

DIFICULTAD COGNITIVA ASOCIADA AL APRENDIZAJE DE LA ENTIDAD MATEMÁTICA FUNCIÓN

Alexandra Noguera y Fredy González

Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda, UPEL IP Maracay

alexnoguera66@gmail.com

Metacognición. Formación de Docentes. Educación Universitaria

RESUMEN

Las primeras unidades curriculares de matemática de la formación inicial de los Licenciados en Educación Matemática Mención Informática de la UNEFM arrojan un fracaso estudiantil que indica discrepancias entre las exigencias conceptuales que se demandan en estas asignaturas y los conocimientos que exhiben los estudiantes. Esta problemática se convierte en asunto de interés indagatorio como parte del desarrollo de mi proyecto de tesis doctoral, donde pretendo ahondar en las dificultades cognitivas asociadas a la comprensión de la entidad matemática función, una de las entidades más importantes del área de la matemática, pues de ella se deriva la comprensión de hechos cotidianos expresados a través de funciones de variable real y da a la matemática su carácter científico, premisa sustentada por Cantoral y Otros (2000), Artigue (1995), Arrieche (2010) y Sánchez (2010). Asumo una mutipluralidad teórica que inicia con abordaje histórico-epistémico de entidad matemática considerando el Godino y Batanero (1994), además de los aportes de la perspectiva de cognición matemática de Schoenfeld (1985, 1992), la noción de obstáculo epistemológico de Bachelard (1987) y Brousseau (1989) para explicar la aparición de errores y referirse a las dificultades vinculadas con las formas de considerar el conocimiento. Metodológicamente se enmarca en una perspectiva cualitativa, orientada en el paradigma interpretativo bajo enfoque fenomenológico y diseño corresponde con un estudio de casos, donde se correlacionarán las dimensiones: teórica y empírica que permitirán obtener sustentos teóricos que conceptualicen las dificultades cognitivas asociadas al aprendizaje de la entidad matemática función y que conviene tener en cuenta al momento de diseñar la intervención didáctica para facilitar contenidos matemáticos adheridos a esta entidad. Resultados preliminares reportan estudios de diferentes concepciones históricas y epistémicas sobre la entidad matemática función. Así mismo, los resultados preliminares indican errores de los estudiantes, los cuales están siendo sometidos a un análisis detallado.

Palabras clave: dificultad cognitiva, función, formación inicial de profesores.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El estudio de la matemática juega un rol fundamental como forma de aproximación a cualquier tipo de conocimiento y como base para ir adquiriendo otros aprendizajes cada vez más complejos. Sin embargo, si bien su importancia es universalmente reconocida, también lo son los problemas asociados a su aprendizaje, entre los que se encuentran, las formas de apropiación y de construcción del conocimiento matemático que suelen resultar erróneos y que tienen una marcada incidencia en el fracaso académico.

Este panorama pudiera ser una de las causas por las cuales la investigación didáctica sigue centrando su interés en estudios sobre aspectos cognitivos del aprendizaje

matemático con miras a ofrecer explicaciones sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes para la apropiación de contenidos en esta área.

En este sentido, para generalizar el asunto de interés indagatorio, consideré oportuno apoyarme en referentes internacionales como Radatz (1980), Brousseau (1983), Sierpiska (1990) y Artigue (1995) puesto que en estas investigaciones encuentro aspectos que intentan explicar el desafío cognitivo que constituye el aprendizaje de las entidades matemáticas inmersas en el cálculo diferencial y del cual subyacen dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior donde se encuentran implicados procesos de abstracción, análisis, demostración, resolución de problemas, entre otras.

Aunado a ello, me sustento en la recolección de evidencias empíricas provenientes de mi propio accionar como docente, el cual me permite constatar lo planteado por estos autores, ya que en las aulas universitarias durante el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática resultan evidentes las dificultades que enfrentan los estudiantes de Ingeniería y de Educación a la hora de resolver problemas en los que tengan que aplicar el conocimiento sobre entidades matemáticas.

En concordancia con las ideas anteriores y en aras de contextualizar el problema de estudio, referentes nacionales como Arrieche (2010) permiten establecer que durante el estudio de entidades matemáticas los estudiantes venezolanos enfrentan diversas dificultades en cualquier nivel educativo. Más aún, Sánchez (2010), González y Noguera (2012), Trejo y Noguera (2012), González y Cols (2012) subrayan que el nivel de rendimiento de los estudiantes universitarios no es satisfactorio, particularmente el estudiante del Programa de Educación como futuro docente de Matemática e Informática de la Universidad Nacional Experimental "Francisco de Miranda" (UNEFM), debido a su escasa formación matemática previa y significativa para la comprensión de nuevos contenidos a ser abordados en la Unidad Curricular (UC) Fundamentos de Matemática, como lo son: Orden en \mathbb{R} , Sistema de Coordenadas Cartesianas, Funciones y Secciones Cónicas.

Aunado a ello, las estadísticas que se llevan en el Departamento de Física y Matemática de la UNEFM sobre el rendimiento académico de los estudiantes cursantes de esta UC, ubicada en el primer semestre de la carrera, durante los periodos académicos I-2015 (40% reprobados, 5% sin información y 09,12 promedio de sección), II-2015 (39% reprobados, 6% sin información y 08,33 promedio de sección) y III-2015 (42% reprobados, 9% sin información y 08,11 promedio de sección), dan cuenta de un rendimiento cada vez más bajo, de índices de reprobación cada vez más altos, un preocupante aumento en la cifra de estudiantes sin información y críticos niveles de rendimiento académico.

De igual forma, las entrevistas sostenidas con mis colegas a cargo de esta asignatura y las evidencias recabadas durante la observación de clases (como docente invitada) dan cuenta de marcadas dificultades asociadas al dominio de contenidos matemáticos, que van

desde el manejo inadecuado de operaciones matemáticas elementales, la comprensión errónea de conceptos matemáticos como el de función, hasta la incapacidad de resolver ejercicios de aplicación.

Por otra parte, mi experiencia como docente de matemática durante 13 años de servicio en la UNEFM, específicamente como facilitador de las unidades curriculares Matemática I, II, III, Álgebra Lineal y Cálculo Numérico en el área de educación, me permite afirmar que los estudiantes muestran dificultades en el aprendizaje de contenidos matemáticos, específicamente en el contenido de funciones, estudiado en Fundamentos de Matemática como funciones de variable real y en Matemática III como funciones de varias variables. Entre estas dificultades puedo mencionar: i) no identifican el dominio y rango de la función, ii) errores en las diferentes formas de representación de funciones, iii) problemas para la identificación de suma, producto, cociente y composición de funciones, iv) incapacidad para comprender y resolver problemas, v) otras referentes al dominio instrumental del álgebra y la aritmética.

Este contexto problematizador, resulta indiscutible que al carecer de una base robusta y una adecuada comprensión de significado respecto a las funciones de una variable real se dificulta aún más la comprensión del tema sucesivos como el de Derivadas (contenido de Matemática I), Sucesiones (contenido de Matemática II) y Funciones de Varias Variables (contenido de Matemática III). De allí que considero importante y pertinente hacer el estudio en el contexto de la UC Fundamento de Matemáticas. Al mismo tiempo, este panorama me conduce hacia la reflexión sobre los aspectos relacionados con la apropiación de saberes matemáticos en estudiantes universitarios, particularmente aquellos en formación inicial como docentes de esta área, además de adoptar la premisa de González (2014) según la cual estas dificultades están asociadas con cuestiones propias de su funcionamiento cognitivo. Cabe destacar que el estudio desarrollado en este trabajo está inmerso en la línea de investigación: Ciencias Cognitivas, coordinada por el Doctor Fredy González en el núcleo de investigación en Educación Matemática "Emilio Medina" del Instituto Pedagógico de Maracay en Venezuela.

De allí que me planteo varias interrogantes, sin embargo, para efectos de este reporte, planteo las siguientes: ¿cuáles han sido los conflictos que subyacen a través de la historia de la entidad matemática función?, ¿qué periodos históricos se establecen en la evolución de los procesos didácticos asociados a la entidad matemática función? y ¿cuáles obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de la entidad matemática función enfrentan los estudiantes cursantes de la UC Fundamentos de la Matemática de la UNEFM?

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Tomando en consideración el contexto problematizador planteado, en el marco del desarrollo de este proyecto de tesis doctoral, aunado además al deseo de contribuir al esclarecimiento de las dificultades cognitivas en el aprendizaje matemático y la importancia de garantizar una adecuada formación a los futuros docente de esta área, se establecen los siguientes objetivos de investigación:

Objetivo General

Analizar el proceso cognitivo de la entidad matemática función en la formación inicial de docentes en la UNEFM.

Objetivos Específicos

- Reconocer los conflictos que subyacen a través de la evolución histórica de los procesos didácticos asociados a la entidad matemática función.
- Establecer los periodos históricos de la evolución de los procesos didácticos asociados a la entidad matemática función.
- Caracterizar los obstáculos que sobre la entidad matemática función exhiben los estudiantes cursantes de la UC Fundamentos de la Matemática de la UNEFM.

MARCO TEÓRICO

Los procesos cognitivos asociados a esta entidad matemática *función* se convierten en mi asunto de interés indagatorio, de allí que pretendo ahondar en la cognición matemática desde una multiplicidad teórica encausada por dos vertientes. La primera relacionada directamente con la entidad matemática *función* mediante su reconstrucción histórica y epistémica con el propósito de reconocer los conflictos que subyacen a través de la historia de la entidad. La segunda, no desvinculante de la primera, tiene que ver con la formación de estructuras cognitivas referidas al conocimiento matemático por parte de los estudiantes en formación inicial como docentes de matemática. Para los efectos de este reporte de investigación, centraré mi atención en los conflictos que subyacen a través de la evolución histórica de los procesos didácticos y los significados personales que construyen los estudiantes asociados a esta entidad matemática.

De allí que, parto del hecho de que la *función* es una de las entidades más importantes del área de la matemática, pues de ella se deriva la comprensión de hechos cotidianos que se expresan a través de funciones de variable real y le da a la matemática el carácter científico que posee; premisa que es sustentada por Cantoral y Otros (2000), Artigue (1995), Arrieche (2010) y Sánchez (2010).

De allí que el recorrido teórico comienza con los aportes de Godino y Batanero (1994; 1998) indican que el análisis epistemológico de los objetos matemáticos deben permitir clarificar la naturaleza de dichos objetos y sus diversos significados según los contextos

institucionales. El análisis epistemológico del concepto de función requiere un estudio de su evolución histórica bajo consideraciones que nos aporten conocimientos significativos para la investigación en Didáctica de la Matemática.

En este sentido, Cantoral y Otros (2000) enfatizan sobre la complejidad que reviste la naturaleza de la entidad matemática *función* que ha estado presente a lo largo del desarrollo de la humanidad, dado que reportan vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, vigencia que aún se encuentra en debate. Esta complejidad se refleja en las diversas concepciones y diversas representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y docentes de matemática. Sin embargo, el protagonismo de esta entidad emergió cuando se le concibió como una fórmula, es decir, hasta que se logró la integración entre dos dominios de representación: el Álgebra y la Geometría. No obstante, un estudio preliminar me reporta que diferentes personalidades académicas y científicas han ido introduciendo el concepto a partir de las necesidades históricas que se fueron sucediendo en el desarrollo de la humanidad.

Al respecto, en el ámbito internacional encontramos los señalamientos de Ruiz y Rodríguez (1989) referidos los obstáculos epistemológicos a los que se ha sometido la noción de función, los cuales los clasifica en obstáculos de la concepción estática, obstáculos de la concepción geométrica, obstáculos de la concepción algebraica y obstáculos de la concepción sintética de la curva, todos ellos con marcada incidencia en la comprensión de esta noción. Por su parte, Ramos (2005) establece que el objeto matemático función es el resultado de una emergencia que se ha producido a lo largo de mucho tiempo con las contribuciones de matemáticos como Descartes, Fermat, Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler, Lagrange, Cauchy, Bolzano y Weierstrass.

A nivel nacional, se reportan estudios como los de Beyer (1996) realiza un estudio histórico del concepto de función y señala que se le puede catalogar como un concepto unificador de la matemática básica, cuando se enseñan operaciones, sistemas de coordenadas, ecuaciones, sucesiones, progresiones, logaritmos, trigonometría, geometría y álgebra. Asimismo, Sánchez (2010) describe las configuraciones epistémicas de las funciones por periodos históricos, enfatizando en aquellos donde se desarrolló la noción de función, las situaciones problemas que estimularon esta noción como objeto matemático y los principales matemáticos involucrados en el desarrollo del concepto de función, todo lo cual le permitió analizar los conflictos epistemológicos, llegando a establecer reflexiones a considerarse en la enseñanza de un concepto tan importante para las matemáticas.

En este contexto, Sastre y Cols (2008) distinguen cronológicamente tres periodos: edad antigua, edad media y periodo moderno. En la edad antigua, aunque no se manejara un concepto de función, la noción de este concepto se encontraba implícita en la construcción de tablas numéricas, específicamente para cálculos aritméticos y en tablillas

astronómicas donde se reflejaban los periodos de visibilidad de los planeta, la distancia angular de ese planeta, efemérides del sol y la luminosidad de la luna, así como de la astronomía árabe se tienen relaciones trigonométricas de la construcción de relojes de sol. En la edad media, los problemas propios de la física y la astronomía permitieron cimentar la representación gráfica del movimiento respecto al tiempo, lo que posteriormente promueve la idea primitiva de lo que hoy conocemos como gráfico de una función. La ausencia de la noción de variable durante la Edad Antigua y hasta la Edad Media trajo como consecuencia una concepción estática de la noción de función

No obstante, en el periodo moderno, los aportes de varios matemáticos influyeron en el desarrollo del concepto de función, tal es el caso de Galileo: con sus estudios sobre el movimiento contienen la clara comprensión de una relación de dependencia entre variables; Descartes: con la primera definición geométrica-analítica de función, pero sin mencionar tal término, aparece por primera vez el hecho de que una ecuación en x e y es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables; Fourier: quien contribuyó a la evolución del concepto de función al considerar la temperatura como función de dos variables: tiempo y espacio; Fermat: con el diseño de un algoritmo de diferenciación mediante el cual pudo determinar los valores máximos y mínimos de una curva polinómica y trazar sus correspondientes tangentes; Newton: al expresar las funciones en forma de series infinitas; Leibnitz: quien proporciona la primera definición formal; Lagrange: al plantearse que cualquier función se puede representar por una serie de sucesiones. Finalmente, Euler y Dirichlet ofrecen el concepto moderno de función. Todos ellos contribuyeron a clasificar las funciones definidas por expresiones analíticas a trozos y las funciones que tenían un gráfico pero no tenían una expresión analítica.

Por otra parte, en referencia a la explicación y caracterización de los obstáculos que sobre la entidad matemática *función* exhiben los estudiantes universitarios, me fundamento en los aportes de Bachelard (1987) y Brousseau (1989) puesto que contienen orientaciones robustas para identificar errores y dificultades vinculadas con las formas de considerar el conocimiento.

Al respecto, Bachelard define como obstáculos epistemológicos a las limitaciones o impedimentos que afectan la capacidad de un individuo para construir el conocimiento real, asimismo a la confusión que se genera por el efecto que ejercen sobre él algunos factores, lo que trae como consecuencia que los conocimientos científicos no se adquieran de una manera correcta, afectando su aprendizaje. Sostiene además que los obstáculos epistemológicos son resistencias del pensamiento al pensamiento cuando enuncia “se conoce en contra del conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos”

Esta noción de obstáculo epistemológico fue retomada por Brousseau al indicar que un obstáculo es un conocimiento que ha sido eficiente para resolver algún tipo de problemas

pero que falla cuando se aplica a otro. No es la falta de conocimiento, por el contrario, es un conocimiento que se resiste a ser modificado o a ser rechazado: creando una barrera para un aprendizaje posterior y revelándose por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Agrega además que el conocimiento se produce cuando se supera un obstáculo, y los clasifica de acuerdo a su origen en: obstáculos de origen ontogénico, que emergen de las limitaciones del individuo; obstáculos de origen didáctico, que son provocados por el sistema de enseñanza y obstáculos de origen epistemológico que se derivan del rol constitutivo del saber mismo. Para los efectos de este reporte, centro mi atención en obstáculos de origen epistemológico.

MARCO METODOLÓGICO

Para el sustento metodológico del estudio tomo en consideración los aportes de González y Villegas (2009), quienes consideran que cada problema de investigación reclama y exige su propio método específico de abordaje, todo lo cual implica discurrir en los componentes: perspectiva, diseño, contexto y sujetos de investigación, así como las técnicas, instrumentos y procedimientos que permitan consolidar el *momento de metodologización* del estudio, el cual lo conciben como una disposición estratégica de medios (materiales, financieros, conceptuales, humanos, etc.) con los cuales podré recaudar la información que sustentará las respuestas a las interrogantes de investigación formuladas en el planteamiento del problema.

En este sentido, estos aportes me permitieron esbozar un esquema inicial que encaminará las acciones metodológicas a seguir y que proporcionará la rigurosidad científica requerida para el desarrollo de esta tesis doctoral. Por lo tanto, en la apertura metodológica se sitúan las cuestiones, referidas a las distintas vías o formas de investigación en torno a la realidad.

Desde este nivel asumo una *perspectiva* cualitativa de carácter emergente, el cual se ha convertido en tendencia en las investigaciones actuales en el campo de la educación matemática. Esta perspectiva permite explorar y describir los fenómenos (González, 2013) por cuanto se definirá a medida que avanzo en el proceso de investigación, a través del cual se hará posible recabar las distintas visiones y perspectivas de los estudiantes, prestando especial atención a los procesos; es decir, a las interacciones dialógicas de mis informantes clave, siempre atenta a los cambios discursivos y a la evolución de la trama del lenguaje durante los encuentros dialógico de las sesiones de clase.

Debido a ello, me apoyo en un enfoque fenomenológico puesto que considero que permitirá la descripción de los significados de la conciencia del fenómeno cognitivo matemático que hace posible la intencionalidad, ocupándome de la conciencia con todas las formas de vivencias, actos y correlatos de los mismos (Husserl, citado por Venturin y Silva, 2014).

Aunado a ello, resulta interesante ver un número reducido y a la vez óptimo de categorías o atributos, que surgirán de los procesos cognitivos que se pretenden estudiar, por lo cual conjugaré lo fenomenológico con lo interpretativo apoyándome en la premisa de Taylor y Bogdan (1986) quienes afirman las personas están constantemente interpretando y definiendo a medida que pasan a través de situaciones diferentes. Por tanto, un proceso de interpretación de acuerdo a estos autores, interviene como intermediario entre los significados o predisposiciones a actuar de cierto modo y la acción misma.

Siguiendo con lo sugerido por González y Villegas (op cit) el *Diseño* corresponde a un esquema que permite conducir la investigación con miras a obtener información lo suficientemente robusta que sirva para dar respuesta a las preguntas de investigación formuladas. Por lo tanto, me sustentaré en un estudio de casos, el cual, de acuerdo a Bisquerra (2009) se refiere a la investigación de un fenómeno social, un tema, un pueblo, un proceso definido y acotado, que debe ser estudiado a profundidad para poder comprender el fenómeno todo lo cual implica un proceso de indagación caracterizado por el examen sistemático y en profundidad de casos de un fenómeno, entendido estos como entidades sociales o entidades educativas únicas y explicitar con argumentación sólida

En este contexto, en cuanto al *Escenario y Sujetos*, el estudio se ha venido desarrollando en la Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda (UNEFM) de Coro, estado Falcón, atendiendo a las sugerencias de Taylor y Bogdan (op cit) quienes sugieren como escenario ideal para el estudio aquel en el cual el observador obtiene fácil acceso, establece una buena relación inmediata con los informantes y recoge datos directamente relacionados con los intereses investigativos. Por otra parte, seleccioné como informantes clave los estudiantes del I Semestre de la Licenciatura en Educación Matemática, Mención Matemática de la UNEFM, particularmente los cursantes de la Unidad Curricular Fundamentos de la Matemática por cuanto es donde se establece el contenido de funciones.

En cuanto a las *Técnicas*, las de naturaleza cualitativa me permiten una mejor recogida de información. Entre ellas: la observación participante, la técnica de las ideas escritas y los talleres con los estudiantes. La observación participante ha consistido (y sigue consistiendo) en un constante compartir las de aula del grupo de estudiantes mencionados, con miras a obtener información relevante del comportamiento cognitivo del grupo en las actividades académicas. Las ideas escritas van unidas a la grabación de las clases observadas de forma directa y permite realizar la observación de tipo diferido. Y, los talleres con los estudiantes, permiten recopilar información inherente a obstáculos, errores y dificultades cognitivas sobre la entidad matemática *función*.

En consonancia con las técnicas descritas, los instrumentos refieren a los medios de soporte que me permiten registrar la información, como los diarios de clase, donde se registrará todo los acontecimientos observados en la clase; el cuestionario tipo test que se le entrega al estudiante para el desarrollo de los talleres y las notas de campo, que vienen a

constituir descripciones de los procesos sociales que se generen en el aula y anotaciones reflexivas sobre los procesos cognitivos que exhiben los estudiantes.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Este reporte forma parte de una investigación más amplia desarrollada como proyecto de tesis doctoral iniciada en el año 2015, por lo tanto, los resultados preliminares darán respuesta a algunas de las interrogantes planteadas en el contexto problematizador.

En este sentido, encuentro que la entidad matemática *función* ha sido abordada suficientemente en muchas investigaciones a lo largo de la historia y sistematizada en estudios internacionales, nacionales y locales, lo que ha permitido tener información suficiente para establecer cronológicamente tres periodos de evolución de esta entidad: edad antigua, edad media y periodo moderno, en los cuales se muestran conflictos epistémicos asociados a la entidad matemática función que van desde una concepción estática del concepto; la ausencia de la noción de variable; disociación entre número y magnitud, hasta la dependencia geométrica de los griegos que no permitía el paso a la algebrización y expresión del concepto de función en términos de expresión analítica.

Por otra parte, los talleres, las observaciones realizadas en el aula donde se desarrolló la UC Fundamentos de la Matemática durante los periodos académicos I-2015, II-2015 y III-2015 y las entrevistas realizadas a los estudiantes (posterior a la aplicación del taller), han permitido recabar información preliminar que se ha analizado cualitativamente, buscando vincular las respuestas de los estudiantes con las correctas (o esperadas) y, de esta manera, caracterizar los obstáculos que de allí emerjan. Se tomaron como indicadores los siguientes: i) definición de *función*, ii) definición del dominio y rango de una función, iii) verificación de una función inyectiva, sobreyectiva o biyectiva y iv) esbozo de gráficas.

Una vez que los estudiantes presentaban el taller, se le asignaba una fecha de asesoría, en la cual debían asistir (el grupo completo de tres estudiantes) al cubículo del profesor, para ser entrevistados con relación a sus respuestas expresadas en el taller. El objeto de estas entrevistas era confrontar al alumno (de manera individual) con la respuesta emitida en cada uno de los ítems del taller, tratando de determinar si la concepción expresada apuntaba hacia la presencia de un obstáculo (criterio 1: valor 1). El caso contrario obedecía al criterio 2 con valor 0. Conviene destacar que en la mayoría de los casos, los estudiantes ratificaron sus respuestas, sin importar si estaban correctas o erradas. En muy pocos casos, los estudiantes optaron por cambiar su respuesta (argumentando que habían revisado sus apuntes -posterior al taller- percatándose de los errores).

Sin embargo, un análisis detallado evidencia la presencia de obstáculos sobre la entidad matemática *función* particularmente en cuanto a los conceptos de dominio, rango, verificación de una función inyectiva, sobreyectiva o biyectiva y esbozo de gráficas, no así para la definición de la entidad matemática, lo que permite inferir que los estudiantes tienen

dominan esta definición. Se reportan además errores en cuanto a las formas de verificar la naturaleza de las funciones y, más aún, en el esbozo de gráficas. Conviene destacar que esta información aún está siendo sometida a un análisis más exhaustivo, tomando en consideración la multiplicidad teórica asumida.

REFERENCIAS

- Arrieche, M. (2010). *Significados Personales e Institucionales del Objeto Matemático Función en la Formación de Profesores de Educación Integral*. Trabajo de Ascenso no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay
- Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (editor). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.
- Bachelard, G. (1987) *La formación del espíritu científico*. México: Editorial Siglo XXI.
- Bisquerra, R. (2009) *Metodología de la investigación educativa* (2ª edición). Ed. La Muralla S.A.
- Beyer, W. (1996). *Una Revisión Crítica a la Enseñanza del Concepto de Función*. Revista Paradigma. (Vol. XIV al XVII, 1993 – 1996). Maracay Venezuela
- Brousseau, G. (1989) *Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemática*. Recuperado 23 de Julio de 2015 de <http://fractus.mat.uson.mx/Papers/Brousseau/ObtaculoBrousseau.html>
- Cantoral, R. y Otros (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Trillas. México.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). *Significado Institucional y Personal de los Objetos matemáticos*. Recheches en didactique des Masthématiques, 14(3): 325 – 355.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). *Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. IX Seminario de investigación en Educación Matemática (SIEM) de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática, Guimares Portugal.
- González, F. (2013). Apuntes de investigación cualitativa. *Sapiens: Revista Universitaria de Investigación*, 4(1), 107-132. Recuperado 23 de Julio de 2015 de [http://www.academia.edu/11995359/APUNTES ACERCA DE ALGUNOS CONCEPTOS B%03%81SICOS DE LA INVESTIGACION CUALITATIVA](http://www.academia.edu/11995359/APUNTES_ACERCA_DE_ALGUNOS_CONCEPTOS_B%03%81SICOS_DE_LA_INVESTIGACION_CUALITATIVA)
- González, F. (2014) Procesos Cognitivos y Metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos. *ARJÉ Revista de Postgrado FACE-UC. Vol. 8 N° 14. Enero-Junio 2014. Edición Especial / 51-68*
- González, F. y Villegas, M. (2009). Cómo Elaborar Proyectos de Investigación en Educación Matemática. *Dialógica, Revista Multidisciplinaria*, 6 (1), 93-111.
- González, I. y Noguera, A. (2012) Teoría APOE: una perspectiva para la enseñanza de funciones en el nivel universitario. Trabajo de grado para optar al título de Especialista en Enseñanza de la Matemática de la UNEFM, no publicado
- González, E., González, Y. y Noguera, A. (2012) El Análisis de las funciones de variable real apoyado en asistente matemático. *Memorias de las 4tas Jornadas de Informática y Tecnología Educativa UNEFM*

Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática

ISBN: 978-980-7464-17-8

- Kú D., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20, 65-89.
- Radatz, H. (1980). *Student's Errors in the Mathematis Learning Process: A Survey. For the Learning of Mathematics*. Vol 1 (1)
- Ramos, A. (2005). *Objetos Personales, Matemáticos y Didácticos, del Profesorado y Cambios Institucionales: El Caso de la Contextualización de las Funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales*. Tesis de Doctoral, Universidad de Barcelona, España.
- Rodríguez, E. y Valdivé, C. (2011) Análisis Histórico de la Función Afín y la Ecuación Lineal en la Economía desde el Enfoque Ontosemiótico. TEACS, Año 4, Numero 08, Diciembre 2011. Recuperado 7 de Diciembre de 2015, de <http://www.ucla.edu/ve/dac/revistateacs/articulos/Rev8-Art2-RodriguezyOtros.pdf>
- Ruíz, L. y Rodriguez, J. (1989). *Epistemología Histórica del Concepto de Función*, Revista de Educación de la Universidad de Granada, No. 03, 135 – 154.
- Sánchez, L. (2010) Significados personales de las funciones en la formación inicial de Licenciados en Matemática. Trabajo de Grado para optar al título de Especialista en Enseñanza de la Matemática de la UNEFM. Coro, Venezuela. UNEFM
- Sastre, P., Rey, G. y Boubée, C. (2008). *El Concepto de Función a Través de la Historia*, UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática [Revista en línea], No. 16, 141–155. Recuperado 6 de Abril de 2015, de: http://www.fisem.org/descargas/16/Union_016_014.pdf
- Schoenfeld, A. (1985). Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical Understanding. En E. A. Silver (Ed.). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. 361-380.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition an Sense-Making in Mathematics. En D. Grows, Ed. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New york: MacMillan; Capítulo 15, pp 334-370
- Taylor, S. y Bodgan, R. (1986). *Introducción a los Métodos Cualitativos de Investigación*. España: Paidós.
- Trejo, L. y Noguera, A. (2012) Modelo Didáctico Comunicacional para la enseñanza de funciones en el pregrado. Trabajo de grado para optar al título de Especialista en Enseñanza de la Matemática de la UNEFM, no publicado
- Sierpinska, A. (1990). *Some remarks on understanding in mathematics. For the learning of Mathematics*, vol. 10, pp 24-36.
- Venturin, J. y Silva, A. (2014). A Postura Fenomenológica nas Pesquisas em Educação Matemática. I Simpósio Educação Matemática em Debate, Brasil. Recuperado en 18 Diciembre de 2014, de <http://www.revistas.udesc.br/index.php/matematica/article/view/4763/3447>. Wussing, H: *Historia de la Matemática*. MIR. Moscú, 1990