Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática
ISBN: 978-980-7464-17-8

CONVICCIONES Y CREENCIAS DEL MATEMÁTICO EXPERTO: APORTES Y REFLEXIONES PARA LA MATEMÁTICA ESCOLAR

Juan Carlos Sánchez Colmenárez
UPEL-IP Barquisimeto
jsanchezcolmenarez@gmail.com
Pensamiento Matemático Avanzado. Educación Universitaria

RESUMEN

En la conferencia pretendo disertar algunas ideas, cuestionamientos, intenciones y reflexiones respecto a la construcción y validación de la prueba matemática desde la mirada del matemático experto, todo ello, con el respaldo de evidencias teóricas y empíricas generadas por investigadores reconocidos nacionales e internacionales (Harel y Sowder, 1998; Weber y Alcock, 2004; Reid, 2005; Alcock y Weber, 2005; Hanna y Sidoli, 2007; Inglis, Mejías- Ramos y Simpson, 2007; Inglis y Mejías-Ramos, 2008; Colmenárez, 2008; Valdivé, 2013; Tall, 2002, 2004, 2013) en Educación Matemática y bajo la premisa que establece que mostrar a los estudiantes la matemática y sus implicaciones, requiere involucrarlos en un ambiente similar al de los matemáticos (Larios, 2015). En tal sentido, esta presentación me da la oportunidad de reunir teorías conceptualistas, psicolingüísticas y cognitivistas atinentes a la prueba matemática que considero más relevantes, con la intención de ilustrar una perspectiva intrínseca, personal y cognitiva que atañe a las convicciones y creencias que poseen el matemático experto de la matemática que genera. La cuestión responde a interrogantes que aducen que no es suficiente buscar interpretar lo que se piensa como didactísta de la prueba matemática, sino cómo deberíamos pensar sobre ella, dado que el problema no está en lo que se significa, sino en lo que hasta ahora hemos dejado ausente; en atención a este cuestionamiento, necesario es comprender ¿cómo concibe el artista su creación?, ¿Qué lo empuja a generar o incorporar nuevos relieves que permiten regular, robustecer, complejizar y adecuar su obra? y así dilucidar sobre lo que pienso, son planteamientos ricos e interesantes, pues ofrecen un marco referencial a partir del cual es posible validar o fundamentar futuras descripciones e interpretaciones de investigaciones cuyo objeto de estudio sea coadyuvar en la comprensión de la prueba matemática y su aporte a la matemática escolar.

Palabras clave: convicción y creencias, matemático experto y matemática escolar.

CONSIDERACIONES INICIALES

La didáctica de la matemática es una disciplina que comporta contantes cambios, debido -entre otras cosas- a la naturaleza y complejidad de sus objetos de estudio (Larios, 2006). Cuestión que ha auspiciado el emerger de incontables desafíos (Valdivé, 2013), que la han llevado a repensarse y redefinirse, en virtud del desplazamiento -bien sea- hacia el reconocimiento de nuevas problemáticas e inquietudes (Sierra, 2011), o hacia un nuevo accionar epistémico y metodológico (Sierpinska y Lerman, 1996), que a saber de Kilpatrick (1998) debe dar algunas respuestas a ciertas interrogantes, tales como: ¿qué tipo de conocimiento matemático debe tener el profesor? y ¿cómo debe combinar ese conocimiento con el conocimiento pedagógico?.

Ahora bien, esta actividad dinámica, evolutiva y cambiante que arropa el hacer científico en la didáctica de la matemática, se puede divisar en particular, en el interés por el estudio de las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje del único método de validación del conocimiento matemático, como lo es la prueba matemática, el cual ha tomado gran importancia y relevancia en las últimas décadas (Valdivé, ob. cit.).

Vastas son las investigaciones en educación matemática, que han ofrecido valiosos insumos en relación a la prueba matemática, mismas que se han desarrollado desde perspectivas diferentes, que incluyen aspectos históricos, epistemológicos, psicológicos, cognitivos, curriculares y didácticos (Harel y Sowder, 1998; Weber y Alcock, 2004; Reid, 2005; Alcock y Weber, 2005; Hanna y Sidoli, 2007; Inglis, Mejías- Ramos y Simpson, 2007; Inglis y Mejías-Ramos, 2008; Colmenárez, 2008; Valdivé, 2013; Tall, 2002, 2004, 2013), lo que da lugar a diversas clasificaciones, caracterizaciones o estructuras organizativas para la presentación de las principales corrientes investigativas en este campo (Fiallo, 2013). Reportes de investigación que han acrecentado de modo progresivo y contrastante los conocimientos acerca de los procesos didácticos atinentes a la prueba matemática, pero su estudio no se ha agotado en lo absoluto, aún quedan muchos problemas que no se han resueltos y muchas interrogantes sin responder en torno a su enseñanza y aprendizaje (Colmenárez, 2008).

Mi pretensión en esta participación -conferencia- es ofrecer insumos que coadyuven en el entendimiento de cuestiones que muestran una actividad de la prueba matemática, humanizada, personal, cognitiva desde el estudio de las creencias y convicciones del matemático experto que de luces para su enseñanza en la matemática escolar. Para ello, me sumerjo en el estudio de ciertas evidencias teóricas y empíricas sobre las cuales es posible extraer aportes que nos lleven a comprender desde una mirada más matizada ¿cómo concibe el artista su creación?, ¿Qué lo empuja a generar o incorporar nuevos relieves que permiten regular, robustecer, complejizar y adecuar su obra?

Asimismo, mi interés por el estudio de aspectos intrínsecos que yacen- a veces ocultos- en torno a la prueba, como lo son las creencias y convicciones de su artífice, está respaldada en las premisas que establecen:

(1) *saber lo que es una demostración no es suficiente para abordar el problema didáctico de su aprendizaje en clase (Fiallo, ob. cit.).*
(2) *el conocimiento de cómo los matemáticos obtienen convicción puede y debe contemplarse en los objetivos y métodos de enseñanza de la matemática (*Weber, Inglis y Mejia-Ramos, 2014*)*
(3) *la intención de mostrar a los estudiantes la matemática y sus implicaciones, requiere involucrarlos en un ambiente similar al de los matemáticos (Larios, 2015).*

ISBN: 978-980-7464-17-8

(4) *un objetivo central de la enseñanza de la matemática es que los estudiantes se convenzan a sí mismos y a otros de la veracidad de una afirmación utilizando el mismo tipo de evidencias que los matemáticos utilizan (Harel y Sowder, 2007).*

La primera de ellas, nos invitan -entre otras cosas- a seguir profundizando en el estudio didáctico de la prueba -en mi caso desde un punto de vista cognitivo y personal-, que nos pueda dar luces y nuevo entendimiento sobre el proceso de demostración que requiere hacer un estudiante a lo largo de su escolaridad y en la universidad (Tall, 2013; Valdivé, 2013).

El resto de las premisas, nos llevan a escudriñar sobre las acciones epistémicas del matemático experto envuelto en convenimientos y criterios que regulan los tipos de evidencias requeridas para convencer o persuadir sobre la verdad de una determinada conjetura, las cuales han sido establecido e implementadas desde el seno de la comunidad de matemáticos, rodeado de convicciones y creencias que demandan su estudio y aprovechamiento por parte del didactista en su intención de generar recorridos o rutas de enseñanza atinente a la prueba en la matemática escolar.

Con el ánimo de dilucidar sobre las consideraciones hasta ahora referidas, en lo sucesivo se destacan -sucintamente- algunos aspectos con la intención de ofrecer un marco que de pábulo a todo tipo de interpretaciones y permita que las piezas del complicado rompe cabeza que representa la actividad epistémica y didáctica respecto a la prueba matemática se pueden ir colocando en su sitio. La estructura del manuscrito lo he organizado en seis secciones relevantes, que lejos de mostrarse como grupos disjuntos, comportan ejes temáticos que se articulan estrechamente.

PRUEBA, CONJETURA, ARGUMENTO, CÁLCULO Y RAZONAMIENTO: diferencias que se solapan

Inicio esta caminata teórica conceptualizando ciertos términos fundamentales de referencia, que considero intervienen de manera notable en el estudio de las convicciones y creencias del matemático que subyacen en torno a la prueba, a través de las voces de investigadores de educación matemática, que desde sus aportaciones nos ofrecen significativos matices que revelan las diferencias existentes entre cada término, pero que a su vez nos muestran, cómo de manera armónica cada uno de ellos colabora en el desarrollo de la prueba.

Prueba Matemática

Emprender una aventura conceptualizadora de la prueba, ha sido fuente de inspiración de numerosos investigadores, que, reconociendo su incidencia en relación al conocimiento matemático, por ser el medio de validación y una parte epistemológicamente central que caracteriza a la Matemática -a diferencia de las ciencias fácticas- (Crespo, 2005; Larios, ob. cit.) los lleva a definirla y caracterizarla.

Una muestra de ello, se puede divisar en la compilación que asoma Larios (ob. cit.) de la definiciones de prueba propuesta por reconocidos investigadores, tales como: (1) **Bartolache**, es un exacto y bien ordenado discurso, empleando para ello otras proposiciones establecidas de antemano, hasta venir a caer de silogismo en silogismo a la tesis como en una consecuencia necesaria (2) **Hersh**, un argumento convincente, juzgado como tal por jueces calificados, (3) **Balacheff**, una explicación socialmente aceptada, pero que también tiene un status no definitivo y puede evolucionar a la par con la evolución del conocimiento en el que está basado.

Por su parte, Harel y Sowder (1998) estudian la dimensión personal o subjetiva de la prueba y la definen como un argumento que una persona utiliza para traducir una conjetura matemática en un hecho, argumento que a su vez, permite eliminar todas las dudas personales o para persuadir a otros que la conjetura es cierta.

De esta manera, la prueba se convierte en una parte medular del conocimiento matemático, en una componente epistemológica básica de validación científica, pues viene a ser la forma en que el matemático generaliza y abstrae resultados que de otra manera se quedarían a un nivel intuitivo, de conjetura (Larios, 2000). Generalización y abstracción que se construye desde lo interno, desde el propio mecanismo y funcionamiento que ostenta esta ciencia, es decir, su autosostenimiento se apoyado en las fórmulas previamente demostradas o convenidas.

Por mi parte, asumo una concepción de la prueba matemática desde la dimensión cognitiva, subjetiva y personal, donde es posible y necesario atender según Tall (2013) todos aquellos procesos previos de pensamiento matemático, en el cual el matemático se plantea conjeturas, realiza argumentaciones, explora caminos y desarrolla un conocimiento el cual probablemente no fue lo suficientemente riguroso -desde el punto de vista científico-, pero quizá haya sido más importante dicho proceso que la precisión matemática obtenida. Dimensión cognitiva de la prueba que a saber de Valdivé (2013) es ideada como un proceso cognitivo que "involucra otros procesos de pensamiento (abstracción, análisis, conjeturación, entre otros), que se activan en la mente cuando se afronta una tarea de demostración" (p. 9).

<u>Conjetura</u>

Reseñamos a continuación lo concerniente al estudio de la conjetura, encausado en aquellos planteamientos que en correspondencia con mis inquietudes, presentan a la conjetura desde un plano cognoscitivo, que lo ubica como un proceso de pensamiento dibujado desde suposiciones que permiten proyectar hechos matemáticos hacia el futuro o nos proporcionan una explicación de lo que ocurre.

ISBN: 978-980-7464-17-8

En sintonía con lo descrito previamente, preciso lo expuesto por Goizueta (2015) quien concibe la conjetura matemática como una hipótesis que avanza y aún no tiene estatus de teorema, expresando además, que la misma puede estar en el origen de la exploración de una inquietud o problemática, como detonante, o puede ser una de sus instancias. De allí, la conjetura se puede apreciar como la intuición de que un fenómeno matemático ocurre (Larios, 2000).

Desde esta concepción, las conjeturas se convierten en parte esenciales del desarrollo histórico de las ideas matemáticas, pues han resultado ser un paso necesario en el proceso de formalización y axiomatización de esta ciencia, a ser las afirmaciones que pretenden ser verificadas. Según Baccaglini-Frank y Mariotti (2009) cada uno de los resultados formales que constituyen parte del corpus científico del conocimiento matemático, le preceden meses de trabajo, de investigación, de conjeturaciones. Más particularmente, en la validación matemática y epistemológica del conocimiento matemático, el uso de la conjetura es indispensable, pues, finalmente, si el sujeto no conjetura, ¿entonces qué valida? (Larios, ob. cit).

En relación a la prueba matemática, significativo aludir que en el paso de la argumentación a la demostración las conjeturas juegan un papel preponderante, tal como lo expresan Marmolejo y Moreno (2011) a referir que "la conjetura es el objetivo de la argumentación preformal, e inicio del proceso demostrativo, es pues el punto de inflexión que explica la unidad cognitiva Argumentar–Conjeturar–Demostrar" (p. 511), es decir, se valida individualmente a través de argumentos y observaciones, para después realizar la construcción de la prueba. Cuando este último paso ha sido realizado, entonces la afirmación que inicialmente era una conjetura se ha convertido en un teorema (Marmolejo y Moreno, ob. cit).

Argumento

Continuando con la conceptualización de ciertos términos, corresponde ahora el turno de la argumentación, entendida por Crespo (2005) como "una interacción lingüística compleja capaz de cumplir, entre otras funciones, la de dar cuenta y razón de algo ante alguien en un marco de discurso" (p. 30). Ideas que sitúan al argumento dentro de un proceso interactivo y dinámico en el que caben diferentes formas de comunicación, inducción y modificación de mensajes discursivos.

Por su parte Goizueta (2015), refiere que la argumentación "es el proceso por el cual una persona intenta persuadir a un oyente o auditorio acerca de alguna cuestión bien definida, aportando para ello elementos que justifican su posición" (p. 46). Planteamiento que revela otro matiz que caracteriza al argumento como lo es su intención de persuasión.

Asimismo, el autor precitado complementa la definición previa aludiendo que en la argumentación el matemático ofrece razones para justificar o criticar su posición o las de otros con la intención de convencer, es decir, "para modificar positiva o negativamente el valor epistémico de distintas posiciones" (Goizueta, ob. cit., p. 48)

Ahora bien, acercando y relacionando este proceso lingüístico, cognitivo y dialógico que envuelve al argumento con la prueba, oportuno citar lo expuesto por Duval (citado en Crespo, ob. cit.) quien aduce que una argumentación trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición. Cabe destacar, que los argumentos no necesitan responder a criterios de validez, ya que sólo busca lograr la credibilidad o el convencimiento del interlocutor o de sí mismo, tal como sostiene Crespo (ob. cit.) "es posible argumentar sobre proposiciones falsas, en ella sólo se busca convencer al otro. Las argumentaciones se encuentran más cerca de las prácticas discursivas espontáneas y su lógica busca la coherencia, más que la validez lógica" (p. 36).

De lo expuesto hasta ahora, se puede apreciar las diversas funciones que le atañen a la argumentación -de justificación, de reflexión, de convicción y persuasión-. Funciones que condicionan la actividad epistémica del matemático, dado que, entre más fuertes y pertinentes son los argumentos, generan más convicción y adhesión a favor de la afirmación que justifican o en contra de la que refutan (Crespo, ob. cit.).

Razonamiento

En lo tocante al razonamiento, refiero en la presente, la definición propuesta por Balacheff y Duval (citados en Crespo, ob. cit). El primero de ellos indica que un razonamiento es "la actividad intelectual de manipulación de informaciones para obtener nuevas informaciones a partir de otras dadas" (p. 32). Mientras que Duval concibe el razonamiento como un proceso vinculado con la explicación en el que se dan razones con la finalidad de comunicar su fuerza de argumento a las afirmaciones que se deben justificar.

De lo anterior se puede apreciar cómo el razonamiento proporciona un modo potente que nos lleva a desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos. Ahora bien, esa amplitud de formas que desde el razonamiento auspicia el conocimiento -en nuestro caso matemático- comporta un accionar epistémico diverso que está ligado a la dicotomía: inductivo-deductivo. Es decir, se nos presenta una actividad matemática no del todo supeditado en acciones epistémica guiada por un razonamiento deductivo expresados en un lenguaje formalizado, sino también, desde un proceder que matiza y articula lo empírico, lo deductivo y lo autoritario (Weber, Inglis y Mejia-Ramos, 2014), como explicitaremos más adelante.

Cálculo

Las actividades de cálculo a la cual me refiero en el documento, son aquellas que adscritas a un proceder empírico-inductivo, configuran un accionar epistémico de dar respuesta a

ISBN: 978-980-7464-17-8

ciertas situaciones -garantizar la verdad o simplemente ganar convicción- mediante ejemplos particulares.

Actividad que no es del todo acogida por la comunidad matemática, los motivos de esta posición son variados, pero el de mayor peso, refiere a que la verificación asistida mediante cálculos -determinada por la comprobación de un considerable número de ejemplos- no es una forma aceptable de prueba. Es ampliamente consentido que las evidencias prácticas -de cálculo- son limitadas y no garantizan la certeza de una afirmación en el contexto matemático (Weber, Inglis y Mejia-Ramos, ob. cit.), sin embargo, Paseau (citado en Weber, Inglis y Mejia-Ramos, ob. cit) hizo hincapié que esto no implica que los matemáticos no aumenten su convicción a través de este razonamiento particular, concreto, externo e informal.

Este acercamiento tenue y reducido respecto a la conceptualización de ***la prueba, la conjetura, el argumento, el razonamiento y el cálculo***, ofrece algunas pinceladas que develan diferencias entre ellos, pero a su vez nos llevan a reflexionar sobre la importancia y participación de cada término, en actividades epistémicas que consolidan creencias y convicciones –en nuestro caso del matemático- que intervienen en el desarrollo de la prueba.

Siguiendo este viaje epistémico, que explora un conocimiento tácito, interno y cognitivo en torno a la prueba, presento a continuación las aportaciones de David Tall quién sitúa a la prueba como un proceso que yace en lo que denominó los tres mundos de la matemática.

LA PRUEBA MATEMÁTICA Y LOS MUNDOS DE LA MATEMÁTICA: un acercamiento cognitivista de la Prueba Matemática según David Tall

Las líneas que siguen, las dedico para la descripción e interpretación de cómo Tall idealizó el desarrollo cognitivo de la prueba en el individuo, recurriendo para ello, de un discurso metafórico, que nos lleva por un viaje, una aventura hacia lo que él denominó los ***tres mundos de la matemática***, donde es posible retroceder y activar procesos de regulación (idea piagetiana) y de autocomprensión, pero más aún, en este viaje se registra un proceso evolutivo de la prueba, que asistido de los *esquemas conceptuales* que se ostenten, puede materializar una prueba con diversos estándares de verdad.

Los mundos a los que Tall hace referencia son: ***El Embodied, El proceptual y el Formal***, cada uno de los cuales alberga un pensamiento matemático que se dibuja desde diferentes elementos de convicción y criterios para la creencia y la verdad. El primer mundo nace de nuestra capacidad sensorial de reconocer, al ver patrones, similitudes y diferencias que expresamos en lenguaje para categorizar objetos, esto es, refiere a los pensamiento de las cosas que percibimos desde los sentidos, no sólo en el mundo físico, sino también atiende a nuestras concepciones internas que implican las imaginerías -visuo-espacial- de nuestro propio mundo mental (Tall, 2004, 2013).

El segundo mundo se basa en nuestra capacidad motriz para la repetición que nos permite ejercer secuencias de acciones hasta que podamos realizarlas de forma automática como operaciones secuenciales con poco esfuerzo consciente. Este mundo está constituido por los símbolos que utilizamos para el cálculo y la manipulación aritmética, algebraica, el cálculo y así sucesivamente, donde no sólo se especifican las operaciones que se pueden realizar con ellos, sino que, además, operan como entidades mentales que ellos mismos pueden realizar, es decir, con el tiempo el uso de la manipulación de símbolos puede dar lugar a una forma de realización conceptual significativa (Ibíd.).

El tercer y último mundo se basa en las propiedades, expresada en términos de definiciones formales y que son utilizadas como axiomas para especificar las estructuras matemáticas (Ibíd.).

Validez y Verdad en los Mundos de las Matemáticas

Para Tall (2002) los diferentes mundos de las matemáticas, comportan diferentes formas de operar, que a su vez afloran diversos estándares de validez y verdad, de allí, la prueba es caracterizada de la siguiente manera:

- ***Prueba Embodied*** *que se construye a partir de nuestra interacción con el mundo exterior soportada a través de nuestros sentidos y que alcanza un desarrollo sofisticado por medio del lenguaje y la interacción humana para abarcar sutiles argumentos sobre los modelos del mundo, tales como la geometría euclidiana.*
- ***Prueba Proceptual*** *que refiere al uso de los símbolos en la aritmética y el álgebra (y la teoría más amplia de procepts en los que operan los símbolos dualmente como proceso y concepto) en un enunciado que puede probarse a través del cálculo y la manipulación.*
- ***Prueba formal*** *es construida por deducción formal por parte de los axiomas y las definiciones de conceptos para la construcción de sistemas matemáticos coherente.*

Cabe destacar que según Tall (2002) la prueba -pináculo de la matemática formal-, no se logra por medios formales, sino que se va desarrollando y configurando dependiendo los esquemas conceptuales del individuo -estructura cognitiva asociada con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y procesos- en relación al pensamiento matemático. El autor precitado reseña que el esquema conceptual -concept image- se utiliza para imaginarse experimentos mentales, concebir posibles definiciones y teoremas que podrían derivarse de esas definiciones, lo que revela una potencial vía de la intuición a la formulación de teoremas desde la prueba formal.

ISBN: 978-980-7464-17-8

CREENCIAS Y CONVICCIONES: posturas, similitudes y diferencias

Continuando con esta caminata teórica, situamos en esta oportunidad las aportaciones que presentan investigadores de Educación Matemática sobre las temáticas que intitulan la conferencia. Para ello, considero necesario precisar de entrada, cómo conceptualizan -los investigadores- las creencias y convicciones, para luego revelar -mediante este acercamiento teórico asumido como temporal, evolutivo, personal y cognitivo- cuáles son las creencias y convicciones del matemático que subyace en torno a la prueba.

La conceptualización de la creencia y convicciones la presento mediado por una matriz la cual recoge algunas ideas relevantes sugerida por ciertos investigadores.

Tabla Nro. 1: Conceptualización de la Creencia y Convicciones, según varios investigadores

Creencias		**Convicciones**	
Autor	**Ideas Relevantes**	**Autor**	**Ideas Relevantes**
Bohórquez (2014)	La creencia proviene del latín *credére* y significa: tener por cierto una cosa que el entendimiento no alcanza o que no está comprobada o demostrada	Harel y Sowder (2007)	Entendido como el proceso individual para remover las propias dudas acerca de la verdad de una aserción (convencerse a uno mismo)
Martínez (2013)	La creencia es creada por la mente de los sujetos y supone una adhesión a una idea.	D'Amore y Fandiño (2004)	Las convicciones forman parte importante del conjunto de conocimientos, dado que los determinan y los condicionan.
Callejo y Vila (2004)	Las creencias pueden mantener ciertos grados de convicción y no siempre son fruto de un consenso, por lo que no requieren satisfacer criterios de verdad.	Schoenfeld (1992)	Afirma que cada individuo conceptualiza la matemática y se ubica en el ambiente matemático precisamente sobre la base del sistema de sus propias convicciones sobre la matemática
Moreno y Azcárate (2003)	Las creencias son conocimientos subjetivos, poco elaborados, los cuales son generados a nivel particular por cada sujeto a fin de explicar y justificar muchas de sus decisiones y actuaciones personales y profesionales.	Hoyles (1992)	Las convicciones son el resultado de complejas interacciones entre grupos sociales

Fuente: propia

Se puede apreciar en el cuadro anterior como las convicciones y creencias dimanan variadas fuentes de conocimiento -tácito- que suponen una adhesión a un pensamiento, a verdades personales incontrovertibles que son idiosincrásicas (creencias), las cuales ostentan cierto grado de seguridad (convicción). Mismas que según Fischbein (citado en Fiallo, ob. cit.) se soportan -cohabitan- en la intuición y/o la deducción y juegan un papel preponderante en la construcción del conocimiento matemático. Además son consideradas "axiomas o principios rectores que forman parte del conocimiento intersubjetivo" (Martínez, 2013, p. 234)

Ahora bien, en esta mirada intrínseca, cognitiva y personal de la prueba ¿dónde se alojan las convicciones y creencias del matemático?. En las últimas décadas ha habido un acentuado interés en la comunidad de matemáticos y educadores matemáticos, en estudiar la actividad epistémica que rodea a la prueba, lo que ha suscitado el emerger de una variedad de constructo, en alguno de cuales, es posible identificar el habita de las convicciones y las creencias del matemático, entre ellos destacan:

- ***Orden de verdad (Tall, 2002):***

Una noción de validez asumido por Tall que permite respaldar creencias y afianzar convicciones es el orden de verdad definida como "lo que asegura el conocimiento" (Tall, 2002, p. 97). Noción que lleva a Tall (2002) a reconocer que la prueba -idea central del mundo formal- tiene manifestaciones anteriores en los mundos embodied y de proceptos, cada uno de los cuales tiene una noción distinta de validez.

Tall distingue tres formas de convicción que se apoyan unas desde la percepción y otras en lo formal, y que revela a su vez, un orden de verdad diferente para cada mundo, por ejemplo en el: **embodied** utiliza un modelo que nos permita "ver" la verdad de la declaración -el orden de verdad comienza a través de la percepción física-; **proceptual** la verdad se puede comprobar mediante cálculo y la manipulación de símbolos, también nos permite dar respuestas a los problemas mediante el uso de métodos algebraicos de manipulación para producir una solución y en el **formal** utiliza una prueba deductiva formal. Actividad epistémica que se mueve en un contexto –matemático- cargado de ideas y enunciado que reclaman una validez desde la percepción y lo formal reconocida por la mayoría de los matemáticos.

- ***Objetivos epistémicos (Chinn, Buckland y Samarapungavan, citado en Weber, Inglis y Mejia-Ramos, 2014):***

Otro de los constructos donde reposan las convicciones y creencias del matemático son los *objetivos epistémicos* que proponen Chinn, Buckland y Samarapungavan los cuales están definido como "objetivos relacionados a la búsqueda de las cosas, entenderlas y formar creencias" (Chinn, Buckland y Samarapungavan citado en Weber, Inglis y Mejia-Ramos, ob. cit., p. 146). La noción de *objetivos epistémicos* pretende -entre otras cosas- estudiar cómo los matemáticos interactúan unos con otros, incluyendo la búsqueda y la transmisión de la información. Algunos ejemplos de *objetivos epistémicos* son: convencerse de que una afirmación matemática es verdadera, ensanchar la comprensión de las matemáticas detrás de la afirmación matemática, entre otros.

ISBN: 978-980-7464-17-8

- ***Esquemas de Prueba (Harel y Sowder, 1998)***

Harel y Sowder proponen la noción de *esquema de prueba* como una herramienta para analizar las formas de convicción o persuasión del sujeto en relación a una conjetura; es decir, alude a los argumentos que se utilizan -en nuestro caso por el matemático- para eliminar todas las dudas personales o para persuadir a otros que la conjetura es cierta (Harel y Sowder, 1998). Dichos autores caracterizan los esquemas en siete tipos agrupados en tres categorías: esquemas de convicción externa (ritual, simbólico o autoritario), esquemas empíricos (inductivos o perceptuales) y esquemas analíticos (transformacionales o axiomáticos).

Cada uno de estos mecanismos o herramientas -***orden de verdad, objetivos epistémicos, esquemas de prueba***- que soportan y regulan la validación de conjeturas, se comportan como una acción personal, idiosincrásicas, temporal–evolucionan debido a la refinación de los procesos cognitivos intervinientes y del propio conocimiento matemático- y son acogidos por los matemáticos dependiendo sus limitaciones o requerimientos, que luego cristalizan en un saber reflejado desde la prueba deductiva formal.

DICOTOMÍA TEORÍA-PRÁTICA: sus implicaciones en la enseñanza de la prueba matemática

En este apartado destaco -sucintamente- algunos aspectos que atañen a la relación -a veces de confrontación e enemistad- entre la teoría y la práctica, y cómo ella ha incidido en la enseñanza de la prueba en la matemática escolar.

En tal sentido, esta presentación me da la oportunidad de elucidar sobre los profundos y escabrosos problemas que suscitan en la enseñanza de la prueba en atención a un marco curricular acogido en los diversos subsistemas educativos que ha dado prominencia a la enseñanza de la matemática, o bien, desde un conocimiento teorizado que muestra la matemática desde una visión externa, rigurosa, acabada, lineal, estática, abstracta, intocable (solo actas para mentes prodigiosas), dando así, privilegio a un aprendizaje memorístico -ejemplo de ello, las matemáticas modernas de los años sesentas y setentas que dio realce dentro de los programas a la teoría de conjuntos y al método axiomático (Kilpatrick, 1998)-; o por el contrario, promueve un conocimiento práctica que a desmedro de lo teórico, pretende darle mayor atención a la aplicabilidad de la matemática, enfatizando la construcción de modelos matemáticos para el análisis de problemas de la vida real (Kilpatrick, ob. cit.).

Esta dicotomización curricular establecida entre la teoría y la práctica -que algunos currículos pretenden disfrazar- enloda el proceder didáctico en torno a la prueba, pues desvirtúa los propósitos y alcances pretendidos -por el matemático- en esta actividad epistémica. Una praxis educativa que se dibujada mediante una posición netamente teorizada de la matemática, promueve una enseñanza de la prueba memorística, soportada desde un razonamiento autoritario - avalada por alguna autoridad como el profesor o un libro de texto- a espalda de la reflexión y la inventiva. Contrariamente, aquella configurada dando exclusividad a una matemática práctica y aplicada que traslapa lo teórico, estiliza una enseñanza de la prueba mediada por un razonamiento empírico, que puede propiciar conclusiones erráticas y carentes de rigurosidad.

En contraposición con esta visión curricular de la enseñanza de la matemática con supuestos simplistas, reduccionistas y solapados entre lo teórico y lo práctico -que representa una máscara para la desunión, la contradicción y la mala interpretación-, se requiere una normativa preocupada en atenuar estas discontinuidades, que engrane verdaderamente lo teórico-práctico y pincele un panorama que exhiba la enseñanza de la prueba: (1) con acciones epistémicas que se alinean con las del matemático (Weber, Inglis y Mejia-Ramos, ob. cit.) y (2) que vehicule un proceder no sólo garante de la certeza de una proposición, sino además centra su mirada en estudiar las creencias y convicción que subyacen en el proceso, incorporando así, recorridos didácticos que desde un proceder evolutivo abra puertas a la creatividad, a la intuición, a lo empírico y deductivo (Harel y Sowder, 1998, Tall, 2002).

EN SUMA

Este recorrido teórico que estiliza el estudio de las creencias y convicciones del matemático experto y que sitúa a la prueba con un matiz intrínseco, personal y cognitivo, revela lo siguiente:

- El hecho de que los matemáticos asuman que la forma más expedita para garantizar la verdad de una proposición es desde acciones epistémicas deductivas –les ofrece certeza y comprensión-, ello no niega la posible dependencia y frecuencia de los matemáticos de recurrir a otras fuentes -*autoritarias y empíricas*- para obtener convicción (Weber, Inglis y Mejia-Ramos, ob. cit.). En tal sentido, la matemática escolar debería proveer de recursos de instrucción que sitúen a la prueba mediante una visión matizada, que muestre una actividad epistémica que reconoce, fusiona y equilibra las fuentes *empíricas*, *deductivas* y *autoritarias*, el cual deje ver las fortalezas y limitaciones de cada una de ellas, y brinde a los estudiantes la oportunidad de generar una comprensión sustancial de las matemáticas.
- La prueba, idea central del mundo formal, tiene manifestaciones anteriores en el mundo embodied y de proceptos, y arrastra un proceso de desarrollo cognitivo largo y complejo, que se va refinando desde diferentes *orden de verdad* situados en los mundos de las matemáticas -muchos de los cuales se apoyan en argumentos que el matemático reconoce pero no le asigna el estatus de prueba- y que ofrece un enfoque alternativo que

ISBN: 978-980-7464-17-8

abarca nociones más amplias de validez que pueden ser utilizados por los estudiantes para adquirir convicción y justificar sus creencias (Tall, 2002).

- Los esquemas prueba que pueden considerarse como direccionador y regulador de la actividad epistémica dentro de la matemática (Harel y Sowder, 1998) tiene una naturaleza *idiosincrásica y particular*, que puede variar de una persona a otra, de una cultura a otra, de una generación a otra, incluso dentro de las matemáticas. Esta visión del esquema de prueba -sumida a las creencias- ha sido utilizada o adaptada por algunos investigadores para proponer modelos para el estudio de la prueba en la matemática escolar (Ibañes y Ortega, 2010; Fiallo, 2010, 2013; Antonini y Mariotti, 2008).
- La matemática escolar debería valorar no solo que el estudiante garantice la certeza de una proposición sino además centrar su mirada en estudiar cómo los estudiantes buscaron y alcanzan convicción en este escenario epistémico (Harel y Sowder, 1998).
- La prueba en la matemática escolar debería ser asistida por un currículo que integre verdaderamente el conocimiento *teoría-práctica* propio de la matemática, que permita generar actividades didácticas configuradas en alentar un accionar epistémico que: (1) conjuguen lo intuitivo, empírico y deductivo; (2) reconociendo un proceso evolutivo, fragüe tareas de prueba desde evidencias que parten de la intuición en un momento dado y llegan luego a alinearse con las del matemático desde un proceder deductivo y (3) centre su mirada en estudiar las creencias y convicción que subyacen en el proceso prueba, que logre equiparar las del estudiante con las del matemático.

REFERENCIAS

Alcock y Weber (2005). 'Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants'. *Journal of Mathematical Behavior* 24, 125–134.

Antonini, S. y Mariotti, M.A. (2008). "Indirect proof: what is specific to this way of proving?" ZDM the International Journal on Mathematics Education 40, 401–412.

Baccaglini-Frank, A. y Mariotti, M. (2009). The meaning of proof in mathematics education. Working Group 2 Argumentation and proof. CERME 6. pp. 458-468.

Bohórquez, L. (2014). Las creencias vs las concepciones de los profesores de matemáticas y sus cambios. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Buenos Aires: Argentina.

Callejo, M. y Vila, A. (2003). Origen y formación de las creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria, Boletín de la Asociación matemática Venezolana. 10 (2), pp. 173-194,

Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo*. Trabajo de Grado no publicado.

Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

Colmenárez, D. (2008). Errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de la demostración matemática. Tesis doctoral, UCLA-UNEXPO-UPEL Barquisimeto, Venezuela.

D'Amore, B. y Fandiño, P. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. Espilon. [Cádiz, Spagna]. 58, 20, 1, 25-43.

Fiallo, J. (2010). Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica, Tesis doctoral, Universidad de Valencia, Valencia-España.

Fiallo, J.; Camargo, L. y Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. Revista Integración. Vol. 31, No. 2, pp. 181–205.

Goizueta, M. (2015). Aspectos Epistemológicos de la Argumentación en el Aula de Matemática. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Hanna y Sidoli (2007). 'Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives'. ZDM *Mathematics Education* 39, 73–78.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). 'Students' proof schemes: Results from exploratory studies'. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld and J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, III*, (234–283). American Mathematical Society, Providence, RI.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Collegue Instructor` Views of Students Vis-a-Vis Proof. In Despina Stylianou (ed). *Teaching and Learning Prof Across the Grades*. (pp. 275-289). Madison Avenue New York: by Routledge.

Hoyles C. (1992). Mathematics teaching and mathematics teachers: a meta-case study. For the learning of mathematics. 12, 3, 32-44.

Inglis, M. y J. P. Mejía-Ramos (2008). 'How persuaded are you? A typology of responses'. *Research in Mathematics Education* 10.

Inglis, Mejía-Ramos, y Simpson (2007). 'Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification'. *Educational Studies in Mathematics* 66, 3–21.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2010). "Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato", Enseñanza de las Ciencias 21, Nro. 1, pp. 49–63.

Kilpatrick, J. (1998). Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En Kilpatrick, J.; Gómez, P. y Rico, L. (Eds.) Educación Matemática Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas Evaluación Historia. Bogotá: Empresa Docente.

Larios, V. (2000). Las conjeturas en los Procesos de Validación Matemática. Un estudio sobre su Papel en los Procesos relacionados con la Educación Matemática. Querétaro, Qro., México la URL de la página es http://www.geocities.ws/discendi2/tm/tm04.html [consultado: 22/02/2016]

Larios V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. Revista Relime, vol. 9, Núm. 3, pp.361-382.

Larios, V. (2015). La construcción continua de la demostración como medio para enseñar y aprender a validar matemáticamente. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática (XIV CIAEM-IACME). Chiapas, México.

Martínez O. (2013). Las creencias en la educación matemática. Revista EDUCERE - Artículo arbitrado, Año 17, Nº 57, pp. 231 – 239.

Marmolejo, E. y Moreno, G. (2011). Argumentar-Conjeturar: Introducción a la Demostración. Acta Latiniamericana de Matemática Educativa 24, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). pp. 509-516.

Moreno, M. y Azcárate, G. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Enseñanza de las Ciencias, 21(2): 265-280

Reid, D. (2005). The meaning of proof in mathematics education. Working Group 4 Argumentation and proof. CERME 4. pp. 458-468.

Schoenfeld A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En: Grows A.D. (Ed.) (1992). Handbook of research on mathematics learning and teaching. (334-370). New York: MacMillan.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education, pp. 827-876.

Sierra, M. (2011). Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, método y difusión. Revista Educatio Siglo XXI, Vol. 29 Nº 2, pp. 173-198.

Tall, D. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand, 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 4, 281–288.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically*. Cambridge: Cambridge University Press.

Valdivé, C. y Garbin, S. (2013). ¿Cómo piensan los estudiantes el infinitesimal antes de iniciar un curso de análisis matemático?. *Paradigma* XXXIV(1), 117-146.

Weber y Alcock (2004). 'Semantic and syntactic proof productions'. Educational Studies in Mathematics 56, 209–234.

Weber, K.; Inglis, M. y Mejia-Ramos (2014). How Mathematicians Obtain Conviction: Implications for Mathematics Instruction and Research on Epistemic Cognition. Article in Educational Psychologist. 49(1), pp. 1-74.