Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática
ISBN: 978-980-7464-17-8

ESTUDIO DE LOS ESQUEMAS CONCEPTUALES ASOCIADOS A LA DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

José Marcano y **Carmen Valdivé**
Unidad Educativa El Copey, UCLA
marcanojosev@gmail.com
Pensamiento Matemático Avanzado. Educación Universitaria

RESUMEN

El trabajo que aquí se presenta es un avance de una investigación titulada "estudio de los esquemas conceptuales asociados a la definición de límite de una función en un punto". Dicho avance corresponde a su primer propósito: estudiar la evolución de la conceptualización de la definición de límite de una función en un punto en la historia. El estudio se enmarcó en la Teoría Cognitiva Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y se apoyó de unos constructos llamados Esquemas Conceptuales Epistemológicos (ECE). Metodológicamente, la investigación es de tipo cualitativo y de carácter documental, descriptivo e interpretativo. Su método es el inductivo, porque se analizó caso por caso, situaciones, cualidades y circunstancias que originaron e hicieron evolucionar el concepto de límite de una función en un punto hasta su definición formal en la historia. La recolección de información se realizó desde fuentes secundarias, los libros de historia de la matemática y el cálculo de Boyer (2003), Cantoral & Farfán (2004) y Edwards (1979). Se comenzó con una reconstrucción histórica de la conceptualización de la definición formal del límite de una función en un punto. Se continuó con su fragmentación y luego se crearon unidades de análisis, siguiendo criterios temporales, sociales y temáticos. Se extrajeron los conceptos, contextos, ideas, procedimientos, métodos y las representaciones usadas por los matemáticos destacados sobre el tema en los distintos periodos históricos considerados. Como hallazgos, encontramos nueve esquemas conceptuales epistemológicos, seis asociados a ideas nacientes del límite, llamados "Met-before (ECEM)" y tres "propios (ECE)" del límite de una función en un punto. Cada uno de estos nueve esquemas está constituido de una representación en red sistémica, su descripción y una categorización de las ideas epistemológicas.

Palabras clave: Definición Formal del Límite de una Función en un Punto, Pensamiento Matemático Avanzado, Esquemas Conceptuales Epistemológicos.

INTRODUCCIÓN

La definición de límite ocupa una posición central e impregna todo el Análisis Matemático, es el fundamento de teorías como la aproximación, continuidad, Cálculo Diferencial e Integral (Cornu, Ob. Cit.). Su aplicación se ha extendido a diversas áreas del conocimiento que se ha convertido en un objeto de estudio necesario e imprescindible. Sin embargo, lejos de favorecer a los estudiantes en su desempeño por su paso por las universidades, ha sido un verdadero obstáculo.

Muchos aspectos didácticos se han puesto a prueba y aún muchos quedan propuestos para permitir en los estudiantes una comprensión integral del límite. Al respecto, sugieren hacer estudios históricos-epistemológicos del objeto matemático en cuestión, mostrarlo desde diferentes sistemas de representación, considerar los obstáculos didácticos, epistemológicos y cognitivos, tomar en cuenta su riqueza ontológica y semiótica, e involucrarlo en diversos contextos problemáticos (Blázquez y Ortega, 2001; Contreras y García, 2011; Cornu, 2002; Valdivé, 2008).

Valdivé y Garbín (2008) demostraron que el estudio epistemológico resulta útil por la diversidad de elementos didácticos que arroja para la enseñanza del Cálculo y en consecuencia invita a seguir haciendo más estudios semejantes, hacia el uso de las definiciones formales, como la definición de límite.

La necesidad de tener un marco de referencia para la enseñanza, aprendizaje, evaluación y creación de situaciones adaptables al aula sobre la definición formal del límite de una función en un punto, nos induce a una importante cuestión, ¿Cuáles son los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la definición formal del límite de una función en un punto? El propósito de la investigación es estudiar la evolución de la conceptualización de la definición formal del límite de una función en un punto, indicando los aportes de matemáticos según sus ideas representativas.

El estudio se enmarca en la Teoría Cognitiva Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), que ha sido desarrollada por Tall (2002). Esta teoría se enfoca en lo siguiente:

> hacia la descripción de la naturaleza del conocimiento matemático de los estudiantes a la hora de estudiar un concepto matemático y de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de estos conceptos, intentando aclarar lo que ocurre en la mente de un individuo (Valdivé y Garbin, 2008, p. 5).

El PMA se apoya de los esquemas conceptuales y esquemas conceptuales previos como herramientas de investigación. El trabajo que se presenta en este manuscrito, hace uso del esquema conceptual epistemológico incorporado por Valdivé y Garbin (Ob. Cit, p. 429), quienes exponen que este tipo de esquema *puede referirse a la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática*, así como también a las representaciones, los procedimientos y métodos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un contexto específico. De esta clase de esquemas se distinguen dos tipos. Los *esquemas conceptuales epistemológicos Met-before (ECME)*, que se presentan cuando los conceptos, representaciones, procedimientos, métodos se aproximan al objeto matemático de estudio sin considerarlo propiamente pero que lo hacen emerger; y los *esquemas conceptuales epistemológicos (ECE)*, cuando los matemáticos usan el objeto matemático y tienen aceptación y dominio de su naturaleza y definición.

De las implicaciones prácticas, didácticas y científicas, este estudio está adscrito a la línea de investigación “Enseñanza de la Matemática” del Departamento de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Barquisimeto (UPEL-IPB). Se apoyó en métodos de investigación cualitativa y en la Teoría Pensamiento

ISBN: 978-980-7464-17-8

Matemático Avanzado de reconocida trayectoria y pretende fortalecer y dar carácter científico a esta línea de investigación, con el desarrollo de metodologías específicas para el estudio y análisis histórico-epistemológico de la definición formal del límite de una función en un punto, junto con el aporte de esquemas conceptuales epistemológicos, cada uno presentado en una red sistémica, su descripción y caracterización, que son recursos y aspectos didácticos que pretenden brindar escenarios y retomar en clases la definición formal del límite de una función de forma dinámica, creativa y formativa, y así, los estudiantes puedan aprovechar los inagotables beneficios de aprender matemáticas.

METODOLOGÍA

El estudio sobre la evolución epistemológica de la definición formal del límite de una función en un punto con la línea de investigación Pensamiento Matemático Avanzado, entra dentro de las investigaciones de tipo cualitativo, de carácter documental, descriptivo e interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), ya que se inicia con una recolección, lectura y análisis de información desde diferentes fuentes bibliográficas para generar una teoría que describe cómo evoluciona a lo largo de la historia el concepto de estudio. Los actores son los libros de texto que reúnen los hechos históricos de la definición formal del límite de una función. El método acorde es el inductivo, porque se elaboran interpretaciones partiendo de información recolectada.

El análisis epistemológico del objeto de estudio en cuestión fue desarrollado desde una perspectiva histórica. Comenzó con la extracción de fragmentos relativos a la histórica del límite de una función en un punto, utilizando como fuentes secundarias la historia de la matemática de Boyer (2003) y los libros de historia del cálculo de Cantoral & Farfán (2004) y Edwards (1979). Ese cúmulo de información se resumió e interpretó, y se utilizó para redactar una descripción que explica la evolución histórica de la definición de límite de una función en un punto, desde las ideas nacientes en el siglo V antes de Cristo hasta su definición formal en siglo XIX después de Cristo. Esta reconstrucción histórica se convirtió en la fuente de información para continuar el estudio epistemológico perseguido con este trabajo y que siguió con la aplicación de un método propuesto por Rodríguez, Gil y García (1996), que divide el proceso investigativo en cuatro actividades que se detallan a continuación:

1. **La fragmentación de la información.** Consiste en dividir la reconstrucción histórica tomando en cuenta criterios bien definidos como temporales, temáticos y sociales, considerando los requisitos de exhaustividad, exclusión mutua, único principio clasificatorio, objetividad y pertinencia. La reconstrucción histórica de la definición formal del límite de una función en un punto, fue fragmentada en nueve partes, siguiendo por conveniencia criterios temáticos: saltos epistemológicos, que se presentan cuando los matemáticos cambiaban la concepción del objeto matemático porque surgen nuevos métodos, ideas, representaciones, procedimientos, contextos, aplicaciones.

2. Cada parte o fragmento en la que quedó dividida la historia se convirtió en una unidad de análisis y fue estudiada por separado. Este proceso corresponde a la segunda actividad de análisis, llamada **identificación y clasificación de las unidades de análisis**, donde se usó la categorización con el objetivo de identificar clases (elementos, condiciones, nociones) bajo un mismo tópico o concepto teórico (identificación), para luego ubicar y distribuir toda la información en dichas clases (clasificación). Aquí cobraron mayor importancia los criterios temáticos y sociales, al categorizar la información (de cada unidad) de la manera siguiente: ideas, representaciones (asociadas a la noción o propias de la noción), representaciones (que hacen emerger la noción), procedimientos, contextos y métodos.

3. Para la tercera actividad, **disposición y organización** de la información, se tomó el sistema de redes propuesto por Bliss, Monk y Ogborn (citados por Valdivé y Garbin, 2008), que utiliza una precisa notación para distinguir y presentar diferentes categorías y sus subdivisiones, diferencias, circunstancias y restricciones, y que se ajusta adecuadamente al estudio. Estas redes se construyen en forma de árbol con ramas que se subdividen en “clases” (cuando son categorías mutuamente excluyentes y como formalismo se usa la barra (I) para presentarlas) y “aspectos” (cuando las categorías no son excluyentes y se usan llaves ({) para representarlas). Con la llave (}) se indica que la nueva categoría incluye a las anteriores. Al final de cada rama se menciona el nombre del matemático o la civilización representativa de cada categoría y/o subcategoría.

De acuerdo con Valdivé (2008), esta actividad consiste en ensamblar los elementos diferenciados en el proceso analítico para reconstruir un todo estructurado y significativo. La información analizada sobre las situaciones problemáticas, los contextos, etc que los matemáticos otorgaron al objeto matemático en un período histórico, es reunida o condensada en una red sistémica. A partir del análisis, encontramos seis esquemas conceptuales epistemológicos Met-before (ECMEn) y tres propios (ECEn). La “n” indica el número del esquema conceptual epistemológico (ver Tabla 1).

ISBN: 978-980-7464-17-8

Tabla 1. Esquemas Conceptuales Epistemológicos

Matemáticos representativos	**Esquemas Conceptuales Epistemológicos**
Hipócrates, Eudoxo, Euclides, Arquímedes, Ptolomeo, Eratóstenes	($ECEM_1$): El límite asociado a la relación entre magnitudes geométricas por aproximación de figuras rectilíneas.
Bradwardine, Oresme	($ECEM_2$): El límite asociado a la cuantificación de las formas variables.
Cavalieri, Kepler, stevin, Galileo	($ECEM_3$): Límite asociado a una aproximación finita de magnitudes geométricas como suma infinita de indivisibles.
Fermat, Descartes, Barrow	($ECEM_4$): El límite asociado al cálculo de tangentes
Newton, Leibniz, Bernoulli	($ECEM_5$): El límite asociado a una razón incremental
Euler, D'Alambert, Legendre, Lagrange	($ECEM_6$): El límite como una cantidad fija a la que se acerca una cantidad variable
Gauss, Cauchy	(ECE_1): El límite como aproximación tan precisa como se desee entre valores numéricos
Fourier, Dirichlet, Hermite	(ECE_2): El límite asociado a un número racional y a un número no algebraico.
Weierstrass, Cantor, Dedekind, Russell, Heine.	(ECE_3): El límite como un número real

4. La última actividad denominada **descripción estructurada (hallazgos**), consiste en describir los esquemas epistemológicos. Cada esquema está compuesto de una red sistémica, su descripción y una categorización. Después de la red sistémica se elabora una descripción holística de ella, tratando de mostrar la concepción que prevalece sobre el objeto matemático en ese período histórico o fragmento de la reconstrucción histórica. Se explica cada categoría de la red de derecha a izquierda exponiendo cómo, cada matemático, percibe el objeto (en este caso el límite de una función). Posteriormente, se interpreta cómo se percibe el objeto de manera general según las ideas mostradas y que constituyen la razón del nombre del esquema conceptual epistemológico en ese fragmento. Lo importante en este proceso es mantener el significado que los matemáticos otorgaron al objeto en el periodo histórico de estudio. Por último, se presentan las ideas epistemológicas y su caracterización de forma sintética, indicando las ideas que hicieron emerger al objeto en ese periodo histórico, las imágenes propias del objeto (en el caso de los ECE propios) o las imágenes que lo hicieron emerger (en el caso de los ECEM), el contexto, los métodos, los conceptos asociados con el objeto e indicar los matemáticos que aportaron estas ideas.

RESULTADOS

A continuación, se presentan dos esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la definición formal del límite de una función en un punto, uno previo (con ideas emergentes sobre el objeto) y otro propio (con ideas consolidadas del objeto) como muestra de los hallazgos del estudio histórico epistemológico con relación a nuestro propósito de estudiar la evolución de la conceptualización de la definición de límite de una función en un punto en la historia.

ECEM$_4$: El límite asociado al cálculo de tangentes

El límite asociado al cálculo de tangentes

Cálculo de tangentes: Son en esencia equivalentes al proceso formal de derivación

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(a+E)-f(a)}{E}$$

Salvo que no disponen del concepto formal del límite

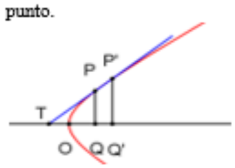
Considera un punto Q variable sobre la curva distinto de P. Halla la ecuación de la circunferencia con centro en el eje de coordenadas y que pase por los puntos P y Q. Intersecta la circunferencia con la curva, halla su centro, iguala los puntos Q y P, halla la normal en el punto P y por consiguiente la tangente.

Método del punto variale para hallar tangentes a la curva en un punto P.
Rene Descartes
1596-1650

Plantea un intervalo pequeño E. Se iguala $f(x)$ a $f(x+E)$ asumiendo que son casi iguales. Se halla la proporción:

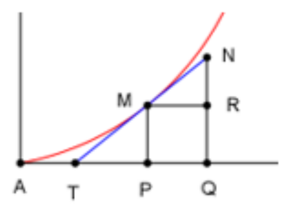
$$\frac{b}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E}$$

Que con arreglos y haciendo $E = 0$ conduce a la tangente buscada en el punto.



Estudio analitico de curvas de orden superior como parábolas e hipérbolas.
Usa el método de "seudo-igualdad" para hallar máximos y mínimos, que posteriormente usó para hallar tangentes a curvas en un punto.
Pierre de Fermat
1601-1665

Considera un arco infinitamente pequeño de la curva y un triángulo para hallar la tangente de la curva en un punto.



Método para hallar tangentes suponiendo un arco infinitamente pequeño.
Isaac Barrow
1630-1677

Desarrollo de la Geometría Analítica
Rene Descartes
1596-1650
Pierre de Fermat
1601-1665

Descripción

La invención de la geometría analítica causa un cambio en la percepción de los problemas que se venían realizando desde la antigüedad. Entre los responsables están los matemáticos franceses contemporáneos René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665). Es la época en la que muchos matemáticos, entre ellos Descartes y Fermat, desarrollaron diferentes métodos para resolver problemas de cuadraturas y tangentes, destacando principalmente Isaac Barrow (1630-1677).

Descartes sugirió que para hallar la normal a una curva algebraica en un punto fijo P de dicha curva, se debía tomar un segundo punto variable Q sobre la curva, y hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el eje de coordenadas (puesto que utilizaba un único eje de abscisas) y que pase por los puntos P y Q. Igualando entonces a cero el discriminante de la ecuación que determina las intersecciones de la circunferencia con la

ISBN: 978-980-7464-17-8

curva, puede hallarse el centro de la circunferencia tal que Q coincide con P y, conocido el centro, puede determinarse fácilmente tanto la normal como la tangente a la curva en el punto P (Boyer, 2003).

Por otro lado, Fermat estudiando curvas de orden superior (curvas polinómicas de la forma $y = f(x)$) descubrió un método muy ingenioso para hallar los puntos en los que la función toma un valor máximo y mínimo. Tiene la idea de plantear un intervalo pequeño que simboliza con la letra E. Su objetivo es comparar el valor $f(x)$ en un cierto punto de la curva con el valor $f(x + E)$ en un punto próximo; en general, estos dos valores serán claramente distintos, pero en una "cumbre" o en el fondo de un "valle" de una curva "lisa", la diferencia será casi imperceptible. Fermat iguala $f(x)$ a $f(x + E)$. Cuanto más pequeño sea el intervalo E entre los dos puntos, la deferencia se hace imperceptible, más cerca estará dicha seudo-igualdad de ser una verdadera ecuación. Así, pues Fermat, después de dividir todo por E, hace $E = 0$. El resultado le permite calcular las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función polinómica (Boyer, 2003; Edwards, 1979).

Posteriormente, Fermat descubre cómo aplicar su procedimiento de los valores próximos de la variable, para hallar la tangente a una curva algebraica de la forma $y = f(x)$. El procedimiento es el siguiente: si P es un punto de la curva $y = f(x)$ en el que se desea hallar la tangente, y si las coordenadas de P son (a, b), entonces un punto próximo P' sobre la curva, de coordenadas $x = a + E$, $y = f(a + E)$, estará tan próximo a la tangente que puede considerarse situado sobre la tangente a la vez que sobre la curva, aproximadamente. Por lo tanto, si la subtangente en el punto P es $TQ = c$, entonces los triángulos TPQ y $TP'Q'$ se pueden considerar como semejantes aproximadamente, y de esta semejanza se obtiene la proporción $\frac{b}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E}$ a partir de la cual, multiplicando en cruz, simplificando términos iguales por ser $b = f(a)$, dividiendo todo por E y haciendo, por último, $E = 0$, se puede calcular fácilmente la subtangente c que determina unívocamente, con el punto P, la tangente buscada (Boyer, 2003).

En 1670 el matemático inglés Isaac Barrow (1630-1677) publica otro método para la determinación de tangentes, al parecer más útil y general que los demás, en el que aparecen dos cantidades que equivalen, en términos modernos, a Δx y Δy, que lo diferencia del método de Fermat que sólo emplea una cantidad representada por la letra E y lo coloca más próximo al método que se usa actualmente en cálculo diferencial. En esencia, la regla de Barrow plantea: sea M un punto de una curva dada (en notación moderna) por una ecuación polinómica $f(x, y) = 0$, y si T es el punto de intersección de la tangente buscada MT con el eje x, entonces Barrow considera "un arco infinitamente pequeño MN de la curva", las ordenadas correspondientes a los puntos M y N, y el segmento MR paralelo al eje x. Llamando m a la ordenada conocida de M, t a la subtangente buscada PT y a, e, a los catetos vertical y horizontal respectivamente del triángulo rectángulo MRN, hace notar Barrow que la razón de a a e es igual a la razón de m a t. Tal como se expresaría actualmente, la razón de a a e para dos puntos infinitamente próximos es la tangente de la curva. Para hallar esta razón Barrow procede de una manera muy parecida a como había hecho Fermat. Sustituye x e y en la ecuación $f(x,y)=0$ por $x+e$ e $y+a$ respectivamente, y en la ecuación resultante suprime todos los términos que no contengan a a e (ya que la suma de todos ellos es cero, por la ecuación de la curva), así como todos los términos de grado mayor que uno en a o en e, y por último reemplaza a por m y e por t. A partir de este resultado puede calcularse la subtangente t en términos de x y de m, y si x y m son conocidos, la subtangente t queda determinada, y con ella la tangente MT (Boyer, 2003).

En resumen, los métodos de Descartes, Fermat y Barrow resultan equivalente a decir que el $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ es la pendiente de la curva en el punto $x=a$. Estos matemáticos no disponían del concepto formal del límite, pero salvo esto, su método sigue un camino completamente paralelo al que puede verse hoy en los libros de cálculo, excepto en la mínima diferencia de que hoy se suele usar el símbolo h o Δx en vez de la E de Fermat o las dos cantidades de Barrow para los incrementos de las variables. Encontramos que la noción de límite transita implícitamente en los algoritmos y las fórmulas algebraicas para la determinación de la normal y la tangente de una curva en un punto. Sus contribuciones anticipan fragmentos del cálculo diferencial e integral que desarrollan otros matemáticos posteriormente. Por tal motivo, este esquema conceptual epistemológico del límite de una función en un punto es previo, no se ha consolidado el concepto de una manera formal, sin embargo, lo hace emerger, por lo cual, el límite de una función en un punto se percibe asociado al cálculo de tangentes.

Categorización

Ideas: Punto variable sobre la curva, intervalos pequeños para estudio de valores próximos, seudo-igualdad entre valores próximos o diferencia imperceptible, incrementos de las variables dependiente e independiente.

Representaciones asociadas al concepto que lo hacen emerger: Intervalo pequeño E. Seudo-igualdad que en notación moderna equivale a $f(x)=f(x+E)$. Proporción $\frac{b}{c}=\frac{f(a+E)}{c+E}$, arco infinitamente pequeño, incrementos e y a muy pequeños de las variables x y y respectivamente, razón entre cantidades $\frac{a}{e}$.

Contexto: a) Analítico: se aplican cantidades pequeñas despreciables a problemas algebraicos, geométricos y cinemáticos. b) Algebraico: se estudian curvas polinómicas de la forma $y=f(x)$. Se intersectan ecuaciones, se añade un incremento muy pequeño a una

ISBN: 978-980-7464-17-8

variable: cantidades despreciables. c) Geométrico: las gráficas de rectas normales y tangentes a una curva en un punto.

Métodos: Método de Descartes para hallar la normal y la tangente a una curva mediante un punto variable. Método de seudo-igualdad de Fermat para determinar máximos y mínimos de una curva. Método de Barrow del arco infinitamente pequeño para hallar la normal y la tangente de una curva en un punto.

Conceptos asociados: Recta normal, recta subtangente, recta tangente de una curva en un punto, valores máximos y mínimos, razón y proporción, movimiento de un punto sobre la recta, semejanza de triángulos, variable, cantidades para los incrementos de las variables que luego se desprecian. **Matemáticos representativos:** Descartes, Fermat y Barrow.

ECE$_3$: El límite como un número real.

- El límite como un número real
  - Definición formal del límite de una función f(x) en x_o: Si dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$
    H. Eduard Heine (1821-1881)
  - El límite de sucesiones convergentes determina un número real (racional o
    - Construcción de los números reales
      - Conjunto de números racionales
        - Sucesiones de Cauchy de números racionales. Teoría de . — **Karl Weierstrass** (1815-1897)
        - Sucesiones fundamentales. Relaciones de equivalencia — **Georg Cantor** (1845-1918)
      - Cortaduras
        - Para cualquier partición de números racionales en dos clases disjuntas A y B tales que todo número de la primera clase A sea menor que todo número de la clase B, existe uno y solo un número real, que produce esta cortadura. — **J. W. R. Dedekind** (1831-1916)
        - Dado que cualquiera de las dos clases A y B en una cortadura de Dedekind quedaba únicamente determinada por la otra, una sola bastaba para determinar el número real — **Bertrand Russell** (1872-1970)

Descripción

La invención de las geometrías no euclidianas, la poca confianza en las operaciones efectuadas con series infinitas, su convergencia, la falta de una definición precisa de función y de número real condujo en el siglo XIX a un proceso llamado aritmetización del análisis que se desarrolló entre 1822 y 1872, y que arrastró consigo la construcción de la definición formal del límite.

Karl Weierstrass (1815-1897) separó el análisis de la geometría y lo basó únicamente en el concepto de número. Observó que era necesario dar una definición de número irracional independiente del concepto de límite. Los define, de una manera general, como conjuntos de racionales más que como meras sucesiones ordenadas. Se decidió en resolver el problema identificando la sucesión convergente con el número límite. De igual forma, el matemático Georg Cantor (1845-1918) realiza un trabajo de construcción de los números reales. Se apoyó de las sucesiones de Cauchy de números racionales y la teoría de convergencia de sucesiones de números y formó sucesiones fundamentales y una relación de equivalencia entre ellas para construir y definir los números irracionales y en términos generales, los números reales (Boyer, 2003).

Independientemente, J. W. R. Dedekind (1831-1916) estudió el problema de los números irracionales y también llegó a la conclusión que el concepto de límite debía ser desarrollado de una manera puramente aritmética, sin depender de la geometría como era lo usual para que fuera un concepto riguroso. Define la construcción de los números reales a través de cortaduras, mediante la siguiente consideración: para cualquier partición de números racionales en dos clases disjuntas A y B tales que todo número de la primera clase A sea menor que todo número de la clase B, existe uno y solo un número real, que produce esta cortadura. Posteriormente, Bertrand Russell (1872-1970) propuso una ligera modificación en el concepto planteado por Dedekind expresando que, dado que cualquiera de las dos clases A y B en una cortadura de Dedekind quedaba únicamente determinada por la otra, una sola bastaba para determinar el número real (Boyer, 2003).

Por consiguiente, la definición formal de los números reales, por los métodos de cortaduras y de las sucesiones fundamentales, permitió llegar al concepto formal de límite de una función en un punto. En este sentido, H. Eduard Heine (1821-1881) discípulo de Weierstrass, bajo la influencia directa de sus lecciones, publicó la definición formal del límite de una función f(x) en x_o de la siguiente manera: Si dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$.

En la actualidad, la definición de límite de una función que aparece en los textos usuales es esencialmente la misma dada por Weierstrasse y Heine, únicamente ha sido reemplazada la η por la letra griega δ (Boyer, 2003) La definición de límite en notación moderna, $\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0/\ si\ \ |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| <\ \varepsilon$ (Edwards, 1979, p. 109).

Esta definición depurada del concepto de límite no hace mención a cantidades que fluyen, ni puntos moviéndose sobre curvas, ni hace falta despreciar cantidades infinitamente pequeñas (los infinitesimales). Son desterrados los viejos recursos heurísticos y las ideas intuitivas. Se ha construido una definición rigurosa, precisa y estática que está dada en términos de números reales bajo las operaciones de suma, resta y la relación "menor que". Esta definición presenta la precisión que se espera de los matemáticos y las demostraciones que usan esta definición son llamadas demostraciones del tipo "$\varepsilon - \delta$" o "epsilónicas" (Boyer, 2003). Como consecuencia de la definición formal de los números reales e identificar la sucesión convergente con el número límite, este esquema conceptual epistemológico es propio y se percibe el límite de una función en un punto como un número real.

Caracterización:

Ideas: Estudio de los procesos infinitos, convergencia de sucesiones. Precisar el concepto de número irracional y real independiente del concepto de límite. Dar una definición de límite puramente aritmética.

Representaciones asociadas al concepto que lo hacen emerger: Sucesiones de Cauchy. Conjuntos de números racionales, sucesiones fundamentales, relaciones de equivalencia entre sucesiones, cortaduras de Dedekind.

Representaciones propias del concepto: Números reales de funciones reales, definición simbólica $\varepsilon - \delta$.

a) Si dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$.

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$; si y solo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Contexto: Analítico: operación con funciones representadas analíticamente, números reales, series y sucesiones.

Procedimientos: Construcción de los números reales por cortaduras de Dedekind y sucesiones de números racionales.

Conceptos asociados: Sucesiones, series, conjuntos infinitos, número real.

Matemáticos representativos: Weierstrass, Cantor, Dedekind, Russell, Heine.

CONCLUSIONES

Después de todo lo que se ha presentado, quedan algunas reflexiones finales.

- Resulta interesante cómo la metodología descrita, rescata el significado que los objetos matemáticos han tenido por períodos históricos, y al mismo tiempo, conserva sus concepciones originales.
- Desde un punto de vista didáctico, los esquemas conceptuales epistemológicos brindan un marco de referencia para la enseñanza, aprendizaje, evaluación y creación de situaciones adaptables al aula sobre la definición formal del límite de una función en un punto. Además, estos esquemas proveen de insumos para el diseño, interpretación y análisis de cuestionarios, entrevistas que pongan de manifiesto la comprensión y aplicación del límite en diversas situaciones.
- En un sentido metodológico, se deja explicito un procedimiento que puede ser desarrollado por quien se interese en hacer un estudio de la evolución epistemológica de un objeto matemático.
- Por último, a la luz de estas reflexiones, se concluye que esta investigación fortalece las líneas de investigación mencionadas en un principio, "Enseñanza de la Matemática" y la Teoría Cognitiva PMA.

REFERENCIAS

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(003), 219-236.

Boyer, C. (2003). *Historia de la Matemática*. Madrid: Editorial Alianza.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*. México: Thomson Editores.

Contreras, A. y García, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 14(3), 277-310.

Cornu, B. (2002) Limits. En Tall, D. (Ed), *Advanced mathematical thinking*. 153-166. USA: Kluwer Academic Publishers

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Valdivé, C. (2008). *Esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal y su evolución en estudiantes de Análisis Matemático*. Tesis Doctoral no publicada. UCLA-UNEXPO-UPEL.

Valdivé, C. y Garbín, S. (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución Histórica de la Noción de Infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(3), 413-450.

Tall, D. (2002). *Advanced mathematical thinking*. USA: Kluwer Academic Publishers