Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática
ISBN: 978-980-7464-17-8

CARACTERÍSTICAS DISTINTIVAS DE LOS SIGNIFICADOS DE DIVISOR PUESTOS DE MANIFIESTO POR DOCENTES EN FORMACIÓN EN EL DESARROLLO DE UN MODELO DE ENSEÑANZA

Ángel López
Universidad de Carabobo
anlopez169@gmail.com, anlopez@uc.edu.ve
Formación de Docentes de Educación Primaria

RESUMEN

La investigación realizada, en términos generales, aborda el problema de los significados de la divisibilidad de docentes en formación y fue desarrollada en el seno del grupo FQM-193 "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada. Uno de nuestros objetivos fue describir y caracterizar los significados de divisor que muestran un grupo de maestros en formación. Utilizamos el análisis didáctico como un marco para interpretar, con base en los organizadores del currículo, los significados en las matemáticas escolares (Gómez, 2007; Rico, 1997, 2013a, 2013b, 2015). Para lograr nuestro propósito diseñamos un experimento de enseñanza (dentro del paradigma de la investigación de diseño). Para realizar el experimento de enseñanza escogimos intencionalmente un grupo de 37 maestros en formación, que en el periodo 2012-2013 estaban matriculados en la asignatura Bases Matemáticas para Educación Primaria, del Grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada. Para analizar los resultados, observamos en las producciones escritas de los maestros en formación cinco tareas y complementamos la información con grabaciones de audio y de video. Identificamos la presencia de tres variables de interés para el estudio del significado de divisor en las cinco tareas: (a) divisor como consecuencia de haber realizado una división y que resulte exacta, (b) divisor como relación y (c) divisor como el rol en una división. Realizamos un análisis clúster atendiendo a las variables identificadas y a los organizadores del currículo (estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología). Determinamos las características distintivas de cada uno de los conglomerados según el análisis de contenido del análisis didáctico.

Palabras clave: análisis didáctico, divisibilidad, formación de docentes.

INTRODUCCIÓN

La relevancia y pertinencia de este estudio tiene que ver con la necesidad de formar docentes con un conocimiento profundo del contenido matemático y con la presencia en el currículo, tanto de primaria como de secundaria, de la divisibilidad como contenido matemático. Recientemente se han hecho un conjunto de investigaciones que dan cuenta del estado de la cuestión sobre el contenido matemático de la divisibilidad en la formación de docentes (Bodí, Valls y Llinares, 2007; Brown, Thomas y Tolias, 2002; Campbell, 2006; Feldman, 2012; Lavy, 2006; Liljedahl, 2006; López y Cañadas, 2013; López, Castro y Cañadas, 2013a, 2013b, 2015, 2016; Martin y Herel, 1989; Zazkis y Campbell, 1996a, 1996b, 2006).

La divisibilidad se define desde la estructura de los números enteros y en el caso de las matemáticas escolares se restringe al caso de los enteros positivos. Para definir la divisibilidad se utiliza la estructura multiplicativa, de ahí la importancia que los docentes en formación comprendan la estructura multiplicativa en los números enteros positivos y su relación con la divisibilidad. Sin embargo, la comprensión de la divisibilidad pasa por advertir que desde la misma estructura multiplicativa se definen relaciones que son equivalentes entre sí, como divisor-factor o múltiplo-divisible, y otras que son inversas, como múltiplo-divisor o divisible-factor. Todas estas relaciones, asociadas a la divisibilidad, se definen desde la misma estructura multiplicativa, lo cual supone una dificultad en la comprensión de las mismas.

Por otra parte, la divisibilidad tiene asociados términos como divisor y factor que también son términos asociados a operaciones aritméticas. Esto supone una ambigüedad de significado; dada por la homonimia de los términos. Estos términos tienen un significado en las operaciones aritméticas y otro en la divisibilidad. En la operación de multiplicación, por ejemplo, al multiplicador y al multiplicando habitualmente se les denomina factores y en la operación de división el término divisor es usado para llamar a uno de los elementos que participan en una división (dividendo, divisor, cociente y resto). En la divisibilidad factor y divisor son usados para determinar una relación de orden entre números.

En las aulas de Educación Primaria, la divisibilidad se trabaja después de que los escolares conozcan la división, exacta y entera, sus términos, y el algoritmo de la división. Este conocimiento previo puede obstaculizar el aprendizaje de la divisibilidad como relación, perdurando solamente la idea de la división exacta (López et al., 2016). Por ejemplo, algunos estudiantes, para conocer si 7 es divisor de $3\times7\times2$, realizan los productos y dividen el resultado obtenido por 7, para dar la respuesta después de comprobar si la división es o no exacta (López et al., 2013a).

En esta investigación distinguimos la relación de divisibilidad de la operación de división. Por ejemplo, cuando se escribe $12+1$, 4×5, $12\div3$, se hace una clara referencia a una operación aritmética entre los números. En cada caso, se obtiene un resultado numérico de la expresión. Sin embargo, cuando se escribe doce es mayor que tres, se expresa una relación entre esos dos números. En general, podemos decir que para cualquier par de números “a” y “b”, $a>b$ puede ser verdadera o falsa y no un número. De forma análoga sucede con la división y la divisibilidad. Si la pregunta es ¿cuál es el resultado de la operación $12\div3$? la respuesta es claramente 4, pero si la pregunta es ¿3 divide a 12? o ¿3 es divisor de 12? la respuesta no sería el número 4, ni siquiera es un número. La diferencia entre las dos expresiones es clara; en una se pregunta por la respuesta de una división y en la otra se pregunta por la relación entre dos números.

Otro aspecto a tomar en cuenta es la representación canónica de un número, dado por el teorema fundamental de la aritmética. La representación de un número como el

ISBN: 978-980-7464-17-8

producto de factores primos tiene asociado un conjunto de divisores que son explícitos y otros que no. Algunos de estos divisores no explícitos son resultados de productos internos en la descomposición canónica del número y en ocasiones los estudiantes tienden a no considerarlos como divisores del número; por no estar explícitos en la representación canónica del número (López y Cañadas, 2013).

Que un docente comprenda los conceptos relacionados con la teoría de números y específicamente con los conceptos asociados a la divisibilidad, como el caso de divisor, significa que abre grandes posibilidades a sus estudiantes y para el mismo, a la comprensión profunda de la estructura matemática. En caso contrario tendremos docentes o estudiantes que se pregunten para qué estudiar la divisibilidad si es lo mismo que la división pero con otro nombre, o como el caso de los maestros en formación que participaron en el estudio de Zazkis, Sinclair, y Liljedahl, (2013) que preguntaron muchas veces "por qué las reglas de divisibilidad se encuentran todavía en el plan de estudios cuando la cuestión de la divisibilidad se puede responder con rapidez y precisión con una calculadora" (p. 58).

Por todo lo expuesto anteriormente, y, teniendo en cuenta lo expresado por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2014) cuando afirma que existen algunas realidades inquietantes e improductivas en muchas aulas, escuelas y distritos, tales como, demasiada atención centrada en los procedimientos de aprendizaje sin ninguna conexión con el significado, la comprensión, o las aplicaciones que requieren estos procedimientos. Elaboramos un modelo para promover el aprendizaje centrado en la divisibilidad como una relación de orden, en el cual abordamos las dificultades planteadas anteriormente. En ese contexto nos planteamos como objetivo: determinar las características distintivas de los significados de divisor que ponen de manifiesto los docentes en formación en sus producciones escritas.

MARCO TEÓRICO

Nuestra investigación se fundamenta en dos pilares: la divisibilidad como conocimiento matemático en el contexto de la formación de profesores y el análisis didáctico. La divisibilidad la estudiamos desde el anillo de los enteros como una relación de orden (parcial) y no como una operación aritmética cuyo interés es determinar el resultado de la operación. En ese sentido vemos la divisibilidad como una teoría bien definida y elaborada, en la cual, definiciones, teoremas, propiedades están vinculadas entre sí y se pueden inferir unas de otras. La divisibilidad en esta investigación la entendemos en los términos que plantea Dedekind; como una teoría general que se desarrolla en un anillo, en nuestro caso la restringimos al anillo de los enteros Z. Así mismo, en la planificación de las tareas del experimento de enseñanza hemos considerado el conjunto de los enteros positivos Z^+.

Con respecto a la formación de profesores, nos centramos en el conocimiento del contenido matemático, específicamente, en el conocimiento del contenido matemático escolar, de maestros en formación, en el dominio de la divisibilidad. Asumimos el conocimiento sobre un contenido matemático escolar "como el dominio de los significados matemáticos básicos de un contenido, necesarios para su trabajo profesional" (Rico, 2015, p. 31).

Con respecto al análisis didáctico, lo asumimos desde la perspectiva teórica desarrollada ampliamente en el seno del grupo FQM-193 "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" (Cañadas y Castro, 2013; Gómez, 2007; Gómez y Cañadas, 2012; Lupiáñez, 2009; Rico, 2013a, 2013b; Rico y Fernández-Cano, 2013, Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

El análisis didáctico está estructurado en cinco análisis. Cada uno de los cinco análisis que conforman el ciclo depende de diferentes elementos organizadores. Estos organizadores son las categorías de cada uno de los análisis del análisis didáctico. El conjunto de las categorías, fundamentadas en el marco curricular (organizadores del currículo), estructuran el procedimiento de análisis-síntesis llamado análisis didáctico (véase figura 1). En este trabajo daremos cuenta solo del análisis de contenido como marco para interpretar los significados.

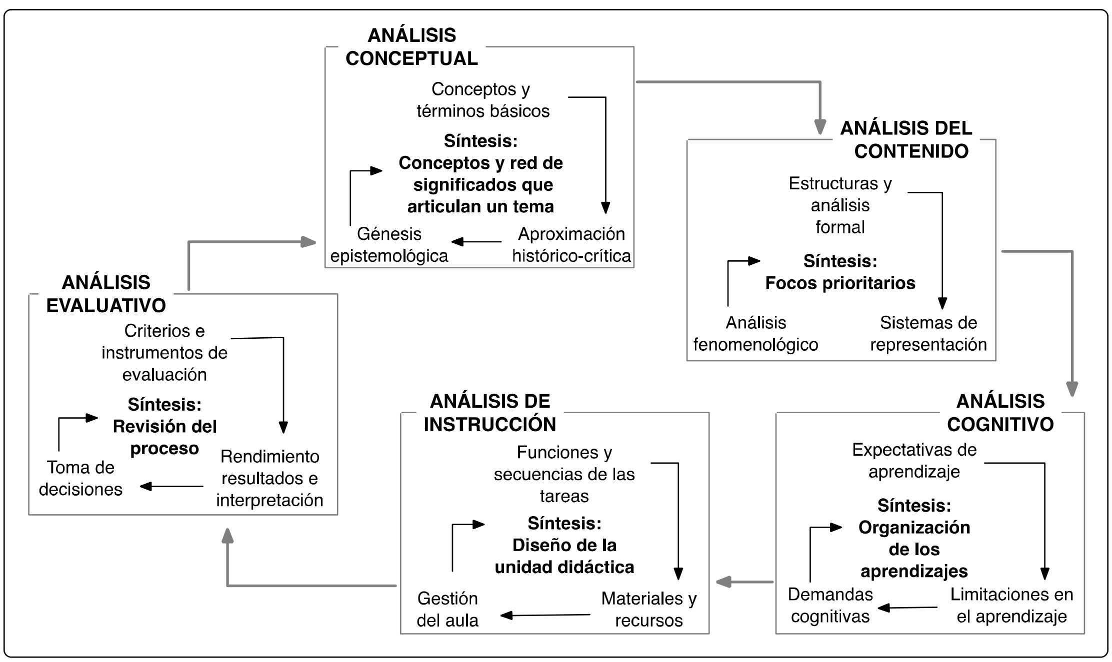


Figura 1. Estructura del análisis didáctico. Fuente: (Rico y Fernández-Cano 2013)

El análisis de contenido está formado por los organizadores del currículo: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología (modo de uso del concepto). En la figura 2 recogemos un esquema del análisis de contenido en el contexto del análisis didáctico y los elementos de los tres organizadores que utilizaremos como herramienta para el análisis de los significados de divisor.

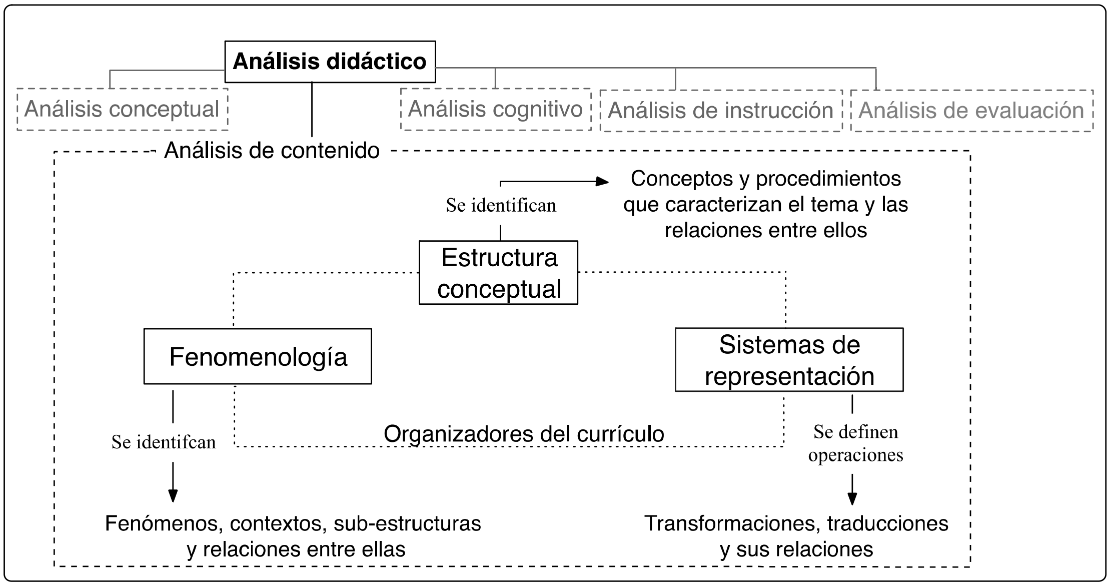


Figura 2. Análisis de contenido y organizadores del currículo

MARCO METODOLÓGICO

La investigación que realizamos y que presentamos es un Experimento de Enseñanza, que se encuadra en el paradigma de la Investigación de Diseño. La investigación basada en diseño (design-based research, DBR por sus siglas en inglés) o investigación de diseño es un paradigma metodológico emergente en la investigación educativa y ha sido desarrollada por y para educadores con el propósito de abordar la investigación desde un contexto educativo real (Anderson y Shattuck, 2012). Desde que Brown (1992) publicara su artículo sobre diseño de experimento y Collins (1992) el capítulo de un libro en el cual argumentaba que la educación debe ser vista como una ciencia de diseño, el uso de la metodología de investigación de diseño se ha ido incrementando en investigaciones en contextos educativos y ambientes de aprendizaje.

Los sujetos de estudio fueron 37 maestros en formación, tomados intencionalmente, del curso académico 2012-2013, alumnos de la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria, del Grado en Educación Primaria de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

En la tabla 1 mostramos las fuentes de información para cada una de las tres sesiones del experimento de enseñanza.

Tabla 1
Datos recogidos en las sesiones del experimento de enseñanza

Fuente de información	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3
Producción escrita individual. Resolución de tareas	*	*	
Producción escrita grupal. Resolución de tareas			*
Intervenciones orales (de los maestros en formación y profesora)	*	*	*
Grabación de audio	*	*	*
Grabación de video	*		*

Para poder analizar la cantidad de datos recogidos en las tres sesiones del experimento de enseñanza, desarrollamos un sistema de categorías, códigos y descriptores que nos permiten procesar los datos de manera organizada.

Definimos dos dimensiones: según el énfasis en la conclusión y según el énfasis en el desarrollo de la respuesta (véase figura 3). Atendiendo a la primera dimensión, obtenemos las categorías: (a) divisor como consecuencia de haber efectuado una división y que esta resulte exacta (D-cd), (b) divisor como el rol de un número en la operación de división (D-rol) y (c) divisor como la relación ser divisor (D-R). Para estudiar los significados consideramos las dos dimensiones y definimos como categorías para el análisis de las producciones escritas de los docentes en formación, los organizadores del currículo: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología (véase figura 3).

ISBN: 978-980-7464-17-8

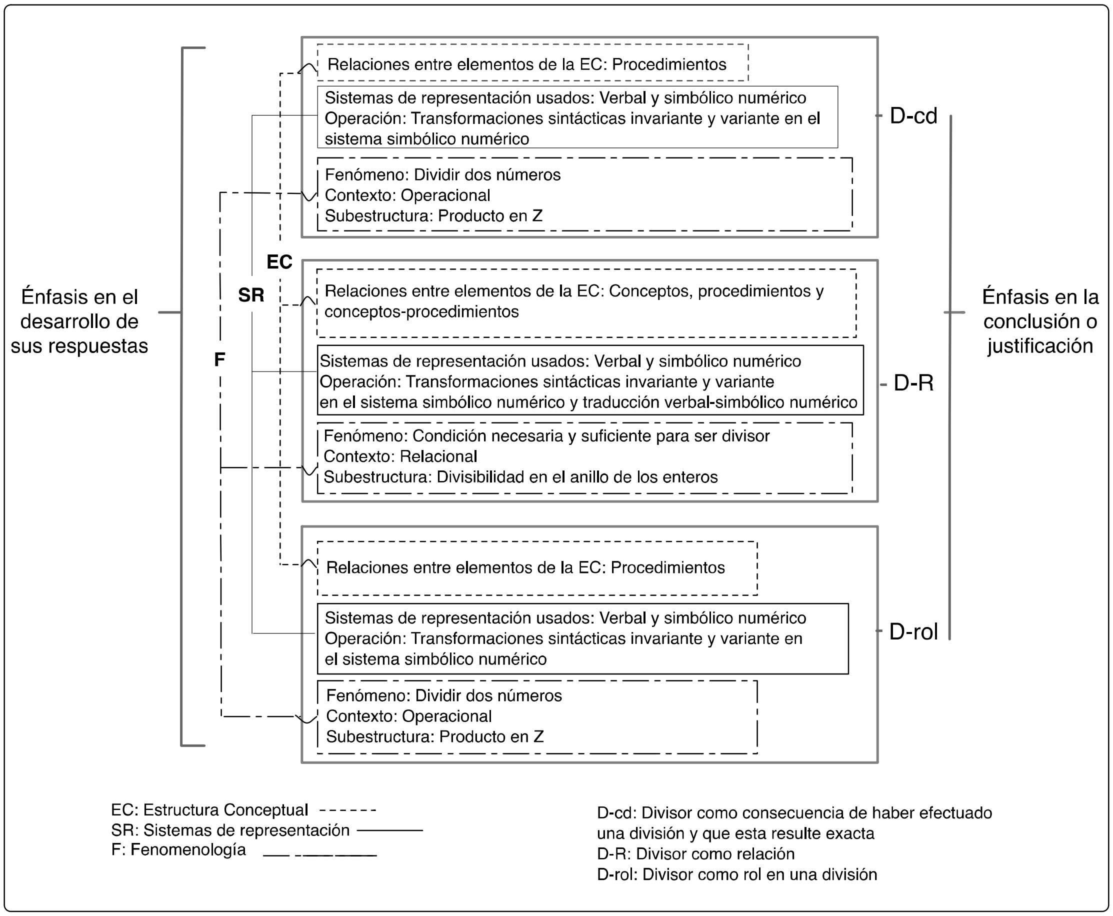


Figura 3. Codificación para la relación ser divisor

Para la organización de los datos, construimos una base de datos en el programa FileMaker. La base de datos quedó organizada por 17 campos y 555 registros para un total de 9435 observaciones y posteriormente se construyó una matriz de datos que procesamos en el software SPSS. Realizamos un análisis de frecuencia y un análisis clúster. El objetivo es agrupar a los estudiantes de manera que los conglomerados sean lo más homogéneos posible entre sí, en relación con la variable significado; y lo más heterogéneos posible entre ellos.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Identificamos la presencia de tres variables de interés para el estudio del significado de divisor en las cinco tareas: (a) divisor como consecuencia de haber realizado una división y que resulte exacta, (b) divisor como relación y (c) divisor como el rol en una división. En la tabla 2 mostramos las frecuencias, expresadas en porcentajes, de cada una de dichas variables en las cinco tareas.

Tabla 2

Presencia de las variables, en porcentajes, de las cinco tareas sobre divisor (n=37)

Variables	T1d	T2b	T3d	T5	T8
D-cd	56,75	45,94	35,14	16,22	48,65
D-R	13,51	35,14	48,65	29,73	24,32
D-rol	13,51	10,81	2,70	21,62	10,81
O	0,00	5,40	0,00	0,00	0,00
NR	8,11	0,00	13,51	32,43	24,32
NJ	8,11	2,70	0,00	0,00	0,00

Nota. D-cd = divisor como consecuencia de haber efectuado una división y que resulte exacta; D-R = divisor como relación; D-rol = divisor como el rol en una división; O = otro; NR = no responde; NJ = no justifica.

Observamos que la consideración de divisor como consecuencia de haber realizado una división y que esta resulte exacta y la consideración de divisor como una relación fueron las variables con mayor frecuencia en las producciones escritas de los maestros en formación, excepto en la tarea T5. El divisor como el rol en la operación de división alcanza una frecuencia baja en la mayoría de las tareas.

Los maestros en formación pusieron en evidencia destrezas para hacer cálculos con números, tales como multiplicación, división y potenciación. En cuanto a las estrategias seguidas, la mayoría de ellos transformaron el número dado en su representación canónica a su equivalente en la representación posicional en base diez en las tareas T1d, T2b y T3d. Mayoritariamente hicieron una transformación sintáctica invariante en el sistema de representación simbólico numérico. Una vez que transformaron el número dado, la mayoría realizó la operación de división. En la figura 4 mostramos, a manera de ejemplo, la respuesta de un estudiante (E11) a la tarea T1d.

ISBN: 978-980-7464-17-8

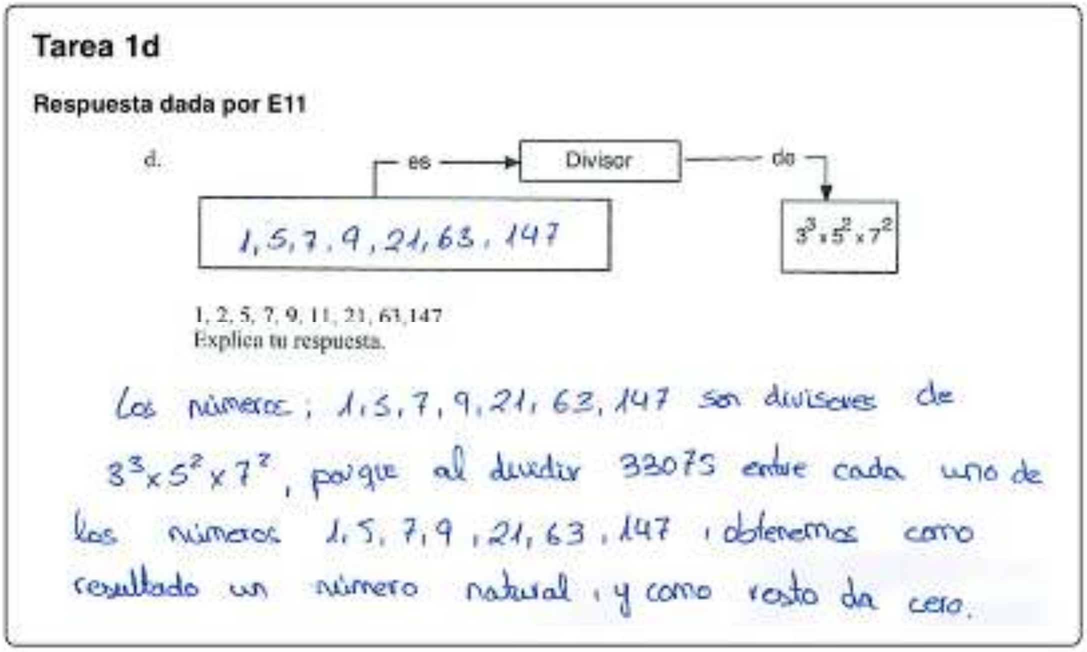


Figura 4. Respuesta dada por E11 a la tarea T1d

En la respuesta dada por E11, observamos que ha realizado la transformación sintáctica invariante del número, dado en su descomposición canónica, a su representación posicional en base diez. Posteriormente, explicó que ha realizado divisiones tomando como dividendo el número que ha transformado (33075). Cuando la división resulta exacta, decide entonces sobre el divisor. Sin embargo, no dice nada sobre los números 2 y 11. Al no colocarlos en el recuadro en blanco, suponemos que como la división no le ha dado exacta, no los considera divisores del número dado.

En la figura 5 mostramos la respuesta dada por el estudiante E36 a la tarea T2b.

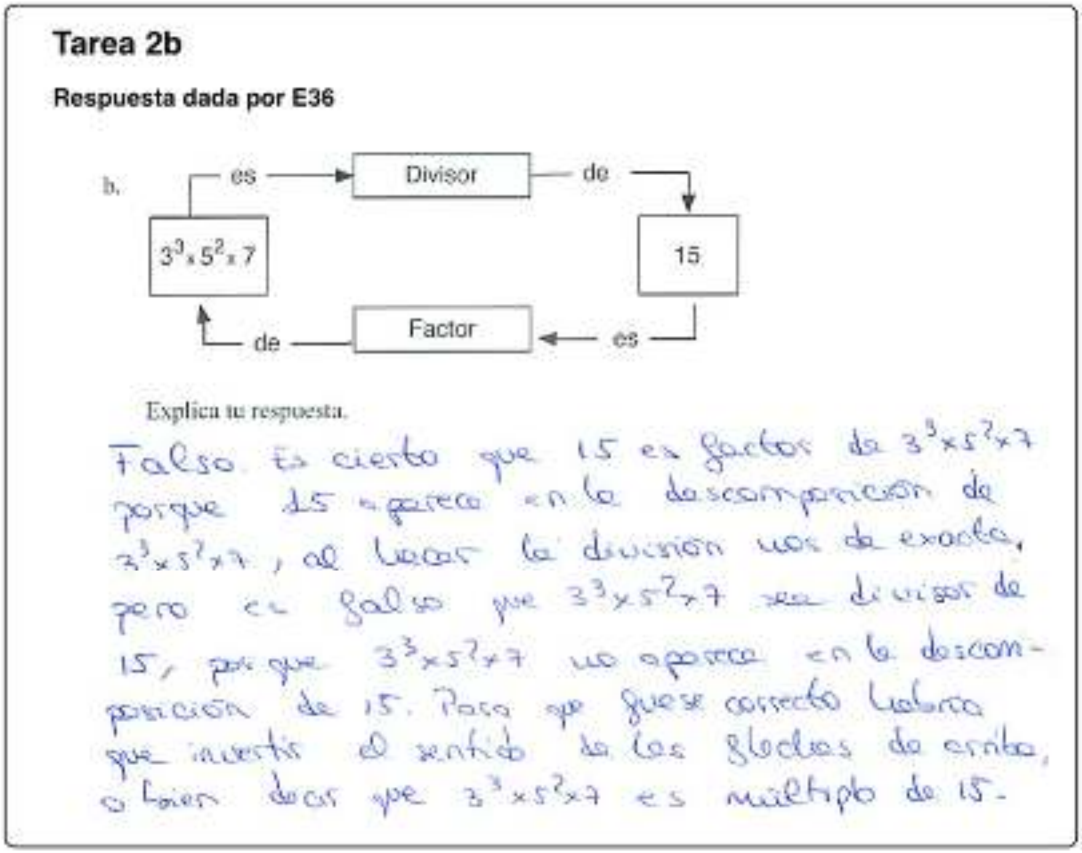
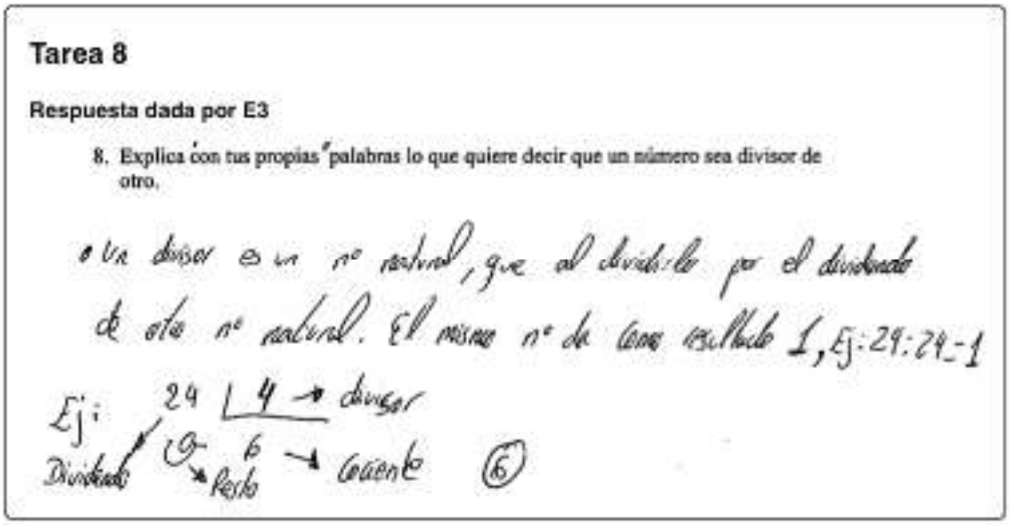


Figura 5. Respuesta dada por E36 a la tarea T2b

En la respuesta dada por E36, observamos que decide sobre divisor desde la descomposición canónica del número dado. Hace referencia a la operación de división sin realizarla. Utiliza la descomposición en factores primos del número 15 para decidir sobre divisor. Establece vínculos entre los conceptos de divisor, factor y múltiplo cuando hace la sugerencia de “invertir el sentido de las flechas de arriba” o cuando indica “decir que 33×52×7 es múltiplo de 15”. Los vínculos que E36 establece entre los conceptos lo hace desde la configuración del diagrama, es decir, trata que las relaciones asociadas a la divisibilidad puedan ser leídas desde el diagrama de tal manera que resulten todas verdaderas.

Los docentes en formación mostraron, en sus producciones escritas, la ambigüedad a la que hicimos referencia anteriormente sobre el término divisor. En la figura 6 mostramos, como ejemplo, la respuesta dada a la tarea T8 por un estudiante (E3).

ISBN: 978-980-7464-17-8


Tarea 8

Respuesta dada por E3

8. Explica con tus propias palabras lo que quiere decir que un número sea divisor de otro.

• Un divisor es un nº natural, que al dividirlo por el dividendo de otro nº natural. El mismo nº da como resultado 1, Ej: 24:24=1

Ej: 24 |4 → divisor

Dividendo 0 → Resto 6 → Cociente ⑥

Figura 6. Respuesta dada por E3 a la tarea T8

En la tarea T8 expresamos en forma explícita divisor en el contexto de una relación entre números al preguntarles sobre lo que significa que un número sea divisor de otro y no que un número sea el divisor. Sin embargo, cuando E3 comienza a resolver la tarea expresa "un divisor es un número natural" y, posteriormente relaciona en forma explícita la operación de división. En la expresión "al dividirlo por el dividendo" manifiesta no tener claro los roles en la definición que trata de construir. Sin embargo, cuando propone el ejemplo, sí puede identificar los roles de cada uno de los elementos que intervienen en la división (dividendo, divisor, cociente y resto) que ha realizado.

Con respecto al análisis clúster, hicimos la partición en cuatro conglomerados atendiendo a las dos dimensiones indicadas anteriormente. Si atendemos a la primera dimensión cada conglomerado quedó representado por un vector que recoge los valores de la variable (D-cd, D-R, D-rol, NJ, O, NR). Para el primer conglomerado, P1, formado por 7 estudiantes, el vector resultante como centro final es (1, 0, 0, 0, 0, 3). La variable que agrupa en forma mayoritaria y que distingue a este conglomerado de los demás es el hecho de no responder a la mayoría de las tareas. En ese sentido, no aporta elementos que podamos utilizar para hacer la descripción de los significados.

El conglomerado P2 quedó constituido por 8 estudiantes. El vector resultante como centro final es (1, 4, 0, 0, 0, 0). Este conjunto de 8 docentes en formación se caracterizan por mostrar mayoritariamente, en sus producciones escritas, el significado de divisor como una relación entre números.

El conglomerado P3 quedó conformado por 14 estudiantes. El vector resultante como centro final es (2, 2, 1, 0, 0, 0). Este grupo de maestros en formación se caracteriza por mostrar los tres significados sobre divisor. Muestran mayoritariamente los significados de divisor como consecuencia de haber realizado una división y que resulte exacta (D-cd), y, divisor como relación (C-R).

El conglomerado P4 conformado por 8 estudiantes, quedó representado por el vector (4, 0, 0, 0, 0, 0). Este grupo se caracteriza por mostrar el significado de divisor como consecuencia de haber realizado una división y que resulte exacta (D-cd). Mostramos en la figura 7 los centros finales de los conglomerados, así como, la presencia de las variables (atendiendo a la primera dimensión) que contribuyen en la formación de cada uno de ellos.

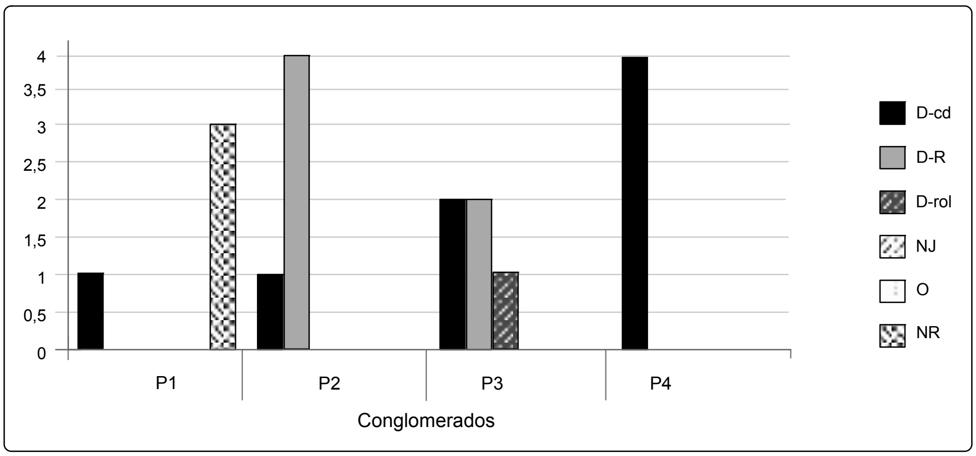


Figura 7. Centros finales de clúster y variables.

Las variables con mayores valores para la F en la ANOVA son las que aportan mayor separación entre los conglomerados, contribuyendo de manera significativa en la formación de los mismos. Las variables que más contribuyen a la determinación de los conglomerados son: de la fenomenología (que un número sea divisor de otro, el contexto operacional, el contexto relacional, la subestructura de operaciones aritméticas y la subestructura de divisibilidad), de la estructura conceptual (relación entre procedimientos). La variable divisor como relación también contribuye a la formación de los conglomerados. Las pruebas F de la ANOVA las utilizamos solo con una finalidad descriptiva.

Caracterizamos el significado de divisor observando y analizando, en cada uno de los conglomerados, los descriptores definidos en el análisis de contenido (véase figura 2) para cada organizador del currículo (EC: estructura conceptual, SR: sistema de representación y F: fenomenología) en cada una de las producciones de los maestros en formación. Cada organizador del currículo, a su vez, está conformado por variables que lo caracterizan, tal como lo hemos puesto de manifiesto.

Para hacer la descripción de los significados que muestran los maestros en formación sobre la relación de divisor consideramos las dos dimensiones definidas anteriormente (véase figura 3).

ISBN: 978-980-7464-17-8

En la tabla 3 mostramos las características distintivas de cada uno de los conglomerados con respecto al análisis de contenido del análisis didáctico. Hemos omitido la información del conglomerado P1 para la relación de divisor porque la variable que agrupa mayoritariamente a este grupo de docentes en formación es la de no responder (NR), con lo cual, no nos aporta información adicional para poder hacer la descripción de este conjunto de estudiantes más allá de esta variable.

Tabla 3

Características de los conglomerados en relación con la terna: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología

Clu.	Estructura conceptual			Sistemas de representación					Fenomenología						
									Fenómenos			Contexto		Sb.M	
	PP	CC	CP	V	T	SN	SA	G	M	D	R	Op	Re	OA	Di
P2	*	*	*	*	*	*					*		*		*
P3	*		*	*		*			*	*	*	*		*	
P4	*			*		*				*		*		*	

Nota. Clu.= clúster; PP = relación entre procedimientos; CC = relación entre conceptos; CP = relación entre conceptos y procedimientos; V = verbal; T = tabular; SN = simbólico numérico, SA = simbolismo algebraico; G = gráfico; M = multiplicar dos números; D = dividir dos números; R = que un número sea múltiplo de otro; Op = operacional; Re = relacional; Sb.M = subestructura matemática; OA = operaciones aritméticas; Div = relación de divisibilidad.

El conjunto de 8 estudiantes que conforman el conglomerado P2 y que se caracteriza por mostrar el significado de divisor como una relación entre números, por ejemplo, mostraron relaciones entre conceptos, entre procedimientos y entre conceptos-procedimientos. Mostramos en la figura 8 la respuesta dada por la estudiante E36 a la tarea T5.

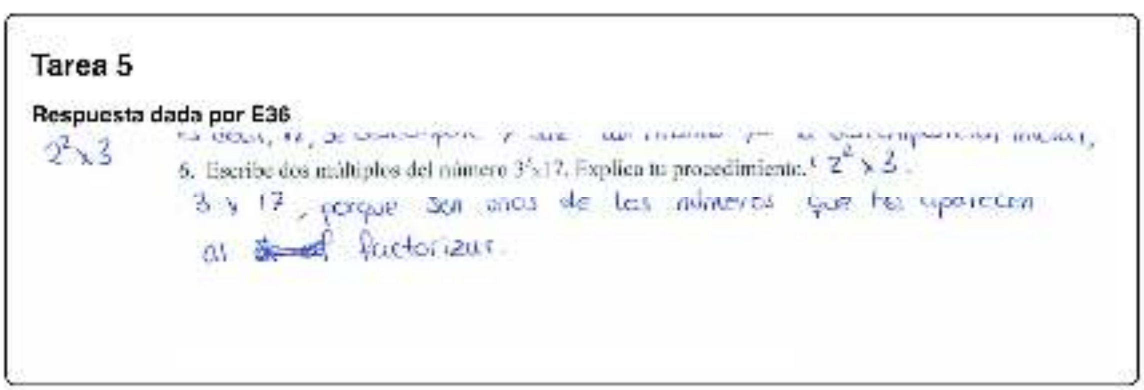


Figura 8. Respuesta dada por E36 a la tarea T5

En la justificación, E36 plantea inicialmente que ha escogido el número al azar que luego descartó porque se dio cuenta que tenía más divisores de los pedidos en la tarea. Sin embargo, la búsqueda "al azar" del número con seis divisores que plantea E36 no es realmente al azar porque utiliza la descomposición en factores primos (los más pequeños) para hacer la prueba. El procedimiento que sigue para probar y decidir si el número cumple con los requerimientos de la tarea no está condicionado a la realización de la operación aritmética de división. Lo hace estableciendo relaciones y vínculos entre conceptos (números primos, números compuestos, teorema fundamental de la aritmética, divisores, factores), entre procedimientos (aplicar divisiones sucesivas para descomponer un número, factorizar un número, calcular la potencia de un número, determinar el producto de números, calcular los divisores de un número) y entre conceptos-procedimientos (utilizar la descomposición única dada por el teorema fundamental de la aritmética para determinar todos los factores-divisores de un número compuesto, realizar todas las combinaciones posibles entre los factores primos para determinar todos los divisores de un número).

Con respecto a los sistemas de representación, el conjunto de estudiantes que conforman el conglomerado (P2), utilizó tres sistemas de representación: verbal, tabular y simbólico numérico. Establecieron combinaciones entre los sistemas de representación utilizados. Realizaron operaciones de transformación sintáctica (invariante y variante) en el sistema de representación simbólico numérico y traducciones entre el sistema de representación simbólico numérico y el sistema de representación tabular.

Con respecto a la fenomenología, identificamos en sus respuestas sobre divisor la condición necesaria y suficiente para que un número sea divisor de otro. El contexto utilizado para la condición de ser divisor es relacional y está asociado estrictamente con la subestructura matemática de divisibilidad en el anillo de los números enteros.

Las características distintivas de los significados sobre divisor vienen dadas por el modo de uso del concepto, las relaciones que se establecen entre conceptos y procedimientos asociados a la divisibilidad y sobre las operaciones con los sistemas de representación. En ese sentido, fue concluyente para la organización y clasificación de los clúster el contexto en el cual los maestros en formación discutieron sobre divisor.

Discutir sobre divisor en un contexto operacional implicó tomar decisiones en función de una operación aritmética "realizada" en el sistema de representación posicional de base diez. Mientras que discutir divisor en un contexto relacional implicó tomar decisiones en función de la condición necesaria y suficiente para que un número sea divisor o factor de otro, desde cualquier sistema de representación sin necesidad de realizar alguna operación aritmética para decidir.

ISBN: 978-980-7464-17-8

REFERENCIAS

Anderson, T. y Shattuck, J. (2012). Desing-based research: A decade of progress in education research? *Educational Research*, *41*(1), 16-25.

Bodí, S., Valls, J. y Llinares, S. (2007). La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo. En R. Gras, B. Orús y B. Pinaud (Eds.), *Nouveaux apports théoriques à l'analyse statistique implicative et applications: 4èmes rencontres internationales d'analyse statistique implicative,* (pp. 99-110). Castellón, España: Universitat Jaume I.

Brown, A. (1992). Desing experiments: Theorical and methodological challenges in creating complex interventions in clasroom settings. *The Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 141-178.

Brown, A., Thomas, K. y Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. En S. R. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 41-82). Westport, CT: Ablex Publishing.

Campbell, S. R. (2006). Understanding elementary number theory in relation to arithmetic and algebra. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 19-40). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cañadas, M.C. y Castro, E. 2013. Análisis didáctico en una investigación sobre razonamiento inductivo. En L. Rico, J. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 333-348). Granada, España: Comares.

Collins, A. (1992). Toward a desingn science of education. En E. Lagemann y L. Shulman (Eds.), *Issues in education research: Problems and possibilities* (pp. 15–22). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Feldman, Z. (2012). Describing pre-service teachers' developing understanding of elementary number theory topics (Tesis doctoral). Recuperado de ProQuest. (Orden No. 3529017).

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Granada, España: Universidad de Granada.

Gómez, P. y Cañadas, M.C. (2012). Dificultades manifestadas por profesores en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 303-312). Jaén, España: SEIEM.

Lavy, I. (2006). Learning number theory concepts via geometrical interactive computerized setting. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 201-221). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Liljedahl, P. (2006). Learning elementary number theory trough a chain of discovery: Preservice teachers' encounter with pentominoes. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 141-172). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

López, A. y Cañadas M. C. (2013). Utilización del teorema fundamental de la aritmética por maestros en formación en tareas de divisibilidad. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 59-66). Granada, España: Comares.

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2013a). Utilización de la noción "ser múltiplo" por maestros de educación primaria en formación. *Épsilon. Revista de educación matemática*, *30*(85), 9-20.

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2013b). Significados de las relaciones "ser múltiplo" y "ser divisor" mostradas por maestros de educación primaria en formación. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 355-365). Bilbao, España: SEIEM.

López, A., Castro, E. y Cañadas M. C. (2015). La divisibilidad como conocimiento matemático-didáctico de los maestros en formación. En J. Segovia, E. Olmedo y D. Amber (Coords.), *Investigación en Ciencias de la Educación* (pp. 289-295). Granada, España: EIP.

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2016). Caracterización del significado de múltiplo por maestros en formación. *PNA*, *10*(2), 111-134.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Martin, W. G. y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41-51.

National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* Reston, VA: Autor.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza de secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: Horsori.

Rico, L. (2013a). El método del análisis didáctico. *Unión. Revista Iberoámerica de Educación Matemática*, *33*, 11-27.

Rico, L. (2013b). Antecedentes del análisis didácico en educación matemática. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 23-58). Granada, España: Comares.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico. (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educa- ción Primaria* (pp. 21-40). Madrid, España: Pirámide.

ISBN: 978-980-7464-17-8

Rico, L. y Fernández-Cano (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Comares.

Rico, L., Lupiañez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática.* Granada, España: Comares.

Zazkis, R. y Campbell, S. (1996a). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5)*,* 540-563.

Zazkis, R. y Campbell, S. (1996b). Prime decomposition: Understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2)*,* 207-218.

Zazkis, R., y Campbell, S. (2006). Number theory in mathematics education research: perspectives and prospects. En R. Zazkis y S.R. Campbell (Eds), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 1- 17). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Zazkis, R., Sinclair, N. y Liljedahl, P. (2013). Lesson play in mathematics education: A tool for research and professional development. Springer: New York.