

## LA INTEGRACIÓN DE PROGRAMAS DE GEOMETRÍA DINÁMICA PARA EL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE MAGNITUDES GEOMÉTRICAS: NUEVOS ASUNTOS PARA LA DIDACTICA

Borsani, V.; Cedrón, M.; Cicala, R.; Di Rico, E.; Duarte, B.; Sessa, C.  
valeborsani@yahoo.com.ar; maracedron@yahoo.com.ar; enriquedirico@gmail.com;  
rosa.cicala@gmail.com; betina.duarte@gmail.com; sessacarmen@gmail.com  
UNIPE (Universidad Pedagógica de la Pcia de Buenos Aires) – ARGENTINA

Tema V.5- Tic y Matemática

Modalidad CB

Nivel Medio (11-17 años)

Palabras clave: modelos dinámicos, variación de magnitudes, entornos de geometría dinámica, Geogebra

### **Resumen**

*Este trabajo presenta algunos resultados de un proyecto de investigación “La transformación del trabajo matemático en el aula del secundario a partir de la integración de las computadoras: un problema didáctico pensado con docentes” que se viene desarrollando en la UNIPE (Universidad Pedagógica, Argentina), desde el año 2012. En esta comunicación se presentan algunas conclusiones del análisis a priori de una propuesta para el estudio de la variación de magnitudes vía modelos dinámicos de situaciones geométricas.*

*Se presentan reflexiones acerca de dos asuntos: por un lado, la necesidad de contemplar la configuración del área de trabajo como variable didáctica, y por otro, los procesos implícitos y explícitos que se ponen en juego al considerar como objeto de estudio la relación situación geométrica/ modelo dinámico. Los estudios realizados muestran que con la intención de hacer entrar a los alumnos en un tipo de trabajo matemático fértil hay una complejidad subyacente que pone en íntima relación las características particulares del software –Geogebra- con la actividad matemática. En pos de la búsqueda de una actitud autónoma y crítica por parte de los alumnos para hacer evidentes dichas complejidades se presentan algunas reflexiones y sugerencias para la orquestación y gestión de la clase.*

Una característica de nuestro equipo de investigación es que está conformado por docentes/investigadores de la UNIPE y profesores de Escuela Secundaria en ejercicio. En un trabajo colectivo se diseñan actividades para la enseñanza de una zona de la matemática y se estudian las transformaciones que se producen en el aula a partir de la integración de la computadora. En esta comunicación presentaremos algunas reflexiones que se produjeron durante la planificación de una actividad y el análisis a priori.

La inclusión del trabajo con software educativo en los procesos de enseñanza y de aprendizaje plantea la necesidad de tomar en cuenta modificaciones en relación con:

.- el trabajo matemático de los alumnos, tanto en los problemas y tareas que se pueden abordar, como en las formas de abordarlos y en las posibles técnicas que se constituyen;

al respecto sostenemos que se incorporan actividades que no serían factibles para la enseñanza sin computadora. En líneas generales, este tipo de propuestas promueve un ambiente experimental en la clase de matemática que probablemente cambie la naturaleza de su aprendizaje.

.- el trabajo de los profesores, considerando los nuevos conocimientos y nuevos espacios de decisión involucrados en la planificación y en la gestión de su proyecto de enseñanza. La noción de *orquestación instrumental* (Trouche 2004) toma en cuenta estos espacios de decisión docente cuando se trabaja con la inclusión de las computadoras, abarcando tanto aquellos vinculados a las tareas y las maneras de realizarlas como a los relacionados a los instrumentos y su organización para el trabajo individual y grupal.

Desde nuestra posición, y en el marco de la Didáctica de la Matemática, estas dos dimensiones de estudio adquieren cierta especificidad cuando se aborda un contenido particular. Para el caso de nuestra investigación la zona de estudio considerada fue el tema Funciones. En particular nos concentramos en el diseño de una situación geométrica que pueda dar lugar a un primer encuentro de los alumnos con una función cuadrática.

Durante el proceso diseño colectivo de actividades, nos enfrentamos a diversidad de problemáticas que, directa o indirectamente, inciden en la concepción de un proyecto de enseñanza que integre las computadoras y, al mismo tiempo, ponga en primer plano la producción matemática de los alumnos. En ese contexto, en esta comunicación se abordarán los asuntos siguientes:

- a) - Considerar como una variable didáctica en el diseño de la actividad, la configuración del área de trabajo de aquellos archivos que los alumnos utilicen.
- b) - Los procesos implícitos y explícitos que se ponen en juego al considerar como objeto de estudio la relación situación geométrica/ modelo dinámico; en particular, al estudiar las variaciones de magnitudes geométricas definiendo - y estudiando- funciones en el modelo dinámico.

La actividad que hemos diseñado propone el estudio del área de una familia de rectángulos inscriptos en un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 11 cm.

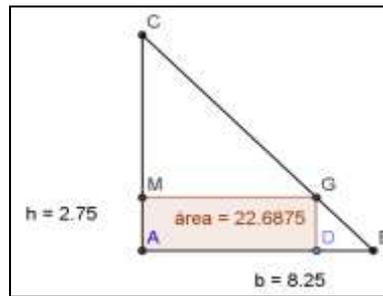


Figura 1

A partir de una presentación de la situación en el pizarrón los alumnos recibirían un archivo geogebra con un triángulo rectángulo isósceles en el que debían construir un rectángulo dinámico como lo muestra la figura. El objetivo de la actividad es estudiar el área de esos rectángulos para lo cual, en una etapa posterior de trabajo, los alumnos van a estudiar la variación del área en función de la medida de  $AD$ .

#### **a) La configuración del área de trabajo como variable didáctica**

Experiencias espontáneas de algunos docentes del grupo nos alertaron sobre las dificultades que aparecieron durante las clases debido a las aproximaciones de cálculo que realiza el programa. Particularmente, se observaron incoherencias entre los valores del área y de los lados del rectángulo que los estudiantes visualizaban en pantalla.

Pensando en una entrada de los alumnos al estudio de la variación de magnitudes vía modelos dinámicos, estas dificultades pueden contribuir a que prescindan del modelo para responder las preguntas que se les planteen, como ocurrió en las clases que recién mencionamos. Es por eso que, con el propósito de aprovechar la potencialidad de los modelos dinámicos, decidimos tomar algunas precauciones respecto a la configuración del archivo con el cual trabajarían los estudiantes, de manera tal que los valores del área de todos los rectángulos posibles de visualizar en la pantalla -y alcanzables por arrastre- fueran coherentes con el valor de la medida de los lados que se mostraba.

Para lograrlo, en Geogebra, regulamos el movimiento del mouse mediante la determinación de una cuadrícula suficientemente pequeña y el uso de atractores de puntos a cuadrícula. Asimismo, decidimos brindar el triángulo ya construido para garantizar una determinada posición en pantalla. De este modo, los rectángulos -que construirían los alumnos en la siguiente etapa- necesariamente tendrían lados sobre la cuadrícula. Estas decisiones son parte del proceso de orquestación instrumental.

El conocimiento de la lógica del funcionamiento del software iría brindando autonomía, a través de nuevos encuentros de los alumnos con este tipo de problemas, hasta llegar a que sean ellos quienes decidan cuál es la configuración más apropiada a cada situación planteada; incluso, podrían decidir en forma consciente adoptar la configuración por defecto que ofrece el software e interpretar los resultados que devuelve en el marco de las aproximaciones que realiza el programa. Consideramos que este tránsito hacia un mayor nivel de autonomía no se da espontáneamente, por el contrario, para que se concrete debería formar parte del proyecto de enseñanza en términos de acciones que permitan hacer evolucionar “una entrada controlada y homogénea” hacia formas de trabajo más abiertas y autónomas<sup>1</sup>.

**b) Procesos implícitos y explícitos que se ponen en juego al estudiar las variaciones de magnitudes geométricas a través de la noción de función.**

En el inicio de este problema, se pregunta a los alumnos qué magnitudes/elementos se mantienen iguales y cuáles cambian al recorrer en el modelo dinámico los distintos rectángulos de la familia. Entre todas las magnitudes cuya variación se pone en discusión, se propone estudiar la variación del área vinculándola a la variación de la medida del segmento AD (ver Figura 1).

Arcavi y Hadas (2000), tratan la vinculación entre entornos de geometría dinámica y entornos gráfico-funcionales, mostrando la potencialidad del acceso, la visualización y el estudio de una situación geométrica a través de modelos funcionales, fundamentalmente de su representación gráfica. De este artículo nos interesa retener la mención que hacen los autores sobre la comparación y contraste -que posibilita el software - entre los cambios en los estados del modelo dinámico de la situación geométrica y el movimiento de un punto en el gráfico de la función. En particular vemos que esta interacción es una oportunidad para recuperar la noción de función como modelo para vincular el cambio y/o la variación entre las medidas de dos magnitudes.

En nuestro trabajo, el Geogebra nos ofrece también la posibilidad de vincular cada estado del modelo dinámico con un punto  $P$  que se define en el plano cartesiano y que

---

<sup>1</sup> Hemos realizado un tratamiento ampliado de estas cuestiones en el artículo “Modelos dinámicos para el estudio de la variación de magnitudes geométricas: complejidad didáctica del diseño y gestión de actividades para el aula de la escuela secundaria”, recientemente enviado para su publicación.

necesariamente va a pertenecer al gráfico de la función. Además, este recurso nos permite poner de relieve la constitución punto a punto del gráfico de una función frente a otra opción del software de producir el gráfico completo a partir del ingreso de la fórmula. En el modelo dinámico los sucesivos estados se logran mediante el desplazamiento del punto D (ver Figura 1). Al moverlo, el punto P va produciendo, mediante la traza de su trayectoria, la curva que representa la variación del área en función de la medida del lado AD. Una característica de este tipo de representación es que su producción no requiere la elaboración de una expresión algebraica de la relación funcional a representar.

La exploración de este nuevo espacio de posibilidades nos llevó a reflexionar sobre los siguientes aspectos:

### **b1) Múltiples relaciones y variaciones de medidas a partir de una situación geométrica**

Como ya dijimos, la actividad diseñada propone el estudio de la variación del área del rectángulo en función de la medida del lado AD. No obstante la exploración inicial de la figura dinámica pone en evidencia la variación de medidas de otras magnitudes. Otras elecciones permitirían considerar el área como una variable relacionada con distintas magnitudes de la situación. Por ejemplo, podrían considerarse tanto el área en función de la medida de AD como el área en función de la medida de BG (ver figura 1).

Es posible entonces, abordar el estudio de la variación del área como variable dependiente, según la elección de distintas variables independientes. ¿Cuál es el valor que otorgamos a esta potencialidad del software, en el aula?

Por un lado, será una forma de concebir una cierta diversidad de posibles maneras de abordar y dar respuesta a la misma problemática. Esto da luz a la idea de que una situación matemática no determina una única relación funcional<sup>2</sup> pertinente para estudiarla, asunto que no es frecuentemente abordado desde la enseñanza en sus distintos niveles de decisión.

---

<sup>2</sup> Destacamos también la riqueza y la posibilidad que ofrece este software de abordar relaciones que eventualmente no sean funcionales pero que representan relaciones entre magnitudes presentes en la situación.

Por otro lado, el estudio de distintas relaciones funcionales para el mismo problema permitirá abordar nuevas preguntas, conjeturas y/o validaciones tanto sobre la situación como sobre aspectos particulares de las relaciones funcionales consideradas. Por ejemplo, los diferentes dominios de definición de las variables independientes consideradas pueden ser interpretados en el marco de la situación geométrica. Las representaciones gráficas de las funciones juegan un papel importante en diferentes sentidos: como contexto para la producción de preguntas sobre estas mismas representaciones, y como fuente para formular conjeturas y producir nueva información sobre la situación geométrica. Asimismo, la posibilidad de graficar funciones con distintas variables independientes y la misma variable dependiente en el mismo sistema de coordenadas puede generar condiciones para un trabajo que las vincule -estudiar sus intersecciones, relacionar algunos valores destacados de cada gráfica, etc.- en correspondencia con la situación geométrica. Nos parece necesario proponer, desde la enseñanza, un recorrido que incluya instancias en donde los alumnos deban asumir la tarea de elegir las relaciones funcionales que se van a considerar en el estudio de una determinada situación.

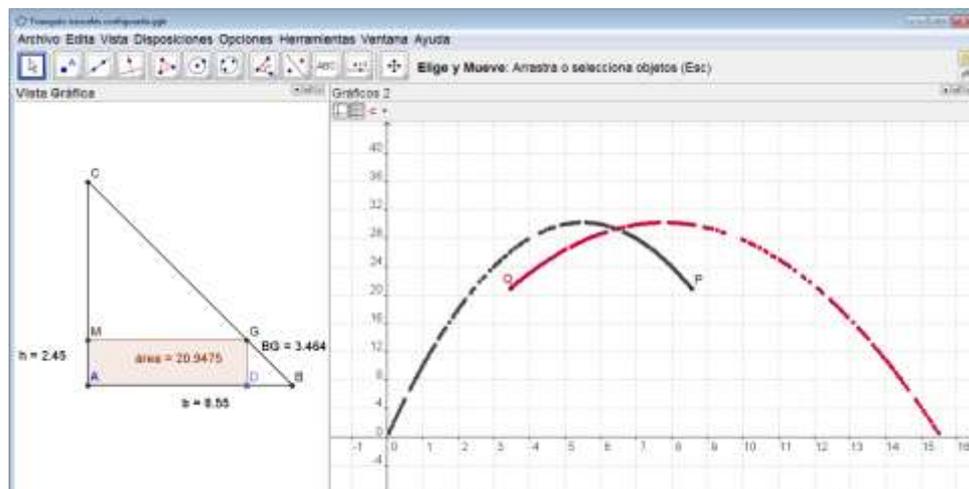


Figura 2

Nos parece necesario proponer, desde la enseñanza, un recorrido que incluya instancias en donde los alumnos deban asumir la tarea de elegir las relaciones funcionales que se van a considerar en el estudio de una determinada situación.

**b2) El vínculo entre la construcción realizada y la relación de dependencia a estudiar.**

En la actividad diseñada, el movimiento del punto D por parte del alumno podría dar lugar, según entendemos, a una asociación: para quien ve que la figura está cambiando es factible asimilar, de manera intuitiva, el movimiento del punto al cambio de las medidas/magnitudes donde él inmediatamente interviene. Es decir, si el punto D está sobre el lado AB, la medida del lado AD del rectángulo (con valor =8.25 en la figura 1) se “ve” asociada al movimiento del punto. Un estudiante podría estar unificando dos variaciones: la posición del punto y la medida del segmento.

Por otra parte, la manera en que funciona un modelo dinámico (producto de las decisiones tomadas durante su construcción) podría facilitar u obturar la visualización de algunas relaciones de dependencia frente a otras posibles. En tal sentido, imaginamos que la construcción propuesta podría llevar a considerar la variación del área del rectángulo como *un efecto* de la variación de la medida de la base, variación que el estudiante provoca a partir del movimiento del punto D. El movimiento que se visualiza da condiciones para que un estudiante pueda imaginar que aquello que él está moviendo es una medida independiente dentro de una relación de dependencia. Esto, entendemos, puede ser un punto de partida para reconocer una relación en la cual hay una medida independiente y otra que depende de ella.

Si los alumnos hubieran realizado una construcción con un punto móvil en el lado AC o en el BC del triángulo, la medida del lado AD y el área del rectángulo cambiarían las dos juntas al cambiar la posición del punto móvil. Esto podría interpretarse como una co- variación y opacar la posibilidad de establecer una relación de dependencia entre esas variables. En esta situación lo visual -atado al movimiento que el sujeto realiza- estaría influyendo en la posibilidad de construir la relación de dependencia. Este supuesto -que aportaron con gran convicción las profesoras del grupo que llevarán esta secuencia a sus clases y tienen presente la gestión de la misma- dio lugar a decidir que el punto móvil estuviera en el lado horizontal AB del triángulo para todos los estudiantes.

En este contexto de inicio del estudio de funciones, nos parece conveniente que la construcción facilite la visualización. En una instancia posterior, con la intención de avanzar en la conceptualización de la noción de función, creemos necesario una

propuesta que específicamente tome en cuenta la cuestión de separar el movimiento que realiza el sujeto de la elección de las variables independientes y dependientes y de las relaciones funcionales a considerar. En este sentido, una construcción que recurra a, por ejemplo, el uso de deslizadores o de animación daría la oportunidad de “observar” el cambio sin asociar el movimiento de la mano a la variación de alguna medida en particular. La observación de las variaciones de un conjunto de medidas, sin identificar ninguna como *causante* de otra podría ser un escenario propicio para considerar diversas relaciones funcionales que pongan en juego la misma variable dependiente. De esta manera, la noción de función adquiere la dimensión general que realmente tiene.

### **Reflexiones finales**

Las problemáticas presentadas en esta comunicación dan cuenta de la potencialidad y la complejidad subyacente al estudio, por parte de los alumnos, de las variaciones de magnitudes geométricas a través de funciones definidas en un modelo dinámico.

En nuestras indagaciones encontramos que las dimensiones que hemos abordado, en general no son problematizadas/complejizadas en las propuestas que circulan en la web, a disposición de los docentes. La ausencia de este tipo de reflexiones puede lugar a una incorporación “ingenua” de las TIC en el aula.

Desde nuestra posición, un trabajo didáctico que contemple las particularidades del software no es independiente de la actividad matemática que se busca instalar en el aula. Es un desafío para la didáctica concebir escenarios en los cuales estas particularidades del *software* se aprovechen para convocar a los estudiantes a un trabajo matemático más sustantivo.

### **Referencias bibliográficas**

- Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 15-25.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281–307.