágoras y la definición de perímetro de un círculo.

Finalmente se percibe que el profesor construye las propiedades y características del objeto matemático número real a partir de la interacciones formales con las ideas informales ya que utiliza en la mayoría de los caso ejemplos y representación para ilustrar la definiciones. Esto nos hace pensar en una línea mixta que usa el profesor para construir teoría matemática formal asociada a la definición de número real.

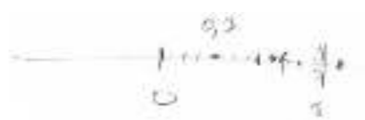
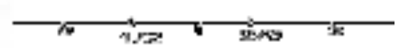
A continuación se expone la caracterización de los esquemas conceptuales asociados a la definición de número real del profesor 1.

Caracterización del esquema conceptual mixto (1era entrevista)

Ideas: (a) Informal: Unión de números racionales e irracionales. (b) Formales: el número real como una cortadura de Dedekind, objetos matemáticos que cumplen los axiomas del cálculo y orden.

Representaciones asociados a la noción: $a \in \mathbb{Q}$, $c \in \beth$, $-(-a) = a$, $\sqrt{2}$, π



Conceptos asociados: cuerpo ordenado y completo, Cortadura de Dedekind, sucesiones, densidad, perímetro del círculo.

Contexto: (a) Analítico (b) Geométrico

Procedimientos: (a) Analítico: aplica las propiedades que cumplen los números reales para demostrar que se cumple la igualdad $-(-\mathrm{a}) = \mathrm{a}$ (b) Geométrico: representación de un número mediante un punto de la recta, grafica $\sqrt{2}$ a través de un triángulo rectángulo de catetos 1unidad, representa π en la circunferencia.

Ejemplos: Geométrico: comprueba gráficamente que la suma de números reales es cerrada. Analítico: demostrar la igualdad $-(-\mathrm{a}) = \mathrm{a}$.

Caracterización del esquema conceptual mixto (2da entrevista)

Ideas: (a) Formal: el número real como una sucesión de Cauchy y el número real como una Cortadura de Dedekind. (b) Informal: el número real como una aproximación decimal

Representaciones asociados a la noción: $\frac{11}{3} \approx 0{,}33 \ldots\ \pi \approx 3{,}140000$ $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2+1}$ $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ $\lim_{x\to 0} a_n = 0$

Conceptos asociados: Formales: cortadura de Dedekind, sucesiones, aproximaciones numéricas.

Contexto: (a) Aritmético- Geométrico

*Procedimientos: (*a) Aritmético: cálculos de aproximaciones decimales, calcula el límite de una sucesión. (b) Geométrico: representa la cortadura de Dedekind haciendo particiones en la recta.

Ejemplos: Aritmético: calcula el límite de la sucesión $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ para corroborar que converge a 0. Aproxima el número π a un racional, calcula la expansión decimal de $1/_7$, $1/_3$

HALLAZGOS

Del análisis de las respuestas del cuestionario observamos que los profesores antes de entrar en contacto con la teoría formal de Análisis Matemático respectivamente, responden a las situaciones matemáticas planteadas basándose en sus ideas previas, percepciones y experiencia que han aprendido a lo largo de su carrera.

Hemos encontrado siete esquemas conceptuales previos siendo dos de ellos formales tales como; el número real asociado a una cortadura de Dedekind y a una sucesión, semejantes a las ideas encontradas en la evolución historia de esta noción, y cinco informales los cuales son: asociado a un símbolo, como un punto sobre la recta, como un elemento racional o irracional, como elemento de un conjunto, asociado al infinito potencial; algunos de ellos similares a los encontrados en el estudio realizado por Ramos (2011).

Percibimos que los profesores que cursan Análisis Matemático usan ideas formales, informales y mixtas a la hora de afrontar una actividad matemática que alude al número real. Algunos de ellos emplean definiciones o argumentos matemáticos en las preguntas donde había que afrontar una demostración o enunciar un teorema.

Después de realizar el análisis simultáneo entre las dos entrevista realizadas a los Profesores Clave que cursaban Análisis Matemático después de entrar en contacto con la teoría formal se puedo evidenciar la evolución de las ideas asociadas al número real, pasaron de utilizar ideas intuitivas a ideas formales y mixtas. Sus respuestas hacen emerger esquemas conceptuales formales ya que asocian el número real como una cortadura y una sucesión definiciones propuestas en el siglo XIX por Dedekind y Cauchy respectivamente.

REFERENCIAS

Bell, E. (s/f). *Los grandes matemáticos, su vida y su obra*. Editorial Losada. Buenos Aires.

Berge, C. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisada a través de los siglos. Aporte a una investigación didáctica. *Relime 6* (3), 163-197.

Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative Data Analysis for Educational Research*. London: CroomHelm

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics and Cognition*, 113-134. Cambridge: Cambridge University Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 3-21. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*Relime*), 4(2), 129-159

Ramos, A. (2011). *Estudio de los esquemas conceptuales asociados a las definiciones formales del Análisis Matemático* I. Trabajo de Grado de Maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico de Barquisimeto. UCLA-UPEL-UNEXPO.

Romero, I (1995). *La introducción de número real en educación Secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Sanabria, G(s/f). *Los números reales utilizando cortadura de Dedekind y sucesiones de Cauchy: una Propuesta Didáctica*. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática.

Sánchez, J (2010*). Estudio didáctico y epistemológico de la Noción del Número Irracional*. Trabajo de Grado de Maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico de Barquisimeto. UCLA-UPEL-UNEXPO.

Santamaria, J. (2007).*Esquema conceptual asociado al Infinito formal (los infinitesimales) en el Pensamiento de los estudiantes*. Trabajo de Grado de Maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico de Barquisimeto. UCLA-UPEL-UNEXPO.

Santamaría, J. y Valdivé, C. (2007). *Esquemas conceptuales asociados a los infinitesimales en el pensamiento de los estudiantes para profesores de matemática*. Ponencia presentada en la 21 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Maracaibo, Venezuela.

Tall, D. (2005). *The transition form embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof.* Proceedings of the Delta Conference of the International Group for thePsychology of Mathematics Education, 1-16. Frazer, Island, Australia.

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. Proceedings of the 28thConference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1-16.Bergen, Norway.

Tall, D. (2001).Natural and formal infinities.*Educational Studies en Mathematics,* 48 (2 y 3), 200-238.

Tall, D. (1995).*Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinkhing*.Proceedings of the 19th International Conference of the International Group for thePsychology of Mathematics Educations, 61-75. Recife, Brasil.

Tall, D. (1991).The psychology of advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 3-21. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Valdivé, C. (2008). *Esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal y su evolución en estudiantes de Análisis Matemático.* Tesis Doctoral no publicada. UCLA-UNEXPO-UPEL.

Valdivé C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución histórica de la Noción de Infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 11(3), 413-45.