Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática
ISBN: 978-980-7464-17-8

DIFICULTADES EN EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA. UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Yerikson Suárez Huz
UPEL IP Maracay
yhuz553@hotmail.com
Pensamiento Probabilístico y Estadístico. Educación Universitaria

RESUMEN

El reconocimiento de la aleatoriedad como una característica representativa de diversos fenómenos naturales y sociales, hacen ver que la inclusión de los temas de Probabilidad en el sistema educativo impulsa una visión más integral de la realidad donde se desarrollan los sujetos, debido a que le permite afrontar situaciones enmarcadas dentro de la incertidumbre y la presencia del azar. Sin embargo, diversos estudios revelan la complejidad del aprendizaje en aspectos inherentes al concepto de probabilidad. Por ello, el propósito de esta ponencia es reportar algunas dificultades en el razonamiento probabilístico presentes en estudiantes para profesores de Matemática cuando resuelven problemas asociados al enfoque clásico de la probabilidad. En cuanto a los referentes teóricos se manejan las ideas estocásticas fundamentales, la noción del sesgo de equiprobabilidad, y la comparación de probabilidades. Metodológicamente, se trata de un estudio exploratorio, descriptivo, y de campo, apoyado en una revisión documental. Los sujetos de estudio lo conforman un grupo de 20 estudiantes de la carrera de educación en la especialidad de Matemática de la UPEL-Maracay, a los cuales se les aplicó un cuestionario, que fue analizado con técnicas cuantitativas y cualitativas. Los resultados señalan que existen dificultades en la comprensión de las ideas fundamentales, asociadas al enfoque clásico de probabilidad, en la mayoría de los estudiantes para profesores de Matemática. En este sentido, hay una marcada presencia del sesgo de equiprobabilidad; también se evidenció el poco y restringido uso de la regla de Laplace, poco dominio de la teoría combinatoria, lo que influye en la determinación del espacio muestral, aunque se evidencia un adecuado razonamiento proporcional a la hora de comparar probabilidades. Lo anterior conduce a pensar en un redimensionamiento en la preparación en el campo de la enseñanza de la probabilidad de estos docentes en formación, de la UPEL-Maracay.

Palabras clave: probabilidad, razonamiento, sesgos.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la enseñanza de la Probabilidad se manejan conceptos que se apartan de las situaciones deterministas usualmente abordadas en Matemática, por lo que se requiere de un razonamiento distinto para comprender este tipo de fenómenos vinculados a lo aleatorio. El interés por el estudio de estos tópicos ha sido reseñado a lo largo de mucho tiempo; por ejemplo, Garfield y Ahlgren (1988) ya hablaban de una importante y acelerada tendencia a incorporar tópicos asociados a la Estadística y la Probabilidad en los diversos currículos desde educación inicial hasta la educación secundaria y a casi dos décadas, tanto Ortíz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2008), como Azcárate (2007), señalan que los conceptos vinculados a la Estadística y la Probabilidad ocupan cada vez más un papel preponderante en los planes de estudio de los diferentes niveles educativos en muchos países.

Precisamente, uno de estos temas propios de la Educación Estadística, y que deben ser estudiados en las clases de Matemática, es el vinculado a las diversas concepciones de la Probabilidad. Para Borovcnik y Kapadia (2010), la probabilidad se concibe como un instrumento para la modelación de una gran variedad de situaciones reales. Y es que la misma aparece en una amplia gama de situaciones científicas, tecnológicas y sociales en donde intervienen el azar, la aleatoriedad y la incertidumbre. Esto coincide con lo expuesto por León (2007) quien afirma que "la Probabilidad cada día cobra más importancia debido al reconocimiento de la presencia de la incertidumbre en las acciones del hombre y la naturaleza" (p. 179).

Sin embargo diversos estudios revelan la complejidad del aprendizaje en aspectos inherentes al concepto de probabilidad. Por ejemplo, Sánchez y Hernández (2000) indican que existe un consenso entre profesores e investigadores respecto al hecho de que los temas vinculados con la Probabilidad constituyen un área difícil de enseñar y aprender. También Azcárate (2007) señala que la Probabilidad "es un concepto de difícil comprensión, pues, en general, entra en clara contradicción con el pensamiento determinista y causal dominante en nuestra educación" (p.48). Una razón que justifique esta visión, aparentemente complicada y compleja, con relación a la asimilación y comprensión de este concepto, es que la inserción de la probabilidad en el contexto educativo pretende desplegar en los estudiantes una forma de razonamiento diferente al lógico-deductivo y causal-determinista.

Por ello, y a pesar del creciente interés por parte de las autoridades en materia de políticas educativas, de incorporar a los currículos oficiales estos tópicos relacionados con la Probabilidad, Azcárate (2007) refiere que esto no es de ninguna manera un indicativo de que tales contenidos sean impartidos en los salones de clase; y que de hecho estos temas siguen siendo omitidos o poco estudiados dentro de las instituciones educativas. Entre algunas razones que justifican este comportamiento, destacan el hecho de que la probabilidad tiene una naturaleza que va contraria a la intuición de las personas (Guzmán e Insuza, 2011); otra posible razón tiene que ver con la inadecuada formación de aquellos sobre quienes recae la responsabilidad de enseñar temas de probabilidad; idea apoyada también por Azcárate (2007), quien indica que una de las posibles causas por las cuales no se enseñanza temas relacionados a dicho contenido, es el hecho de que no se le ha puesto la atención requerida al perfeccionamiento de los profesionales comprometidos con su enseñanza en las aulas de clase.

En opinión de quien lleva a cabo la presente investigación, y basado en la experiencia profesional del mismo en la formación inicial de docentes de Matemática en el Instituto

ISBN: 978-980-7464-17-8

Pedagógico de Maracay "Rafael Alberto Escobar Lara" y que forma parte de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), los estudiantes para profesores parecen carecer de las nociones básicas y sólidas vinculadas a contenidos propios de la Teoría de Probabilidad; y en consecuencia no son capaces de emplear de manera correcta el razonamiento probabilístico en la resolución de problemas donde priva la incertidumbre; aún y cuando estas ideas, conceptos y modos de razonamiento debieron ser adquiridos a lo largo de su formación escolar preuniversitaria.

En concordancia con lo anteriormente expresado, es necesario entonces contar con un docente capaz de reconocer, y hacer reconocer en los demás, la importancia y amplia presencia del azar y la incertidumbre en muchos fenómenos; y que para su abordaje se requiere de un modo de pensar distinto y cuyo eje principal lo constituye precisamente la Probabilidad. En este sentido, Ortíz, Mohamend y Contreras (2011) señalan que para que se produzca un cambio favorable hacia la enseñanza y aprendizaje de esta área de conocimiento, es necesario mejorar la calidad de la preparación de los docentes encargados de impartirla en las aulas de clase u otro escenario de aprendizaje.

También Batanero, Godino y Roa (2004) sugieren la necesidad de incorporar, en la formación de aquel que esté encargado de impartir la enseñanza de la Probabilidad, el estudio y reconocimiento de errores, dificultades, obstáculos y concepciones erróneas en el razonamiento probabilístico. En particular Ortíz, Mohamed, Serrano y Rodríguez (2008); señalan que es primordial reconocer los conocimientos y modos de razonar de los estudiantes para profesores de Matemática, en torno al concepto de Probabilidad; pues esto permitiría implementar un proceso de formación más adecuada para los futuros docentes; no solo desde el punto de vista matemático-formal sino también desde el punto de vista didáctico.

Para Borovcnik y Kapadia (2010); la enseñanza de la Probabilidad debe considerar los diversos enfoques o concepciones de la misma, esto como una manera de favorecer a los estudiantes en la comprensión integral del concepto, sus aplicaciones, limitaciones en su uso e interpretaciones. En definitiva, el significado polifacético del concepto Probabilidad constituye un elemento de primordial importancia en la enseñanza de la misma en las aulas de clase. Sin embargo, según Guzmán e Insuza (2011), muchos profesores tienen preferencia por el enfoque clásico de la Probabilidad.

En relación a esta preferencia, Batanero (2005) apunta hacia el hecho de que el enfoque clásico ha prevalecido en la enseñanza sobre todo en los primeros niveles de educación básica; con un énfasis en el uso de la teoría combinatoria; a pesar de lo complejo que puede llegar a ser su uso. De igual manera Salcedo (2006a) indica en el caso de Venezuela, que esta concepción de la probabilidad es la que cuenta con mayor presencia en el curriculum escolar. Sin embargo, Garfield y Ahlgren (1988) ya señalaban algunas las razones por las cuales los estudiantes, de cualquier nivel educativo, presentan dificultades en torno a la comprensión de temas que están relacionados al enfoque clásico de probabilidad; entre las que destacan (a) dificultades vinculadas a las fracciones y al razonamiento proporcional; (b) las distintas interpretaciones de la Probabilidad; (c) dificultades en la traducción verbal de los datos; y (d) el hecho de que las concepciones y creencias de los estudiantes, acerca de la probabilidad, entran en conflicto con la normativa teórica de la disciplina.

De lo anterior, se desprende que pareciese necesario entonces, empezar a examinar de manera profunda y sistemática acerca del razonamiento probabilístico de los futuros docentes de Matemática. En el caso particular de Venezuela, este tipo de investigaciones son reducidas. Específicamente en la UPEL-Maracay, es prácticamente nula, a pesar de que en la mencionada institución se forman profesores en la especialidad de Matemática y se incluye en su pensum de estudios un curso obligatorio denominado *Probabilidad y Estadística Inferencial*. Sin embargo, en dicho curso el programa además de que no contempla aspectos vinculados a la didáctica de la probabilidad, presenta un elevado índice de aplazados, y el fenómeno de cursarla al final de la carrera, pues no es prerrequisito de ningún otro curso de su plan de estudio. Esto hace suponer la persistencia de actitudes y creencias desfavorables, y la presencia de errores y dificultades en el estudio de los conceptos propios de la Probabilidad, que pudiesen estar asociados a las concepciones erróneas y a la escasa preparación en el tema durante su formación educativa preuniversitaria y en el caso universitario, ningún otro curso trata los contenidos que se prevén aprender en este.

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Describir algunas dificultades presentes en el razonamiento probabilístico de estudiantes para profesores de Matemática de la UPEL Maracay, cuando resuelven problemas asociados al enfoque clásico de la probabilidad.

MARCO TEÓRICO

Razonamiento Probabilístico

Tratar de entender y comprender el azar y lo aleatorio ha sido una cuestión de la que se ha ocupado el hombre desde períodos antiguos. Además, la manera de explicar la presencia y ocurrencia de fenómenos asociados con la incertidumbre han sido variadas y controversiales. Para León (2007) el razonamiento probabilístico es un modo de enfrentar, abordar y explicar situaciones donde priva la incertidumbre. También Landín y Sánchez (2010) refieren que el razonamiento probabilístico es diferente del razonamiento matemático, lógico y deductivo, puesto que el modo de pensar probabilísticamente es

ISBN: 978-980-7464-17-8

> La manera de razonar que siguen los matemáticos o estadísticos para formular, interpretar, obtener y validar enunciados y afirmaciones probabilísticas. Una persona que sabe razonar probabilísticamente reconoce situaciones de azar y puede modelarlas, puede escapar a los sesgos cognitivos, cuida que sus creencias y concepciones no estén en contradicción con el razonamiento normativo, sabe cuándo y cómo la probabilidad puede jugar un papel importante, puede determinar la probabilidad de eventos (aislados o a partir de probabilidades dadas). Además, construye e interpreta distribuciones de probabilidad y las utiliza para hacer inferencias. (p. 599)

Enfoque Clásico de la Probabilidad

El origen de la teoría de la Probabilidad se remonta a la segunda mitad del siglo XVII en un campo completamente ajeno a la Matemática y la Estadística, como lo son los juegos de azar, lo que de forma peculiar llevó al desarrollo de ésta. Godino, Batanero y Cañizares (1996) señalan que con frecuencia se considera a Pascal y Fermat como los precursores del cálculo de Probabilidad. La razón para tal afirmación se basa en el hecho de unas comunicaciones o correspondencias entre ellos debido a unos planteamientos vinculados con juegos de azar que le hiciera el Caballero de Meré a Pascal. En este sentido, la concepción clásica de la probabilidades es la más antigua y tiene su origen en la búsqueda de aplicación a problemas de ganancia y situaciones de riesgos inspiradas, como se mencionó con anterioridad, en los juegos de azar. Para Godino, Batanero y Cañizares (Ob. Cit.), el primer intento de definir de manera matemática y rigurosa a la Probabilidad se debe a Pierre Laplace, para quien la probabilidad de que un evento ocurra no es más que la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles; bajo el supuesto de que todos los casos son igualmente "probables" y son finitos. Así que según esta concepción, el cálculo de probabilidad se reducía a estudios de tipo combinatorio y trabajo aritmético con fracciones.

Ideas Estocásticas Fundamentales

Heitele (1975) propone un grupo de conceptos que sirve de sustento al estudio de la Probabilidad y la Estadística, y que por tanto, es necesario enseñarlos e irlos introduciendo de manera sistemática y continua dentro de la escolaridad formal del individuo. Batanero (2005) sostiene que aunque las ideas de aleatoriedad y la noción de probabilidad constituyen los puntos iniciales para el estudio de la teoría de Probabilidad, hay una serie de conceptos sobre los cuáles se apoya todo el cálculo de probabilidades, precisamente en referencia a las ideas estocásticas fundamentales. Heitele (Ob. cit.) menciona que estas ideas fundamentales son: (1) medida de probabilidad, (2) espacio muestral, (3) regla de la adición, (4) regla del producto e independencia, (5) equidistribución y simetría, (6) combinatoria, (7) modelo de urna y simulación, (8) variable aleatoria, (9) ley de los grandes números y finalmente, (10) muestreo. Por ello, se aspira que tales conceptos deben constituirse como parte fundamental del conocimiento que posean los profesores de Matemática. De este total de ideas, se consideran en la presente investigación solamente las de Espacio *Muestral,* *equidistribución* y *simetría*, *y combinatoria*; por estar directamente relacionadas con el cálculo de Probabilidades bajo su enfoque clásico.

Comparación de Probabilidades

Un problema de comparación de probabilidades involucra de manera directa una comparación entre fracciones. Cañizares y Batanero (2005) indican que el dominio del cálculo de proporciones es un prerrequisito para el cómputo adecuado de probabilidad. Para poder asimilar el concepto clásico de probabilidad es necesaria la habilidad y destreza en el uso y manipulación de fracciones, así como el concepto de razón. Para Cañizares (1997) las estrategias erróneas en la comparación de probabilidades pueden ser consecuencia del desconocimiento de parte de los datos del problema como por ejemplo el utilizar solamente los numeradores; así mismo son reiterativas las estrategias erróneas basadas en operaciones aditivas cuando se necesita de operaciones multiplicativas; también se ha detectado que un individuo puede usar diferentes estrategias según la naturaleza del planteamiento y que a veces trata de resolver un problema más complejo con una estrategia sencilla. Para este autor existen diversas estrategias a emplear para comparar dos probabilidades, (a) las de comparación de una sola variable y (b) las de dos variables. En el primer grupo se encuentran la comparación del número de casos posibles, favorables y desfavorables; mientras que en el segundo grupo se encuentran las estrategias aditivas, multiplicativas y de correspondencia.

Sesgo de Equiprobabilidad

Las personas, desde su niñez, poseen un conjunto de ideas intuitivas, preconcepciones o juicios previos acerca del azar y la probabilidad y que son puestos al descubierto en el razonamiento empleado en determinadas situaciones o planteamientos. En este sentido, Serradó, Cardeñoso y Azcárate (2005) indican que las preconcepciones acerca del azar pueden en general anteceder al pensamiento formal, normativo e institucionalizado y, que si son correctas, pueden ser de gran ayuda en el proceso de aprendizaje; pero que de forma contraria, se pueden convertir en dificultades para la correcta comprensión de los conceptos probabilísticos. Para Salcedo (2006b) "A los razonamientos incorrectos respecto a situaciones probabilísticas se les conoce en la literatura especializada como sesgos en la interpretación de la probabilidad, se entiende por esto el conjunto de respuestas incorrectas que tienen un origen similar" (p. 24). El sesgo de equiprobabilidad está vinculado al hecho de que los individuos tienden a creer que todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio tienen la misma posibilidad de ocurrir. Así, los sujetos que manifiestan tal sesgo, consideran que por el hecho de tratarse de un experimento aleatorio, entonces automáticamente cada uno de sus posibles resultados tiene la misma posibilidad de ocurrir. Salcedo (Ob. Cit.) apoya estos argumentos cuando señala que, para ellos, pareciera confluir una conexión inmediata entre azar y lo aleatorio; y la equiprobabilidad.

ISBN: 978-980-7464-17-8

MARCO METODOLÓGICO

La presente investigación constituye un estudio exploratorio, de carácter descriptivo-interpretativo, apoyado en un trabajo de campo y sustentado en una indagación documental. El estudio se realizó en el Departamento de Matemática del Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" (Maracay, Edo. Aragua), núcleo de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Los informantes clave para la investigación fueron los estudiantes regulares de la especialidad de Matemática de la UPEL-Maracay, inscritos en el curso de Probabilidad y Estadística inferencial para el período lectivo 2014-II. Por ello, en el estudio participaron 20 futuros docentes de Matemática con un promedio de edad de 22 años, 10 de género femenino y 10 de género masculino. La sección estaba conformada por estudiantes repitientes y regulares (cursan por primera vez). Para indagar y obtener la información se procedió al diseño y aplicación de un cuestionario (Ver Anexo) que consta de dos partes, la primera con cinco preguntas cerradas (aunque era obligatorio justificar y argumentar la elección realizada), y la segunda con cinco problemas abiertos. Dicho cuestionario fue construido y validado a la luz de los referentes teóricos ya que se seleccionaron, rediseñaron y adaptaron preguntas contenidas en cuestionarios aplicados por otros autores (Green, 1983; Cañizares, 1997, Fischbein y Gazit, 1984). Dicho cuestionario fue aplicado al inicio del curso. En el cuadro 1 se puede apreciar la relación entre los ítems del cuestionario y los temas que se pretenden estudiar.

Cuadro 1

Relación de temas que explora cada ítem del cuestionario

Temas que se abordan	Número de ítem (Preguntas cerradas)	Número de ítem (Problemas abiertos)
Comparación de Probabilidades	1, 2, 3	2
Cálculo de Probabilidad (Regla de Laplace)	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5
Razonamiento Combinatorio	4, 5	3, 4, 5
Espacio Muestral	4, 5	3, 4, 5
Sesgo equiprobabilidad	4, 5	1, 5

En cuanto al análisis de la información, el mismo se abordó en varios niveles. Un primer análisis referido a las respuestas emitidas por los sujetos de investigación a cada una de las preguntas del cuestionario; un segundo análisis referido a los resultados globales obtenidos en grupos de ítems y de problemas que evaluaban aspectos similares, en este caso se hizo un proceso de categorización de las respuestas para identificar la presencia del sesgo de equiprobabilidad, analizar la comparación de probabilidades, los razonamientos combinatorios que efectúan los futuros docentes, la obtención del espacio muestral asociado a un experimento aleatorio; y describir el uso de cálculo de probabilidad bajo la Regla de Laplace; un tercer análisis para el estudio del desempeño individual por cada participante para evidenciar el nivel de razonamiento; y finalmente un cuarto análisis que se hizo separando a los sujetos de estudio en dos grandes conglomerados siguiendo como criterio si desde su ingreso a la universidad como estudiantes regulares, recibieron instrucción o no, de contenidos vinculados al cálculo de probabilidades. Por cuestión de espacio, la presentación y discusión de los resultados se harán en función de los primeros dos análisis descritos anteriormente.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Se estudiaron tanto el desempeño individual de cada uno de los sujetos participantes en la investigación, tomando como criterio si la respuesta emitida a cada ítem es correcta y basada en argumentos correctos. En el Cuadro 2 se puede apreciar esta relación entre el número de respuestas correctas, basadas en razonamientos correctos, para cada uno de los informantes clave. Se ha marcado con una equis la respuesta correcta de cada sujeto a una pregunta en particular.

Cuadro 2
Relación de respuestas correctas por cada sujeto

Sujetos																				
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20
I1	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
I2	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
I3	x	x	x		x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
I4								x									x			x
I5								x									x			x
P1																				
P2	x				x	x	x	x	x		x	x	x	x		x	x	x	x	x
P3				x	x			x	x							x				x
P4	x							x											x	x
P5								x												x
T_{ot}	5	2	3	3	5	4	4	9	5	1	4	4	4	4	3	5	6	4	5	9

Nota. I_i y P_i representa el ítem i y el problema i respectivamente (i=1, 2, 3, 4, 5)

Del total de 20 sujetos participantes en la investigación, tan sólo dos, evidencian un razonamiento probabilístico adecuado en función del número de respuestas correctas obtenidas. Ambos contestan incorrectamente el problema 1, asociado al sesgo de equiprobabilidad, sin embargo contestan de manera adecuada los otros ítems donde también se puede estudiar la presencia del sesgo, se infiere que la diferencia estriba en el hecho de que el problema 1 pone en evidencia ese error cuando se le asigna sin ninguna razón lógica una misma probabilidad a un conjunto de eventos; mientras que los otros planteamientos tienen que ver con diferencias entre la equiprobabilidad de los eventos simples y la no equiprobabilidad de los eventos compuestos.

Nótese que el número de respuestas correctas por participante ronda las cuatro, lo que parece ser bastante bajo. Además, algo que vale la pena resaltar es el hecho de que este promedio de respuestas correctas en realidad está concentrado en torno a los

ISBN: 978-980-7464-17-8

planteamientos referidos al razonamiento proporcional subyacente a la comparación de probabilidades; lo que permite inferir importantes dificultades a la hora de analizar problemas que involucran el enfoque clásico de probabilidad. Los participantes con el menor número de respuestas correctas son 5, quienes sólo logran acertar entre una y tres respuestas correctas; lo que constituye el 25% de los sujetos que intervienen en el estudio. El mejor desempeño lo han tenido en torno a la comparación de probabilidades, mientras que con relación al razonamiento combinatorio, determinación del espacio muestral, la regla de Laplace y el sesgo de equiprobabilidad, el razonamiento empleado por los participantes ha sido muy limitado. Veamos esto con un poco más de detalle.

En cuanto a la *comparación de probabilidades*, la mayoría de los participantes contestan correctamente y emplean argumentos adecuados para ello. De lo anterior se puede inferir un adecuado razonamiento proporcional por parte de los futuros docentes para profesores de Matemática. Sin embargo, es posible detectar ciertas ideas erróneas. Por ejemplo, en el ítem I2, un informante señala que seleccionó la opción b y justifica su elección afirmando que "*Pues como hay más bolas negras y blancas, la posibilidad es mayor porque le lleva 2 bolas de diferencia a la otra caja*" utilizó una estrategia de tipo aditiva que no era adecuada en este caso, cuando en realidad, la respuesta normativa sostiene que no hay diferencia entre las probabilidades en este caso.

Con relación al *cálculo de probabilidad* se hizo una revisión de las respuestas a cada uno de los planteamientos propuestos en el cuestionario en sus dos partes, para identificar con qué frecuencia se empleó esta regla para justificar los razonamientos empleados por cada. Dicha revisión permite inferir que hay un uso limitado de la concepción clásica de la Probabilidad, y entre las razones que podrían justificar este hecho, se encuentran precisamente las dificultades que confrontan los sujetos a la hora de describir los casos posibles y favorables mediante el uso de herramientas propias de la teoría combinatoria, lo cual incide sobre la determinación del espacio muestral, clave fundamental para aplicar la Regla. Una respuesta correcta es proporcionada por un participante que demostró un adecuado razonamiento probabilístico cuando afirma que "*Es más fácil obtener a. Con 3 dados hay un espacio muestral de 6.6.6= 216 posibles resultados, el espacio muestral en este caso. Como el 5, el 3 y el 6 se pueden obtener en cualquier manera, entonces hay 6 posibilidades como por ejemplo 536, 635, 365, 563, 653, 365 y así. Tres veces 5 pasa de una sola forma y en el otro caso hay solo tres opciones 553, 355, 535, entonces las probabilidades son 6/216; 3/216 y 1/216. Es mejor la opción a*"; con lo que adicionalmente calcula cada una de las probabilidad y las compara entre sí para seleccionar la de mayor valor. Pero tan sólo dos de los veinte participantes lograron hacer esto. De hecho, en algunos casos, aunque se aplica la regla de Laplace, se hace de manera incorrecta debido a la presencia del sesgo de equiprobabilidad y a la errónea determinación del espacio muestral. Por ejemplo, un participante sostiene que "*ya que este evento es equiprobable, puesto que cada dado tiene 6 lados lo que quiere decir que* *en total contamos con 18 caras (6 caras x 3 dados que tenemos). Por lo tanto al calcular la probabilidad de (a), (b) y (c) es resultado que obtendríamos seria el mismo. Obsérvese P(a)= 3/18 = 0,16*"

Respecto al *razonamiento combinatorio y el espacio muestral,* se observó la ausencia del uso de diagramas de árbol o de la aplicación de la regla de la multiplicación. La mayoría de los sujetos no reconocen en realidad el grupo de objetos que se debe enumerar; y además no parece haber conciencia acerca de la relevancia del orden de los objetos y la posibilidad de repetición o no de los mismos. Por otra parte, hay una ausencia casi absoluta de lenguaje, escrito y verbal, característico del empleo de la combinatoria, lo que hace inferir que la mayoría de los participantes tienen serias dificultades en reconocer el tipo de arreglo u ordenamiento inmerso en los planteamientos; y carecen de las técnicas y razonamientos necesarios para este propósito. Los ítems que evaluaban estos asuntos presentan un alto nivel de respuestas erróneas, poca evidencia del empleo de técnicas combinatorias, y pocas respuestas donde se deje de manera, al menos implícita, la determinación adecuada del espacio muestral o del número de elementos que los conforman. Como ejemplos ilustrativos de las dificultades, en el ítem 4 se debe determinar el espacio muestral al lanzar tres dados. El 65% contesta de manera errada. Uno de los informantes sostiene que "*Aquí se debe construir un espacio muestral S = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24}"* y hace alusión al hecho de que este está formado por las distintas posibilidades al lanzar los dados. Otro participante indica que "*cada dado tiene 6 caras y se pudiese decir 6 caras por 3 dados serían 18 posibilidades que podría salir*." En el caso de informantes repitientes, hay serias confusiones a nivel conceptual, por ejemplo, afirma que "*Se pueden obtener 2160 resultados, ya que un dado tiene 6 caras, es decir 6 opciones diferentes y aplicarle el factorial 6¡ = 6.5.4.3.2.1=720 Entonces como son tres dados simultáneos 720 x 3 = 2160*"

Finalmente, en torno a la presencia del *sesgo de equiprobabilidad*, en función de las respuestas develadas por los informantes clave, se puede concluir que en general, existe importante predominancia de este sesgo en los estudiantes para profesores de Matemática de la UPEL Maracay encuestados, con base en el número de respuestas asociadas a identificar el mismo. Además, se comprueba el hecho de que no solo se asigna de manera discrecional la cualidad de ser equiprobable a un suceso determinado, sino que se pudo constatar por medio de las respuestas, que es un error reiterativo el confundir el hecho de que un evento simple tiene la misma probabilidad que el resto de los eventos simples asociados a un cierto experimento aleatorio, pero que a la hora de estudiar eventos compuestos, la equiprobabilidad no es "heredada" por estos últimos. En relación al mismo ítem 4, uno de los participantes sostiene que "*Todos estos resultados son igualmente probables porque se está considerando el mismo espacio muestral, es decir, las 6 caras de los dados*", lo cual pone en

ISBN: 978-980-7464-17-8

evidencia la no distinción del espacio muestral que se obtiene al lanzar un dado y al lanzar tres dados; argumento similar es esgrimido por otro sujeto cuando señala que "*Al lanzar tres dados es posible que ocurra cualquier resultado, por lo tanto todos son igualmente probables*". Otra respuesta esgrimida por un informante afirma que "*Todos estos resultados son igualmente probables al considerar que los dados poseen una misma forma cuadrada y son rodados al mismo tiempo*", intentando así justificar con la igualdad de condiciones en las que se realiza el experimento aleatorio la aparente equiprobabilidad. En otros casos, se asocia equiprobabilidad con desconocimiento o aparente falta de información, por ejemplo, un participante sostiene que "*La opción d me parece la más acertada, ya que al lanzar tres dados simultáneamente no se puede saber a ciertas cual es el resultado a obtener, motivo por el cual todos tienen la misma probabilidad*".

CONCLUSIONES

A raíz del estudio de las respuestas proporcionadas en los cuestionarios, por parte de los estudiantes para profesores de la especialidad de Matemática de la UPEL, se puede concluir de manera general que el razonamiento probabilístico de los mismos a la hora de abordar situaciones donde es requerido el uso del enfoque clásico de Probabilidad, presenta limitaciones y evidentes dificultades. Los resultados advierten entonces sobre el hecho de que los temas asociados al manejo del enfoque clásico de la Probabilidad representan un elevado componente de complejidad para los estudiantes para profesores de Matemática de la UPEL Maracay, sobre todo si se toma en consideración que este curso es el único contacto formal con el estudio de la teoría de la Probabilidad que tienen a lo largo de su formación profesional, que está ubicado en el quinto semestre y que está prácticamente ausente el estudio de ideas estocásticas en sus estudios previos preuniversitarios.

En este sentido, la presencia *del sesgo de equiprobabilidad* en el razonamiento que hacen los estudiantes para profesores de Matemáticas en la UPEL Maracay es recurrente y persistente, ya que incluso aquellos estudiantes para profesores de Matemática que recibieron formación en Probabilidad evidencian la presencia del sesgo. En este caso se determinó que el sesgo de equiprobabilidad se reflejaba al asignar, de manera a priori pero irracional, la misma probabilidad a diferentes eventos, aún y cuando no existen razones aparentes que hagan suponer que tal asignación es correcta. Pero no es la única forma en la cual dicho sesgo es exteriorizado por los sujetos de la investigación. Otra forma, tiene que ver con la aparente confusión entre la equiprobabilidad de los eventos o sucesos elementales, característica de los juegos de azar, con la no equiprobabilidad de los eventos compuestos asociados a un cierto experimento aleatorio y en conjunto los planteamientos asociados al estudio de este sesgo en los estudiantes para profesores de Matemática fueron los que más respuestas incorrectas tuvieron.

En relación con el razonamiento combinatorio, se concluye que el mismo es insuficiente, endeble y limitado; cuestión que repercute de manera directa en el cálculo de probabilidad bajo el enfoque clásico. Por ejemplo la prácticamente nula utilización de representaciones gráficas como diagramas de Venn, diagramas de árbol u otras representaciones pictóricas que sirvan como una posible vía de apoyo al conteo de casos posibles y favorables necesarios para el uso de la Regla de Laplace, se convierte en un obstáculo, así como la no diferenciación del orden en la disposición de arreglos, o la consideración de si el experimento se realiza con o sin reemplazo. El estudio de las respuestas de los sujetos evidencian que los mismos tienen dificultades a la hora de distinguir el tipo de arreglo (permutación, variación, combinación) identificar si todos los objetos son diferentes o no, o si el muestreo es con reemplazo o sin reemplazo, y si es o no determinante el orden en la disposición de los elementos. Por la estrecha relación que parece existir entre el razonamiento combinatorio y la determinación del espacio muestral, un bajo rendimiento en el primero afecta notablemente el estudio del número de los casos posibles, con lo cual el cálculo de la probabilidad a través de la Regla de Laplace, se ve reducido.

En torno a las situaciones de comparación de probabilidades, se observa un razonamiento adecuado en la mayoría de los informantes claves. En general, las estrategias erróneas empleadas en la comparación de probabilidades pueden ser una derivación del desconocimiento de parte de los datos del problema como podría serlo simplemente considerar a los numeradores. Por otro lado, también se ha evidenciado que no existe preferencia por las estrategias multiplicativas, la cual arroja una respuesta correcta en todos los casos donde se aplica. Se deriva de la investigación realizada, que las dificultades en el aprendizaje del enfoque clásico de la probabilidad no parece ser un problema sencillo de resolver, debido a que las creencias y concepciones erróneas, así como la presunción sin ningún argumento lógico de la hipótesis de equiprobabilidad, y el poco desarrollo del razonamiento combinatorio para la determinación del espacio muestral; afectan el uso de la Regla de Laplace.

REFERENCIAS

Azcárate, P. (2007). ¿Por qué no nos gusta enseñar estadística y probabilidad? [Documento en línea]. En P. Flores, R. Roa y R. Pozuelo (Comp.), *Actas de XII Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. Estadística y azar.* (pp.45-72).Granada.Disponible:http://www.earlyinstatistics.net.Azcarate_pilar_thales2006_Conferencia.doc [Consulta: 2014, Febrero 10]

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* [Revista en línea], 8 (003), 247-263. Disponible: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33508302.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Batanero, C., Godino, J. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of*

ISBN: 978-980-7464-17-8

Statistics Education [Revista en línea], 12(1). Disponible: http://www.amstat.org/publications/jse/batanero.html [Consulta: 2014, Agosto 12]

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2010). Research and Developments in Probability Education Internationally [Documento en línea]. En M. Joubert y P. Andrews. (Comp.), Proceedings of the British Congress for Mathematics Education. (pp. 41-48). Disponible: http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip30-1.pdf [Consulta: 2014, Febrero 10]

Cañizares, M deJ. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias* [Versión completa en línea], Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada. Disponible: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/tesis/CANIZARE.pdf [Consulta: 2014, Octubre 22]

Cañizares, M de J. y Batanero, C. (2005). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *Revista UNO* [Revista en línea], 14, 99-114. Disponible: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/comparacion.htm [Consulta: 2014, Febrero 10]

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics* [Revista en línea], 15(1), 1-24. Disponible: http://math.edu/math/en/Fischbein_and_Gazit.pdf [Consulta: 2014, Noviembre 10]

Garfield, J. y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in Probability and Statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education* [Revista en línea], 19 (1), 44-63. Disponible: http://www.stat.ucla.edu/~rakhee/attachments/garfieldahlgren.pdf [Consulta: 2014, Febrero 10]

Green, D. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years [Documento en línea] En D.R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G.M. Constable (eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783). Sheffield, U.K. Disponible: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots/Green1.pdf [Consulta: 2014, Febrero 10]

Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M de J. (1996). *Azar y Probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Guzmán, M. e Insunza, S. (2011). Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. *Educación Matemática* [Revista en línea], 23 (1), 63-95. Disponible: http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=405211273m[Consulta: 2014, Marzo 7]

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics* [Revista en línea], 6 187-205. Disponible: http://fplfachdidaktik.univie.ac.at/fileadmin/contributiongoetzrevisedj.pdf [Consulta:

2014, Abril 8]

Landín, P. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa* [Revista en línea], 12(3), 598-618. Disponible: http://revistas.pucsp.br.article/viewArticle/4842 [Consulta: 2014, Febrero 12]

León, N. (2007). Un recorrido de lo certero a lo probable por los caminos de la ciencia y de nuestra acción ciudadana. *Enseñanza de la Matemática* [Revista en línea], 12-16 (número extraordinario), 19-34 Disponible: http://asocolme.org/documento/revista.pdf [Consulta: 2014, Febrero 10]

Ortíz, J.J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L y Rodríguez, J. (2008). Comparación de probabilidades en maestros en formación. [Documento en línea]. En M. Bolea, M. Moreno y M. González (Comp.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* (pp. 267-276). Huesca. Disponible: http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2766163.pdf [Consulta: 2014, Marzo 7]

Ortíz, J.J., Mohamed, N. y Contreras, J. (2011). Significado personal del enfoque frecuencias de la probabilidad en profesores en formación [Documento en línea]. En P. Lestón (Comp.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 24* (pp. 988-997). México, DF. Disponible: http://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf [Consulta: 2014, Junio 20]

Sánchez, E. y Hernández, R. (2000). Exploración de Problemas Asociados a la Regla del Producto en Probabilidad [Documento en línea]. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 14* (pp. 386-395). Panamá. Disponible: http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2014.pdf [Consulta: 2014, Junio 20]

Salcedo, A. (2006a, Julio). *Statistics education in Venezuela: the case of elementary and middle school* [Documento en línea]. Ponencia presentada en el 7th International Conference on Teaching Statistics. Salvador, Brasil. Disponible: http://www.stat.auckland.ac.nz/iase/publications/17/C125.pdf [Consulta: 2014, Febrero 10]

Salcedo, A. (2006b). *Didáctica de la estocástica*. Caracas: Universidad Nacional Abierta. Vicerrectorado Académico.

Serradó, A., Cardeñoso, J.M. y Azcárate, P. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal* [Revista en línea], 4(2), 59-81. Disponible: http://www.stat.auckland.ac.nz/iase/serj/SERJ4serradoetal.pdf [Consulta: 2014, Febrero 10]

ISBN: 978-980-7464-17-8

ANEXO

CUESTIONARIO. Primera parte

A continuación se presentan 5 preguntas. Cada una de ellas con 4 opciones. Sólo una de estas opciones es la correcta. Encierre en un círculo la alternativa que Ud. considera como la correcta y justifique en las hojas adicionales el porqué de su elección.

1.- En la caja A se han introducido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han colocado 2 fichas negras y 1 ficha blanca. Si para ganar un premio debes sacar una ficha negra (sin ver dentro de la caja), ¿Cuál caja escogerías para realizar la extracción?

(a) La caja A da mayores posibilidades de obtener la ficha negra
(b) La caja B da mayores posibilidades de obtener la ficha negra
(c) Las dos cajas dan la misma posibilidad
(d) No se puede concluir nada al respecto

2.- Dos cajas contienen bolas negras y blancas de la siguiente manera: La caja T: 2 negras y 2 blancas y la caja P: 4 negras y 4 blancas. ¿Cuál de estas dos cajas (T o P) ofrece mayor posibilidad de extraer una bola negra

(a) La caja T (b) La caja P (c) La misma posibilidad (d) No se puede concluir nada al respecto

3.- Una clase tiene 29 estudiantes de los cuales 13 son chicos y 16 son chicas. Se escribe el nombre de cada estudiante en un trozo de papel. Se colocan los papeles en un sombrero. El profesor toma uno de los papeles sin ver. Si el profesor pregunta a qué sexo corresponde el nombre del papel, ¿cuál de las siguientes opciones responderías?

(a). Es más probable que se trate de un chico que de una chica
(b). Es más probable que se trate de una chica que de un chico
(c). Es igual de probable que se trate de una chica que de un chico
(d). No se puede concluir nada al respecto

4.- Cuando se lanzan simultáneamente 3 dados ¿Cuáles de los siguientes resultados es más fácil que ocurra?

(a). Obtener de alguna forma 5, 3 y 6 (b). Obtener de alguna forma dos veces el 5 y una vez el 3
(c). Obtener 3 veces el 5 (d). Todos estos resultados son igualmente probables

5.- Una ruleta está dividida en cinco áreas iguales, numeradas del 1 al 5 ¿Cuál de los siguientes resultados es más probable que ocurra al girar la ruleta tres veces

(a). Obtener exactamente 2, 1 y 5 (en ese estricto orden) (b). Obtener 2, 1 y 5
(c). Obtener de alguna forma dos veces el 1, y una vez el 5 (d). Las opciones (a), (b) y (c) son igual de probables

CUESTIONARIO. Segunda parte

Instrucciones: A continuación se le plantean 5 situaciones relacionadas con el cálculo de probabilidades. Para cada una de ellas justifique de manera escrita su respuesta a cada una de las preguntas que se le plantean en cada situación.

Problema 1

Hay un semáforo que regula el tráfico en cierto cruce y que puede encontrarse en uno de los siguientes estados: ROJO, VERDE y AMARILLO. ¿Cuál es la probabilidad de que en un instante determinado el estado del semáforo sea ROJO o VERDE?

Problema 2

Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión?

Problema 3

Suponga que participa en un juego que consiste en lanzar dos dados de simultánea, ¿Cuáles de los siguientes eventos consideras tú que es más probable que suceda: Obtener de alguna manera un 5 y un 6; u obtener 6 en los dos dados.

Problema 4

Santiago tiene una bolsa negra que contiene cuatro canicas, cada una de ellas está etiquetada con los siguientes dígitos: 4, 6, 8 y 1. El pide a un compañero que seleccione una canica de la bolsa y anote el número, y después regresa la canica a la bolsa. Este procedimiento se repite hasta completar 3 dígitos. ¿Cuántos números diferentes de 3 dígitos se espera que puedan obtener el amigo de Santiago?

Problema 5

Un juego de la feria consta de dos ruletas como las que se muestran en la figura. Un jugador gana un premio sólo si ambas flechas caen en el área sombreada, cuando se hace girar una vez cada una de las flechas. ¿Consideras que el juego anterior es equitativo?