

CONOCIMIENTO EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES ESPAÑOLES DE MAGISTERIO EN TEDS-M

MATHEMATICS PEDAGOGY KNOWLEDGE OF SPANISH PRIMARY FUTURE TEACHERS IN TEDS-M

Araceli Gutiérrez¹, Pedro Gómez², Luis Rico¹

¹Universidad de Granada, ²Universidad de los Andes

En este trabajo presentamos el método con el que describimos el conocimiento que estudiantes españoles de la diplomatura de magisterio, futuros profesores de primaria, manifestaron en el estudio TEDS-M sobre Didáctica de la Matemática. Ejemplificamos dicho método mediante el análisis de una pregunta del subdominio de números relativa a la dificultad en la resolución de problemas aritméticos para alumnos de primaria.

Términos clave: Conocimiento didáctico del contenido; Didáctica de la Matemática; Educación primaria; Formación inicial de maestros; Problemas aritméticos escolares; TEDS-M.

In this paper we present the method by which we describe the mathematics pedagogy knowledge on the number subdomain shown by the primary Spanish future teachers in TEDS-M. We illustrate this method by analyzing a question of the numbers subdomain about the difficulty in solving arithmetic problems for primary students.

Keywords: Mathematics Pedagogy; Pedagogical content knowledge; Pre-service teacher education; Primary; School arithmetic problems; TEDS-M.

Este trabajo se enmarca en la participación española en el estudio TEDS-M (Rico, Gómez, y Cañadas, 2009). El TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics) es un estudio internacional comparativo sobre los planes de formación inicial y sobre los conocimientos que los futuros profesores de primaria y secundaria obligatoria debieran conseguir durante su preparación como profesores de matemáticas. Diversas razones determinaron evaluar en este primer estudio sólo la formación inicial del profesorado español de primaria. España participó con 48 instituciones —cada una con un plan de estudios propio—, 574 formadores y 1263 futuros profesores (Gómez, 2007). Los datos se recogieron durante el año 2008. Los equipos nacionales de algunos países han llevado a cabo publicaciones parciales del estudio. (p. ej., Blömeke, Kaiser, y Lehmann, 2010). El informe español se encuentra en fase de edición y está previsto que se publique en breve. Se conocen las medias de los conocimientos de los futuros profesores en matemáticas y Didáctica de la Matemática y se han establecido dos puntos de anclaje para el conocimiento matemático y un punto de anclaje para el conocimiento en Didáctica de la Matemática. No obstante, no hay, por el momento, análisis secundarios

de los resultados de TEDS-M que profundicen en los conocimientos de los futuros profesores en los diferentes dominios y subdominios. Nuestro objetivo es realizar un estudio de este tipo que permita describir e interpretar con mayor detalle los resultados de los futuros profesores españoles. En este trabajo presentamos la aproximación metodológica que pensamos utilizar para describir el conocimiento en Didáctica de la Matemática que los futuros profesores españoles manifestaron en el subdominio de números.

Preguntas en Didáctica de la Matemática

Uno de los temas de investigación de TEDS-M se refería al nivel y profundidad del conocimiento de los futuros profesores en Didáctica de la Matemática. De las 70 preguntas del cuestionario de los futuros profesores que evaluaban sus conocimientos, 34 correspondían a este campo. Estas preguntas se clasificaron de acuerdo con los cuatro criterios que se muestran en la tabla 1: dificultad, dominio conceptual del contenido, dominio del conocimiento pedagógico y tipo de respuesta.

Tabla 1
Clasificación de preguntas sobre conocimiento en Didáctica de la Matemática

Dificultad			
Novel	Intermedio	Avanzado	
Dominio conceptual del contenido			
Números	Geometría	Álgebra	Datos
Dominio del conocimiento pedagógico			
Currículo	Aplicación	Planificación	
Tipo de respuesta			
Opción múltiple	Opción múltiple compleja	Abierta	

Objetivo y método

El trabajo que presentamos en este documento forma parte de un estudio más amplio en el que pretendemos describir el conocimiento que los futuros profesores de primaria españoles manifestaron en el estudio TEDS-M sobre Didáctica de la Matemática en el subdominio de números y comparar este conocimiento con el de los estudiantes del resto de países que participaron en el estudio. El método que vamos a seguir para describir e interpretar los conocimientos que los futuros profesores españoles manifestaron al responder a una pregunta implica varios pasos, que describimos a continuación.

1. Análisis de los requerimientos de la pregunta. En este paso, establecemos el conocimiento en Didáctica de la Matemática necesario para responder correctamente a la pregunta.

2. *Análisis de las guías de corrección.* En este paso formulamos conjeturas sobre el conocimiento que los futuros profesores pudieron poner en juego para contestar de forma parcialmente correcta a la pregunta.

3. *Interpretación de los resultados.* Con base en la información anterior, formulamos una interpretación de los resultados obtenidos por los futuros profesores españoles en la pregunta.

4. *Interpretación de los resultados españoles para el subdominio de números.* Con base en la interpretación de los resultados de todas las preguntas, formulamos una interpretación de los conocimientos que los futuros profesores españoles manifiestan para el subdominio.

5. *Comparación con los resultados internacionales.* La información que obtengamos permitirá comparar los resultados españoles con los del resto de países que participaron en el estudio.

En este documento ejemplificamos los pasos 1, 2 y 3 con una pregunta sobre problemas aritméticos que presentamos en la figura 1.

<p>Una profesora de 1º de primaria pide a sus alumnos que resuelvan los cuatro problemas contextualizados siguientes, de la forma que ellos quieran, incluso usando materiales si lo desean.</p> <p>Problema 1: José tiene 3 paquetes de pegatinas. Hay 6 pegatinas en cada paquete. ¿Cuántas pegatinas tiene José en total?</p> <p>Problema 2: Jorge tenía 5 peces en su pecera. Le dieron 7 más en su cumpleaños. ¿Cuántos peces tenía después?</p> <p>Problema 3: Juan tenía algunos coches de juguete. Perdió 7 coches de juguete. Ahora le quedan 4. ¿Cuántos coches de juguete tenía Juan antes de perder ninguno?</p> <p>Problema 4: María tenía 13 globos. 5 de ellos se le reventaron. ¿Cuántos globos le quedaron?</p> <p>La profesora se percata de que dos de los problemas son más difíciles para sus alumnos que los otros dos.</p> <p>Identifique los DOS problemas que presumiblemente son más DIFÍCILES de resolver para alumnos de 1º de primaria</p> <p>Problema _____ y Problema _____</p>
--

Figura 1. Pregunta a analizar

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre el grado de dificultad en la resolución de problemas verbales, donde entran en juego las operaciones aritméticas de adición, sustracción y multiplicación. TEDS-M clasifica esta pregunta dentro del dominio de currículo y la considera de nivel avanzado; es de respuesta abierta y tiene guía de corrección para clasificar las posibles respuestas.

Dar solución a esta pregunta supone asumir un marco determinado sobre el aprendizaje de la aritmética. El aislamiento de determinantes clave de la dificultad de los problemas ha sido tema de investigación en resolución de problemas a nivel internacional (Castro, 2008). Nos basamos en la clasificación de las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos propuesta por Castro, Rico y Castro (1995). Estas variables no agotan todas las posibles variables que se pueden tener en cuenta a la hora de determinar la dificultad de un problema. No obstante, consideramos que son suficientes para determinar los dos problemas que presentan mayor dificultad. También nos basamos en Castro (2001); Castro, Rico y Gil (1992), y Puig y Cerdán (1988) para el análisis de los tipos de problemas de estructura aditiva y multiplicativa.

Analizamos cada uno de los cuatro problemas que se presentan en la pregunta de acuerdo con las siguientes variables: (a) estructura, (b) estructura semántica, (c) tamaño de los datos, (d) contexto de la información, (e) orden de los datos, (f) existencia de datos superfluos, (g) posición de la pregunta; (h) tipo de sentencia e (i) si se puede resolver o no el problema con ayuda de recursos auxiliares.

En los cuatro problemas, el sentido de la pregunta se integra de modo coherente en el contexto informativo y en todos intervienen números naturales, por ello no consideraremos estos elementos como diferenciadores de la dificultad de los problemas.

Análisis de los problemas

La tabla 2 presenta el resultado del análisis de los cuatro problemas según las variables establecidas.

Tabla 2
Análisis de los problemas según tipo de variables

Tipos de variables	Problemas			
	1	2	3	4
Estructura	Multiplicativa	Aditiva	Aditiva	Aditiva
Estructura semántica	Proporcionalidad Simple	Cambio aumentado	Cambio disminuyendo con comienzo desconocido	Cambio disminuyendo
Tamaño de los datos	Pequeños	Datos pequeños	Pequeños	Datos grandes (13>10)

Tabla 2
Análisis de los problemas según tipo de variables

Tipos de variables	Problemas			
	1	2	3	4
Contexto de la información	Cercano al alumno	Cercano al alumno	Cercano al alumno	Cercano al alumno
Orden de los datos	Ordenados	Ordenados	Ordenados	Ordenados
Existencia de datos superfluos	No existen	No existen	No existen	No existen
Posición de la pregunta	Al final del problema	Al final del problema	Al final del problema	Al final del problema
Tipo de sentencia	$a \times b = ?$ $a + a + a + \dots = ?$	$a + b = ?$	$? - a = b$	$a - b = ?$
Recursos auxiliares	Sí	Sí	No es posible realizar un modelado directo de los momentos planteados en el problema	Sí

A continuación profundizamos en el análisis de cada problema, según el orden en el que aparecen en el currículo de primaria español.

Problema 2

Jorge tenía 5 peces en su pecera. Le dieron 7 más en su cumpleaños. ¿Cuántos peces tenía después?

Maza (2001) afirma que incluso los niños de cuatro o cinco años se han podido enfrentar a este tipo de problemas en su experiencia fuera de la escuela, a pesar de no haber aprendido aún la operación aritmética de la adición, y pueden llegar a resolverlo utilizando cualquier estrategia informal. Además, la pregunta sugiere la posibilidad de usar materiales que facilitan la implementación de estas estrategias informales. Podemos concluir que este problema es el de menor dificultad para los alumnos de primero de primaria.

Problema 4

María tenía 13 globos, 5 de ellos se le reventaron. ¿Cuántos globos le quedaron?

En este caso, se da la dificultad de que María tiene 13 globos, número mayor que el número de dedos de las manos. Para facilitar la resolución, se da la posibilidad de utilizar recursos auxiliares. No obstante, sería necesario el dominio del conteo regresivo de números o del manejo de la operación de la sustracción para resolverlo (Maza, 2001). Por consiguiente, valoramos que este problema es más difícil que el problema 2, de cambio aumentado.

Problema 3:

Juan tenía algunos coches de juguete. Perdió 7 coches de juguete. Ahora le quedan 4. ¿Cuántos coches de juguete tenía Juan antes de perder ninguno?

El análisis de la tabla 2 lleva a concluir que este problema es más difícil que los dos anteriores. La estructura semántica del problema es de cambio disminuyendo con comienzo desconocido, por ello su formulación lingüística puede inducir a pensar que el problema se resuelve mediante una sustracción. Calcular el dato desconocido en la proposición ($? - b = c$) es significativamente más difícil que en el resto de proposiciones en que interviene la sustracción (Carpenter y Moser, 1984).

Como decimos en la tabla 2 precisamos que este problema no se puede resolver mediante un modelado directo de los momentos planteados en el problema (Maza, 2001). No consideramos, por tanto, que las distintas estrategias de ensayo y error que puedan llevarse a cabo con materiales auxiliares para resolver el problema sean un modelado directo de los momentos planteados en el problema.

Problema 1

José tiene 3 paquetes de pegatinas. Hay 6 pegatinas en cada paquete. ¿Cuántas pegatinas tiene José en total?

Este problema presenta una situación de proporcionalidad simple que se resuelve mediante la multiplicación. Es un problema simple de estructura multiplicativa (Castro, 2001). Se trata de un contexto en el que hay que reiterar una cantidad un número de veces; es decir, se requiere de una adición repetida.

Hay que tener en cuenta que es posible utilizar materiales por parte de los escolares para la resolución del problema. Podrían resolverlo mediante la unión repetida de tres conjuntos de 6 unidades cada uno, quizás de forma más intuitiva que el problema cambio disminuyendo con comienzo desconocido (problema 3). Este contexto es familiar a los niños y es el primero que se trata en el currículo escolar para introducir la multiplicación. No obstante, tradicionalmente la multiplicación y la división han sido consideradas como más difíciles de aprender que la adición y sustracción, aconsejándose que la multiplicación no sea introducida hasta que los alumnos dominen la adición (Castro, 2001). Por estas razones, consideramos que el problema 1 es más difícil que los problemas 2 y 4.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores

La guía de corrección establece 4 tipos de respuestas que resumimos en la tabla 3.

Tabla 3
Tipos de respuesta en la guía de corrección

Tipo de respuesta	Problemas
Correcta	Los problemas 1 y 3 son los más difíciles
Parcialmente correcta	Sólo el 1 correcto (con o sin los problemas 2 y 4)
	Sólo el 3 correcto (con o sin los problemas 2 y 4)
Incorrecto	Como mínimo un problema seleccionado pero ni el 1 ni el 3
	O ilegible
En blanco	

Nos basamos en los análisis del apartado anterior para interpretar estos tipos de respuesta.

Respuestas correctas

Podemos afirmar que los futuros profesores que contestan correctamente a esta pregunta:

1. son capaces de identificar las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos de la pregunta;
2. conocen el currículo de primero de educación primaria; y
3. han hecho una adecuada lectura del problema atendiendo a todas sus premisas.

Puede haber otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente. No tenemos en cuenta estos motivos en nuestro análisis. No disponemos de datos adicionales para analizar si las respuestas correctas están argumentadas con base en las variables de clasificación de problemas o al conocimiento del currículo.

Respuestas parcialmente correctas

La guía de corrección agrupa en un solo código diferentes respuestas de los futuros profesores que han contestado de manera parcialmente correcta (ver tabla 3). En todo caso, nos hemos interesado por estudiar qué conocimientos han manifestado estos futuros profesores, en qué errores han podido incurrir, y cómo podemos interpretar sus respuestas. En este sentido, formulamos conjeturas sobre los conocimientos manifestados por los futuros profesores cuya respuesta incluye uno de los dos problemas más difíciles, pero no los dos. Presentamos estas conjeturas en la tabla 4.

Tabla 4

Conjeturas sobre los conocimientos manifestados en las respuestas parcialmente correctas

Respuesta	Conocimientos	Otras razones
3 y 4	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Identificar la dificultad de la posición de la incógnita y ✓ Percibir la dificultad de los números mayores de 10 ⊙ No reconocer la dificultad de la multiplicación o valorar positivamente el uso de materiales auxiliares 	<ul style="list-style-type: none"> Azar No abordar los problemas desde la perspectiva de los escolares
3 y 2	<ul style="list-style-type: none"> ⊙ No reconocer los problemas de cambio aumentado como más fáciles 	<ul style="list-style-type: none"> Lectura incorrecta de la pregunta
Sólo 3	<ul style="list-style-type: none"> ⊙ No distinguir las variables que afectan a la dificultad de los otros problemas 	
1 y 4	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Reconocer la dificultad de la multiplicación para 1º de primaria ✓ Percibir los números mayores de 10 como una dificultad para los alumnos ⊙ No reconocer la dificultad de la posición de la incógnita en un problema ⊙ No valorar positivamente el uso de materiales 	<ul style="list-style-type: none"> Azar No abordar los problemas desde la perspectiva de los escolares
1y 2	<ul style="list-style-type: none"> ⊙ Considerar la adición como más difícil 	<ul style="list-style-type: none"> Lectura incorrecta de la pregunta
Sólo 1	<ul style="list-style-type: none"> ⊙ No distinguir las variables que afectan a la dificultad de los otros problemas 	

La tabla 4 pone de manifiesto la multiplicidad de posibilidades acerca del conocimiento que los futuros profesores pudieron poner en juego al responder de manera parcialmente correcta a la pregunta. Estos profesores reconocen la dificultad ya sea de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido y de la multiplicación, pero no simultáneamente, al mismo tiempo que pueden poner en juego otros conocimientos (parciales) que los llevan a escoger otro problema como más difícil. Con base en estos análisis podemos interpretar los resultados de los futuros profesores españoles.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 5 presentamos nuestra interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en un resumen de los análisis anteriores. En la caracterización de los conocimientos que se ponen en juego al responder de manera parcialmente correcta, incluimos en la tabla 5 únicamente aquellos que necesariamente deben activar para dar esa respuesta. Esos conocimientos se pueden matizar con las conjeturas adicionales que presentamos en la tabla 4.

En la primera columna de la tabla 5 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpretamos estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 5
Interpretación de los resultados españoles

%	Respuesta	Conocimientos
80,4 %	Correcta	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Identificar las de las variables que afectan a la dificultad de estos problemas ✓ Conocimiento del currículo de 1º de educación primaria ✓ Valorar positivamente el efecto facilitador del uso de materiales en la ejecución de los problemas. ✓ Adecuada lectura del problema
15,5 %	P. Correcta 3 y otro	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Reconocer la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido y ⊙ no reconocer la dificultad de la multiplicación
2,9 %	P. Correcta 1 y otro	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Reconocer la dificultad de la multiplicación para primero de primaria y ⊙ no reconocer la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido
0,7 %	Incorrecta	<ul style="list-style-type: none"> ⊙ No distinguir las variables que afectan a la dificultad de los problemas
0,5 %	Ilegibles o en blanco	
0 %	No llegaron a abordar la pregunta	

Estos resultados sugieren que una proporción importante de los futuros profesores españoles son capaces de distinguir las variables que afectan a la dificultad de los problemas. Entre aquellos que responden de manera parcialmente correcta, destaca la diferencia en porcentaje entre los que reconocen la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido, pero no reconocen la dificultad de la multiplicación y aquellos que reconocen la dificultad del problema de estructura multiplicativa, pero no reconocen la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo aumentado.

Conclusión

Este trabajo presenta una interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles en el estudio TEDS-M. Hemos descrito y ejemplificado el método para analizar las preguntas sobre conocimiento de Didáctica de la Matemática en el subdominio de números de los cuestionarios de los futuros profesores. Hemos mostrado que es posible establecer conjeturas acerca de los conocimientos que los futuros profesores manifiestan en este estudio según su tipo de respuesta. Consideramos que esta aproximación permitirá describir —con mayor detalle del que se tiene actualmente— el conocimiento en Didáctica de la Matemática de los futuros profesores en el subdominio de números y compararlo con el de los otros países que participaron en el estudio.

Somos conscientes de que un análisis pormenorizado de las preguntas y de las guías de corrección puede dar lugar a establecer carencias o limitaciones tanto en el cuestionario como en las guías de corrección. No obstante, en este estudio nos limitamos a estudiar los resultados que se obtuvieron con los instrumentos tal y como se aplicaron en el estudio TEDS-M.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto de investigación de excelencia FQM 03244 de la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía, el Instituto de Evaluación y el Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el Profesorado del Ministerio de Educación.

Referencias

- Blömeke, S., Kaiser, G. y Lehmann, R. (2010). TEDS-M 2008. Munich: Waxmann Verlag.
- Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal For Research in Mathematics Education*, 15(3), 179-202.
- Castro, E., Rico, L. y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las ciencias*, 10(3), 243-253.
- Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M.; Blanco, L. (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Castro, E., Ed. (2001). *Didáctica de la Matemática en la educación primaria*. Madrid, Síntesis.
- Gómez, P. (2007). *TEDS-M: Teacher Education Study in Mathematics. Estudio Internacional sobre la Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas*. Trabajo presentado en XI Simposio de la SEIEM, Tenerife.
- Maza, C. (2001). Adición y sustracción. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la educación primaria* (pp. 177-202). Madrid: Síntesis.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, C. (2009). Estudio TEDS-M: estudio internacional sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 425-434). Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.