Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática
ISBN: 978-980-7464-17-8

LA MATEMÁTICA DEL JUEGO DE POOL. VECTORES, REALIDAD Y GEOGEBRA

Verónica Navarro[1] y **Juan Luis Prieto G.**[1,2]
[1]Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática, [2]LUZ
Matemática y Realidad. Educación Media

RESUMEN

El estudio de los vectores es de suma importancia dada su utilidad en la resolución de diversos problemas. Sin embargo, a pesar de su amplio rango de aplicaciones, su buen uso representa un reto para muchos estudiantes. En parte, las dificultades y errores de comprensión son una consecuencia de las estrategias de enseñanza aplicadas por los docentes (Flores, Kanim y Kautz, 2004). En este sentido, al modificar la manera en que se presenta este contenido, puede haber una mejora en el desempeño de los estudiantes (Flores et al., 2004). Considerando lo anterior, este trabajo describe una secuencia de enseñanza de las operaciones con vectores a través del pool. Para desarrollar dicha secuencia se eligió como contexto el juego de bola-9 y se utilizó el GeoGebra para recrear dicho juego. El recurso puede consultarse en https://tube.geogebra.org/material/simple/id/1361173. Esta secuencia fue diseñada para estudiantes de tercer año de Educación Media y se estructura en tres pasos principales, a saber: (i) Introducción a los vectores, (ii) Propiedades de los vectores y (iii) Suma de vectores. Éste último se subdivide en (a) Método algebraico y (b) Método geométrico. Es importante destacar que el uso per se de recursos tecnológicos no garantiza una mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, si éste no se acompaña de una secuencia de acciones dirigidas a determinados propósitos de aprendizaje y guiada por el docente (Vargas, 2001). En este sentido, se considera que la secuencia diseñada es una herramienta potente para la comprensión de los vectores ya que no sólo se aprovecha el dinamismo y la posibilidad de mostrar animaciones a través de la tecnología, sino que además el contenido es abordado desde una situación de la vida real, lo cual le permite al estudiante establecer conexiones entre la Matemática y su entorno para resolver problemas.

Palabras clave: vectores, GeoGebra, pool.

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

El estudio de los vectores es de suma importancia dada la utilidad de este contenido en la resolución de diversos problemas matemáticos (p.e., relacionados con la Geometría y el Álgebra) y no-matemáticos (p.e., problemas del área de la Física). En cuanto a esto último, vale destacar que determinadas magnitudes fácilmente apreciables en la vida cotidiana son de naturaleza vectorial, como ocurre con la fuerza, aceleración, velocidad y desplazamiento. Sin embargo, a pesar de su amplio rango de aplicaciones, el buen uso de los vectores en estas situaciones representa un reto para muchos estudiantes. En parte, las dificultades y errores de comprensión de este contenido son una consecuencia de las estrategias de enseñanza aplicadas por los profesores (Flores et al., 2004). Según Zambrano y García (1988), algunos problemas en la enseñanza de los vectores son: (i) lo poco evidente que resultan las relaciones entre sus elementos (magnitud y dirección); (ii) las dificultades para comprender el concepto de vector, (iii) las complicaciones inherentes a la manipulación de estos objetos;

y (iv) las pocas conexiones de este concepto con la vida cotidiana. Respecto a esto último, los autores señalan que contextualizar la enseñanza de los vectores es de suma importancia para lograr su comprensión, pero que los profesores suelen colocar este proceso en un segundo plano.

Bajo esta realidad, una comprensión conceptual sólida sobre las operaciones entre vectores es un resultado que difícilmente se puede obtener luego de la enseñanza de este tópico siguiendo un enfoque tradicional. Es por esta razón que la modificación de la manera en que se presenta este contenido puede mejorar significativamente el desempeño de los estudiantes en cuestiones referentes a las operaciones con vectores (Flores et al., 2004). Tratándose de contenidos como los vectores, Flores et al (2008) recomiendan establecer una mayor interacción entre el sujeto y el objeto de conocimiento en un plano de representación gráfica, como lo son las animaciones. Considerando lo anterior, en este trabajo se propone el uso del GeoGebra como medio para recrear un conjunto de escenas del juego de pool (una variante del billar), con el propósito de servir de contexto para el abordaje de contenidos de vectores en el plano. Específicamente, el trabajo describe una secuencia de enseñanza de las operaciones con vectores utilizando ciertas jugadas del pool, que trata de develar la Matemática detrás de este contexto. La ventaja de trabajar con este tipo de situaciones es que los estudiantes pueden reconocer la relación entre la Matemática y el mundo real en el sentido de sus aplicaciones para resolver problemas.

EL JUEGO DE POOL Y EL GEOGEBRA

Para desarrollar la secuencia se ha elegido como contexto al juego de bola-9. Este juego es una variante del pool el cual, a su vez, es una variante del billar. El billar es un reconocido deporte. Para practicarlo, se necesita una mesa rectangular forrada con paño, la cual está delimitada por bandas (los bordes sobresalientes de la mesa). Ésta puede tener agujeros o no. Además, se necesita un taco de billar y bolas (la cantidad varía en cada modalidad). El billar se trata de un juego antiguo cuyos orígenes son inciertos. Se dice que sus raíces se remontan a Grecia, cuando en el siglo IV a.C. se practicaba un juego de bolas sobre el suelo (Labeaga, 2014). Los egipcios también lo jugaban e incluso se dice que la emperatriz Cleopatra era una gran aficionada a este deporte (Jiménez y Gómez, 2009).

Con respecto a su creación, todavía existe cierta controversia. Por un lado, la tradición inglesa afirma que su autor fue Bill Yar, lo que explicaría el nombre del juego. Por otro lado, la escuela francesa afirma que la autoría es de Henry Devigne. A pesar de esta disputa, se dice que, en un sentido estrictamente relacionado con la similitud de la configuración actual del juego, su creación le corresponde a los franceses ya que, en el siglo XV, el rey Luis XI lo jugaba en un salón y sobre una mesa (Labeaga, 2014), de forma análoga a como se practica el billar hoy día. Más aún, la primera sala pública de billar se abrió en París en 1960. Un gran

ISBN: 978-980-7464-17-8

aficionado del billar fue el rey XIII. Sin embargo, fue su hijo Luis XVI quien, en el siglo XVIII, puso este deporte de moda.

El pool es una de las variantes del billar y se juega sobre una mesa de pool. Ésta se caracteriza por tener seis hoyos, llamados buchacas o troneras, dentro de las cuales se introducen las bolas de billar para ganar el juego. Existen muchas modalidades del juego de pool, entre ellas el juego de bola-9 cuyas bolas de billar (diez en total) son de diferentes colores, enumeradas del uno al nueve junto a una bola blanca. Éstas se ubican en forma de rombo o "piña", con la bola número uno al frente del jugador que realiza el saque (el jugador que rompe la piña, el primero en jugar) y las nueve bolas en el centro. El saque se realiza con la bola blanca. Se ha considerado este juego como contexto de aprendizaje ya que las bolas, al moverse por la mesa, describen trayectorias rectilíneas que pueden representarse a través de vectores.

Para recrear este juego se ha utilizado el GeoGebra, un software de matemática dinámica, de uso gratuito y creado para tratar contenidos de Geometría, Algebra, Cálculo y Estadística de forma dinámica e interactiva, a través de la coordinación de registros gráficos y numérico-algebraicos, todo en una sola aplicación (Hohenwarter, Hohenwarter y Lavicza, 2008). En los años recientes, se ha utilizado al GeoGebra como medio para la elaboración de animaciones o simulaciones de diversos fenómenos físicos (Cervantes, Rubio y Prieto, 2015; Prieto, 2016). Este tipo de experiencias con el GeoGebra favorece la visualización de conceptos matemáticos abstractos (Álvarez, 2010), como lo son los vectores. El recurso con GeoGebra creado para esta investigación puede consultarse en https://tube.geogebra.org/material/simple/id/1361173. El uso de este recurso según la secuencia propuesta aquí puede ayudar a que los estudiantes doten de sentido a las propiedades y operaciones con los vectores.

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

La secuencia descrita a continuación fue diseñada para estudiantes de tercer año de Educación Media y se centra en las propiedades y operaciones con los vectores, específicamente en la suma. Esta propuesta fue desarrollada en atención a una asignación de un curso de Geometría Analítica de la licenciatura en Educación mención Matemáticas y Física de la Universidad del Zulia, en el periodo U-2014.

Paso 1: Introducción a los vectores

Cuando el juego comienza, el jugador toma su taco de billar y realiza el saque, golpeando la bola blanca (ver Figura 1a). Este movimiento puede visualizarse dinámicamente en el recurso elaborado. Cuando el archivo es abierto, se muestra una ventana emergente donde se observa una mesa de pool y nueve bolas desde una perspectiva aérea. También se muestra un botón llamado *Move 1*, el cual se refiere al movimiento en cuestión (ver Figura 1b).

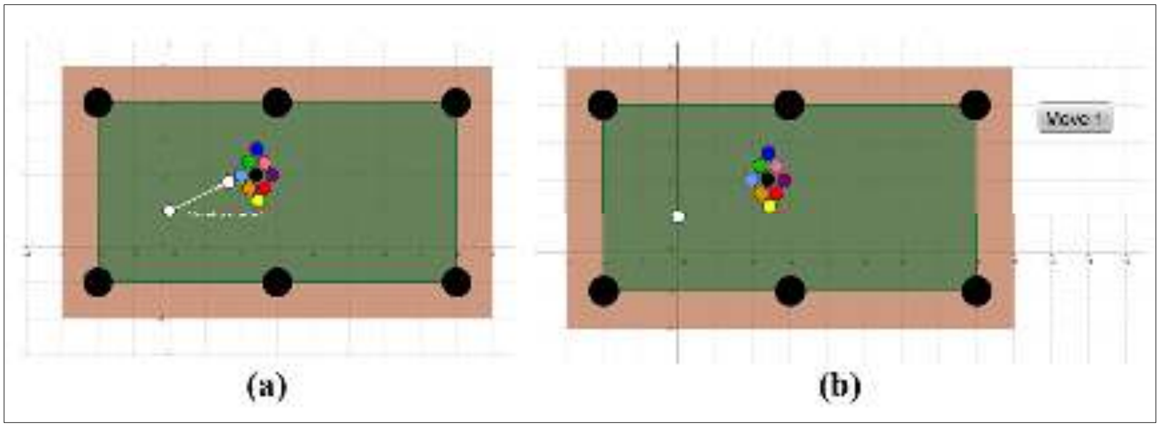

Figura 1

Cuando se hace click sobre este botón, el usuario podrá mover el taco de billar y golpear la bola blanca. Ésta se desplazará, rompiendo la piña. Se debe tomar en cuenta el cambio en la posición de la bola: la bola describe un *desplazamiento*, una magnitud vectorial. De esta forma, se pretende que el estudiante conciba dicha magnitud como el cambio de la posición de los objetos. Es importante destacar que el movimiento debe considerarse a partir de un punto de referencia, ya que se trata de un fenómeno físico de carácter relativo (Mendoza, Ripoll y Ruz, 2005). Es por esta razón que las figuras del juego se muestran sobre un plano cartesiano.

Otra consideración es que el desplazamiento depende de la posición inicial y final, por lo tanto, este "cambio de posición" es independiente de la trayectoria entre esos dos puntos (Serway y Jewett, 2008). En nuestro diseño, esto representa una ventaja ya que, si bien un vector no siempre representa a un desplazamiento, todo desplazamiento puede ser descrito a través de un vector. De esta manera, el docente puede introducir la noción de vector a través del desplazamiento de la bola blanca como consecuencia de haber sido impactada con el taco de billar: un vector puede ser representado mediante un segmento orientado que tiene un origen y un extremo (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2012a).

Además de esto, también es importante explicar a los estudiantes cómo se denotan los vectores. Para ello, se recomienda asignar un punto P a la posición inicial de la bola (el lugar ocupado por ésta antes de ser golpeada) y otro punto Q a la posición final (el lugar donde la bola se detuvo). De esta forma, el vector que representa el cambio en la posición de la bola blanca puede denotarse como $\overrightarrow{PQ}$ (ver Figura 2). También puede denotarse como $\vec{u}$, $\vec{v}$, o $\vec{w}$. En general, un vector se denota con una letra minúscula (por ejemplo, $\vec{u}$) o con dos letras mayúsculas (por ejemplo, $\overrightarrow{AB}$), escribiendo primero el origen A y luego el extremo B. Nótese que, en ambos casos, sobre esta(s) letra(s) se dibuja una pequeña flecha, siempre apuntando hacia la derecha (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2012a).

Figura 2

En el recurso, luego de haber realizado el *Move 1*, se mostrará un nuevo botón, *Replace for points 1*, el cual indicará la posición inicial y final de la bola blanca, mostrando el vector $\overrightarrow{PQ}$. Después de presionar este botón, uno nuevo aparecerá y este proceso se repite tantos movimientos se han diseñado para esta secuencia.

Paso 2: Propiedades de los vectores

Utilizando el vector desplazamiento $\overrightarrow{PQ}$, es posible explicar las propiedades de los vectores: *magnitud* (también llamada módulo) y *dirección*. Cuando se trata del pool, la magnitud del vector se relaciona con cuán lejos se movió la bola y la dirección se relaciona con la noción de hacia dónde lo hizo. En la situación mostrada con el botón *Replace for points 1*, la magnitud del vector $\overrightarrow{PQ}$ representa la distancia entre la posición inicial y final de la bola y, de aquí, los estudiantes pueden comprender la magnitud de un vector como la distancia entre el origen y el extremo. Por otro lado, la inclinación con la cual la bola se desplazó representa la dirección. Matemáticamente, puede decirse que la magnitud de un vector (denotado como el valor absoluto, por ejemplo, $|\overrightarrow{PQ}|$) es la distancia entre el origen y el extremo del vector. La dirección de un vector es el ángulo entre la recta que lo contiene y el $eje\ x$ (o cualquier recta paralela a éste) (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2012a)

Otra forma de indicar la magnitud y la dirección de un vector, es mediante sus componentes. Para esta alternativa, se debe tener en cuenta el desplazamiento de la bola blanca. Teniendo el plano cartesiano sobre la mesa de pool, se puede observar cuántas unidades a la derecha y cuántas unidades hacia arriba se ha movido la bola (ver Figura 3a). Matemáticamente, se pueden definir las componentes como las proyecciones ortogonales del vector en los ejes coordenados (ver Figura 3b).

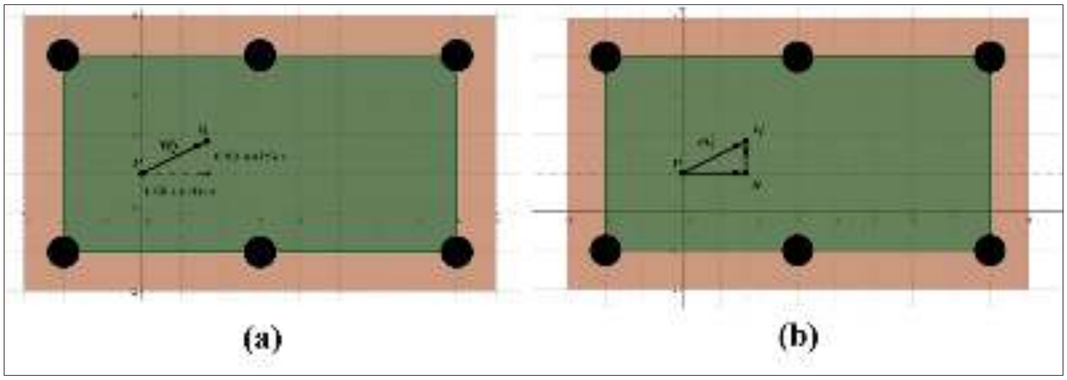

Figura 3

En esta situación, las componentes del vector $\overrightarrow{PQ}$ son $1.65\ unidades$ en el $eje\ x$ y $0.82\ unidades$ en el $eje\ y$. De esta forma, el vector puede ser representado de la siguiente manera: $\overrightarrow{PQ} = (1.65, 0.82)$. En general, cualquier vector $\vec{u}$ puede ser representado en términos de sus componentes como par ordenado. En consecuencia, $\vec{u} = (u_x, u_y)$, donde u_x es la componente en el $eje\ x$ y u_y la componente en el $eje\ y$ (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2012b).

Luego del movimiento descrito previamente, las bolas de billar se reacomodan sobre la mesa (ver Figura 4a). El botón *Rearrange 1* muestra tal movimiento.

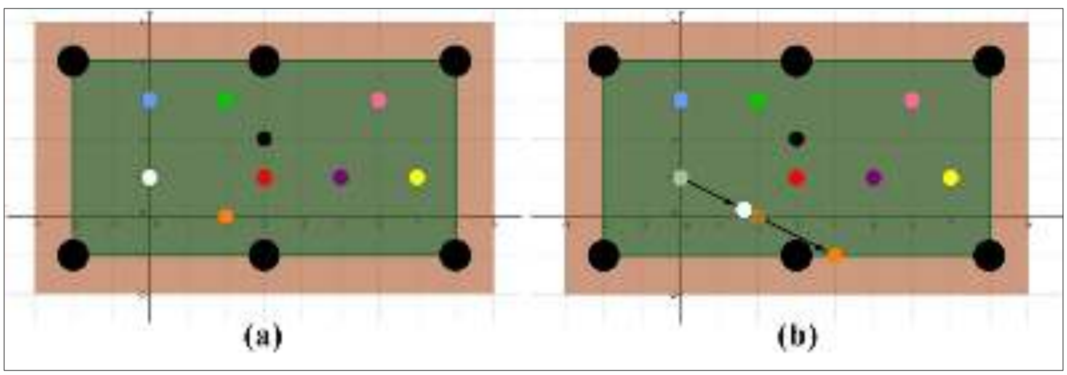

Figura 4

En este momento, se recomienda una tarea, de forma que los estudiantes pueden poner en práctica su conocimiento: Si el jugador golpea la bola blanca, la cual a su vez golpea a la bola naranja (ver Figura 4b), determine el vector que describe el movimiento de la bola naranja. Determine su magnitud, dirección y sentido. El botón *Move 2* reproduce el movimiento y el botón *Replace for points 2* cambia las bolas naranjas por puntos.

Paso 3: Suma de vectores

A continuación, se considera una nueva reorganización de las bolas (ver Figura 5). El botón *Rearrange 2* simula esta nueva disposición.

ISBN: 978-980-7464-17-8

Figura 5

Otro jugador golpea la bola blanca y ésta, a su vez, choca con la bola negra. Esta última se mueve sobre la mesa del pool, pero luego choca con el borde, cambiando la dirección de su desplazamiento (ver Figura 6a). El botón *Move 3* muestra esta jugada. En este caso, es conveniente preguntarse: ¿Cómo se puede determinar el desplazamiento total de la bola negra? Este desplazamiento, como en el caso de la bola blanca, es el cambio total de posición de la bola negra desde antes de ser golpeada y hasta el momento en que detuvo su movimiento. Se recomienda asignar puntos a las posiciones de interés del trayecto que tuvo la bola, esto es, sea A la posición inicial de la bola negra, B la posición donde golpeó el borde la mesa de pool y C su ubicación final (ver Figura 6b).

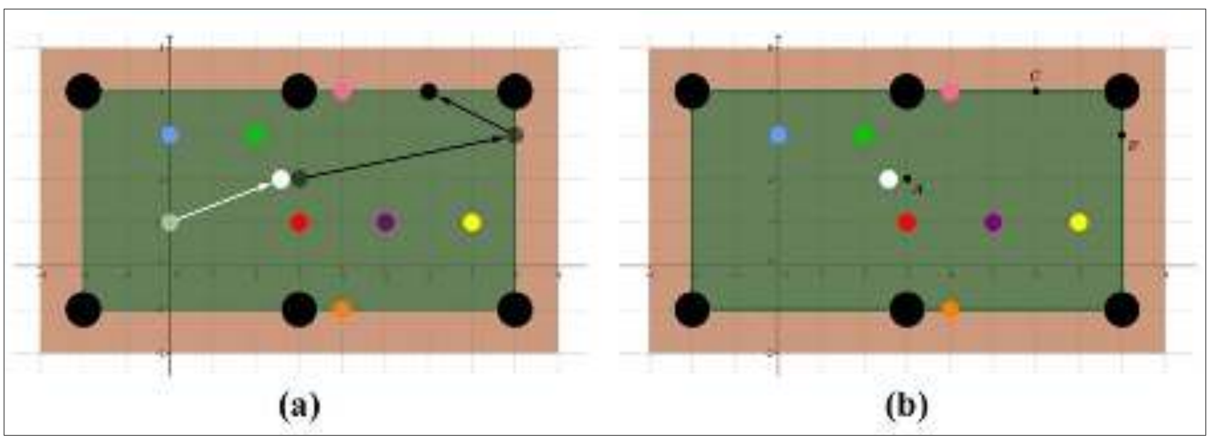

Figura 6

Ahora es el momento de establecer vectores que indiquen el cambio de posición de la bola. El primero ocurrió desde que la bola fue impactada hasta que chocó con el borde. Esto puede representarse como el vector $\overrightarrow{AB}$. El otro cambio de posición tuvo lugar desde esa posición hasta su ubicación final, lo cual puede representarse como el vector $\overrightarrow{BC}$.

Siguiendo las recomendaciones de Gáspar de Alba para resolver problemas con vectores (citado por Flores et al., 2008), en este instante se debe trabajar con representaciones matemáticas, esto es, los registros con que se dispone para manipular, visualizar y concebir un objeto matemático. Aunque las representaciones matemáticas más usadas son la analítica y la verbal, existen otras representaciones con las cuales el estudiante puede alcanzar un aprendizaje significativo, entre ellas la diagramática, la cual consiste en el uso de segmentos dirigidos para representar vectores (Flores et al., 2008). Por tal motivo, se recomienda hacer un mayor énfasis en los métodos geométricos, en tanto que este esfuerzo implica una mejora en la solución de problemas vectoriales por parte de los estudiantes (Flores, González y Herrera, 2007).

Paso 3.1: Método algebraico

Para resolver problemas mediante el método algebraico, es necesario tomar en cuenta las coordenadas del origen y el extremo de los vectores, para poder hallar sus componentes. Se sabe que las componentes se pueden determinar mediante la resta de las coordenadas en el mismo eje. Tomando en cuenta que los puntos son $A = (3,2)$; $B = (8,3)$ y $C = (6,4)$:

$$\overrightarrow{AB} = (8-3, 3-2) \to \overrightarrow{AB} = (5,1)$$
$$\overrightarrow{BC} = (6-8, 4-3) \to \overrightarrow{BC} = (-2,1)$$

De esta forma, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ sería:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (5+(-2), 1+1) \to \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (3,2)$$

En este momento, se le recomienda al docente iniciar una discusión con los estudiantes para que ellos descubran que el desplazamiento total de un objeto no es más que la suma de los desplazamientos parciales. Algunas preguntas generadoras que pueden ser usadas son las siguientes: Calcule las componentes del vector $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ¿Le parecen familiares? ¿Qué se puede concluir del resultado obtenido y la solución de este problema?

Paso 3.2: Método geométrico

El otro método para resolver este problema es mediante el método geométrico. Uno de los métodos geométricos más prácticos lo constituye el "método del polígono". Es importante resaltar que una condición para usar este método es que los vectores sean consecutivos (el extremo de uno es el origen del otro). En este caso, los vectores a sumar son consecutivos, ya que el extremo de $\overrightarrow{AB}$ (B) es el origen de $\overrightarrow{BC}$. Es importante tener en cuenta que la regla del polígono puede ser utilizada para sumar dos o más vectores y establece lo siguiente: si los vectores pueden representarse como lados de un polígono, luego la resultante es el lado que cierra al polígono en sentido opuesto. En otras palabras, si todos los vectores son consecutivos, la resultante es el vector cuyo origen es el origen del primer vector y su extremo es el extremo del último vector (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2012c).

En esta situación, el primer vector es $\overrightarrow{AB}$ y, en consecuencia, el origen del vector suma es A. El segundo y último vector es $\overrightarrow{BC}$ y el extremo del vector suma sería C. Esto explica por

ISBN: 978-980-7464-17-8

qué $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (ver Figura 7a). El botón *Replace for points 3* muestra esto. De aquí, se pueden establecer otras interpretaciones geométricas del resultado en base a la suma de vectores y a la definición de las componentes, por ejemplo, la bola negra se movió tres unidades a la derecha y una unidad arriba. Matemáticamente, su desplazamiento fue $\overrightarrow{AC} = (3,1)$. De aquí puede intuirse que todo vector se escribe como la suma de otros dos, los cuales representan sus componentes. En este caso, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ donde $\overrightarrow{AB} = (3,0)$ y $\overrightarrow{BC} = (0,1)$ (ver Figura 7b).

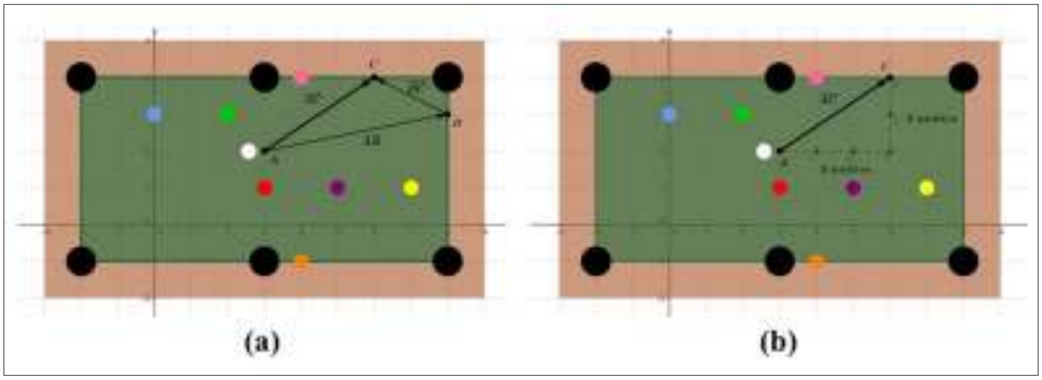

Figura 7

Este es un buen momento para presentar una tarea para los estudiantes, pero primero debe tomarse en cuenta la nueva reorganización de las bolas, mostrada con el botón *Rearrange 3*. Ahora, imagine la siguiente situación: El jugador golpea la bola blanca para impactar la bola negra. Ésta, a su vez, impacta la bola rosada, la cual cae en la tronera superior derecha. Esto puede observarse dinámicamente activando el *Move 4*. La trayectoria de la bola rosada se ilustra en el recurso al presionar el botón *Replace for points 4*. En este caso, ¿cuál es el desplazamiento total de la bola negra?

Posteriormente, se puede tratar la suma de tres vectores y luego generalizar el proceso. Para ello, se recomienda considerar la nueva disposición de las bolas de billar, mostrada al presionar el botón *Rearrange 4* (ver Figura 8a). El jugador golpea la bola blanca para impactar la morada e introducirla en la tronera superior derecha, pero el jugador falla en introducirla aquí. En cambio, la bola morada choca con la amarilla y se mueve por el borde. En este punto, el movimiento de la bola morada ha perdido energía y la bola va girando con cierto efecto, hasta que cae en la buchaca superior derecha (ver Figura 8b). Esta jugada se muestra dinámicamente activando el botón *Move 5*. Para hallar el desplazamiento total de la bola morada se asigna un punto a cada posición de interés durante el movimiento, por ejemplo, sea F la posición inicial de la bola, G el lugar donde la bola negra chocó con la amarilla, H la posición donde chocó con el borde e I la posición donde se detuvo la bola (ver Figura 8c).

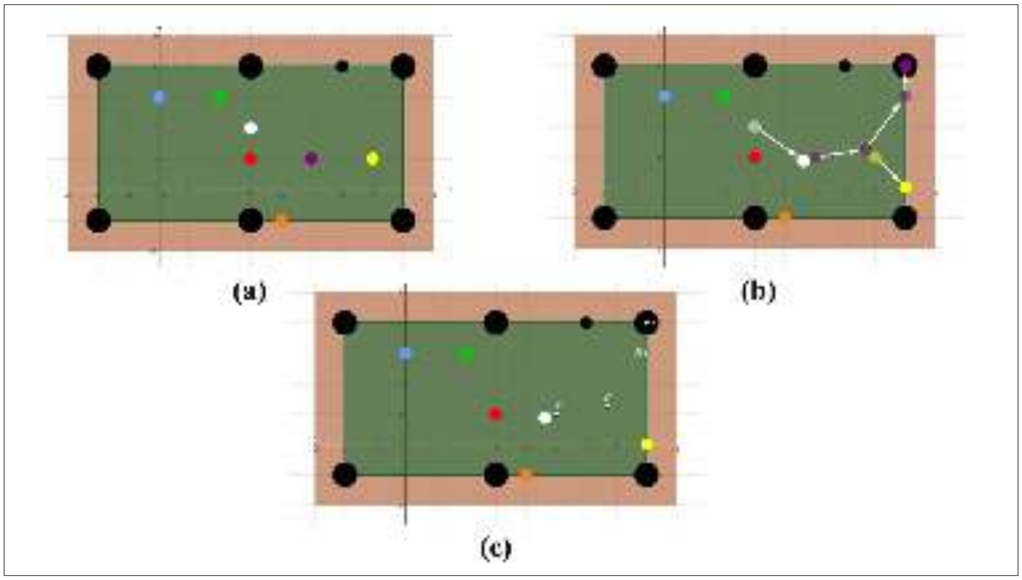

Figura 8

En este instante, se debe pedir a los estudiantes que determinen el desplazamiento total de la bola morada a través del método geométrico y el método algebraico, si se sabe que $F = (5,1)$, $G = (6.7, 1.3)$, $H = (8,3)$ e $I = (8,4)$. La intención es que el docente guíe al estudiante de forma que ellos puedan "descubrir" por sí mismos un método para sumar más de dos vectores. Al culminar esta experiencia, los estudiantes pueden verificar sus respuestas (ver Figura 9) pulsando el botón *Replace for points 5*.

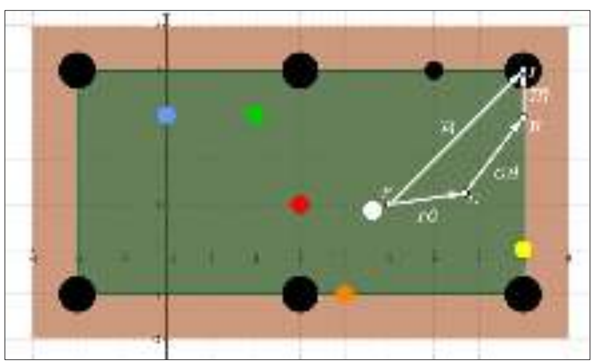

Figura 9

REFLEXIONES FINALES

Al término de este trabajo se ha descrito una secuencia didáctica para la enseñanza de vectores, mediante el uso del GeoGebra. Es importante destacar que el uso *per se* de recursos tecnológicos no garantiza una mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Por esta razón, es necesario que tal uso se acompañe de alguna secuencia instruccional, dirigida al logro de determinados propósitos de aprendizaje y guiada por el docente (Vargas, 2001). De esta manera, no basta con presentar el recurso elaborado en GeoGebra, es importante además su buena aplicación (Llanos, 2012). En este sentido, se considera que la secuencia diseñada es una herramienta potente para la comprensión de los vectores ya que no sólo se aprovecha el dinamismo y la posibilidad de mostrar animaciones a través de la tecnología, sino que además el tema es abordado desde una situación de la vida real, lo cual le permite al estudiante establecer conexiones entre la Matemática y su entorno para resolver problemas.

Asimismo, es importante destacar que la secuencia didáctica planteada en este trabajo no es una "fórmula" que el profesor debe seguir estrictamente al pie de la letra. En este sentido, se invita a la comunidad docente a buscar distintas estrategias y métodos para la enseñanza de la Matemática, no sólo utilizando el recurso aquí propuesto, sino también a través del desarrollo de experiencias similares que presenten otros contextos (p.e., los juegos tradicionales venezolanos) o situaciones problemáticas a nivel local, regional o nacional.

RECONOCIMIENTO

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de investigación No. CH-0354-15, adscrito al Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI) y financiado por el Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico (CONDES) de la Universidad del Zulia, Venezuela.

REFERENCIAS

Alvarez, T. (2010). La visualización de conceptos matemáticos y el aprendizaje del electromagnetismo. *Latin-American Journal of Physics Education, 4*(1), pp. 143-148.

Cervantes, A., Rubio, L. y Prieto, J.L. (2015). Una propuesta para el abordaje de la refracción y reflexión total interna utilizando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, 4*(1), pp. 18-28.

Flores, S., Chávez, J., Luna, J., González, M.D., González, M.V. y Hernández, A. (2008). El aprendizaje de la física y las matemáticas en contexto. *Cultura Científica y Tecnológica, 5*(24), pp. 19-24.

Flores, S., Kanim, S. y Kautz, C. (2004). Student use of vectors in introductory mechanics. *American Journal of Physics, 72*(4), pp. 460-468.

Flores, S., González, M. y Herrera, A. (2007). Dificultades de entendimiento en el uso de vectores en cursos introductorios de mecánica. *Revista Mexicana de Física, 53*(2), pp. 178-185.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M. y Lavicza, Z. (2008). Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 28(2), pp. 135-146.

Jiménez, Z. y Gómez, L. (2009). El billar, deporte serio y en serie. *Ciencia-UANL, 14*(2), pp. 189-192.

Labeaga, J. (2014). En Viana se juega al billar en el siglo XVII. *Cuadernos de etnología y etnografía de Navarra, 46*(89), pp. 27-30.

Llanos, J. (2012). *La enseñanza universitaria, los recursos didácticos y el rendimiento académico de los estudiantes de la E.A.P de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos*. Tesis de maestría. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

Ministerio del Poder Popular para la Educación. (2012a). *Conciencia Matemática. Segundo Año*. Caracas. Colección Bicentenario.

Ministerio del Poder Popular para la Educación. (2012b). *Naturaleza Matemática. Cuarto año*. Caracas. Colección Bicentenario.

Ministerio del Poder Popular para la Educación. (2012c). *La belleza de la Matemática. Tercer Año*. Caracas. Colección Bicentenario.

Mendoza, A., Ripoll, L., y Ruz, L. (2009). Instrumentos para la enseñanza-aprendizaje de los vectores en cinemática. *Revista Educación y Pedagogía, 17*(43), pp. 93-107.

Prieto, J.L. (2016). El uso del GeoGebra en diferentes escenarios de actuación. En J. Arteaga y M. Delgado (Comps.), *Memorias del IX Simposio de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Naturales*. Universidad del Zulia.

Serway, R. y Jewett, J. (2008). *Física para ciencias e ingeniería*. México: Cengage Learning Editores.

Vargas, M. (2001). Los Materiales Educativos: Herramientas de Conocimiento. En M. Vargas, M. Pérez y L. Saravia (Eds.), *Materiales Educativos: Conceptos en Construcción* (pp. 13-84). Bogotá, Colombia: Convenio Andrés Bello, Proyecto Materiales Educativos para la Educación Básica.

Zambrano, J. y García, E. (1998). Multimedia: traductor de funcionalidades pedagógicas. En L. Costi (Ed.). *IV Congresso Ibero Americano de Informática na Educação*. Centro de Convenções Ulysses Guimarães de Brasília.