SOBRE LA MULTIPLICACIÓN DE LAS RECTAS EN EL MARCO DE UN RECORRIDO DE ESTUDIO Y DE INVESTIGACIÓN (REI)

Viviana Carolina Llanos, María Rita Otero, María Paz Gazzola
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As., Tandil. Argentina.
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
vcllanos@exa.unicen.edu.ar, rotero@exa.unicen.edu.ar; mpgazzola@gmail.com;
Nivel Medio

Palabras clave: REI. Funciones. Nivel Medio.

Resumen
Se presentan los resultados obtenidos al cabo de seis implementaciones del inicio de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI) para el estudio de las Funciones Polinómicas de grado dos, en el ámbito de la escuela secundaria argentina. Todo el recorrido parte de la cuestión *¿Cómo operar con curvas cualesquiera, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?* La respuesta a dicha cuestión permite seguir diferentes recorridos de estudio dependiendo de las curvas que se elijan y de la operación entre las mismas. En este trabajo se proponen resultados para la multiplicación geométrica de dos rectas y se presentan algunos protocolos que permiten interpretar el nivel de construcción alcanzado por los estudiantes. Se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard.

Introducción
Uno de los problemas en la Enseñanza de la Matemática actual, es relativo a la *pérdida de sentido* de la matemática escolar. Chevallard (2004) considera que la *epistemología escolar* predominante elimina las *razones de ser* de las Organizaciones Matemáticas (OM) que se proponen estudiar en la escuela. Este fenómeno está estrechamente relacionado con otro, denominado por Chevallard (2004, 2007) *monumentalización del saber;* caracterizado por presentar a las OM como obras terminadas, como objetos ya creados, valiosos *per se*, reduciendo así la enseñanza y el aprendizaje de la matemática a la *"visita de obras cristalizadas y en cierto sentido, muertas"* (Chevallard 2004). Esta investigación aborda el problema de introducir en la escuela secundaria un dispositivo didáctico que permite estudiar y construir el conocimiento matemático de una manera no habitual.

Este cambio requiere de una modificación sustancial del contrato vigente, reemplazando la *pedagogía monumentalista* por otra, denominada por Chevallard (2004, 2007) *de la investigación* y *del cuestionamiento del mundo*. En la "nueva" pedagogía el saber es entendido como la respuesta a una pregunta matemática que tiene sentido para la comunidad de estudio, una pregunta "fuerte", que para ser respondida requerirá de la elaboración de respuestas parciales que en su conjunto aportarán de manera funcional al saber matemático. La respuesta de la TAD al problema de la *monumentalización* y la consecuente *pérdida de sentido* de las matemáticas escolares, se articula a partir del constructo *Recorrido de Estudio y de Investigación* (REI) (Chevallard, 2004, 2007). Los REI sitúan a las cuestiones *Q* como punto de partida de todo un proceso de estudio. Un aspecto esencial es relativo a la posibilidad de introducir estos dispositivos en el Nivel Secundario. En este trabajo, se describen algunos resultados de la inserción de un REI en clases de matemática habituales.

Marco teórico

Se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999), específicamente el constructo *Recorrido de Estudio y de Investigación* (REI) (Chevallard 2004, 2007, 2009). En un REI la cuestión generatriz Q_0 es el punto de partida del proceso de estudio. La evolución de dicha cuestión Q_0 requiere de la emergencia de otras cuestiones derivadas $(Q_i)_{1\leq i\leq n}$ que permiten la formación y el funcionamiento de los sistemas didácticos $S(X;Y;Q_i)_{1\leq i\leq n}$ cuya finalidad es la producción de una respuesta $R^{\heartsuit}$. Por las características que estos dispositivos tienen, en un REI el sistema didáctico queda definido por lo que Chevallard, (2009) denomina esquema *herbartiano desarrollado*: $[S(X;Y;Q)) \left\{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, ..., R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, ..., O_m\right\}](R^{\heartsuit}$.

Los REI deben poseer varias características e indicadores: es necesario partir del estudio de una cuestión generatriz y las respectivas cuestiones derivadas, a la cual es necesario aportar una respuesta; debe pasar por la constitución de un medio M, debe permitir obtener como resultado del proceso la elaboración, validación e institucionalización de una respuesta $R^{\heartsuit}$.

A partir de las características del constructo REI propuesto por la TAD, se abordan las preguntas de la investigación:

- ¿Cuáles son los alcances y limitaciones del recorrido implementado en el marco del REI para estudiar las funciones polinómicas de segundo grado?
- ¿Qué elementos permiten justificar la viabilidad de los dispositivos tipo REI en la escuela secundaria?

Metodología

La investigación es cualitativa, de corte exploratorio y carácter etnográfico. Se busca describir las características del dispositivo diseñado en una *pedagogía de REI* para la escuela secundaria, a partir de algunos resultados obtenidos de las implementaciones de dicho dispositivo. Los cursos seleccionados por el investigador pertenecen a 4^to^ Año de la secundaria. Todas las ejecuciones del dispositivo se realizaron en un mismo establecimiento educativo con estudiantes entre 14 y 15 años. Se realizaron en total seis implementaciones, dos por cada año, durante tres años consecutivos de las que participaron 163 estudiantes. Cada implementación permitió mejorar el diseño y las condiciones de estudio entre unas y otras ejecuciones. El profesor tuvo carácter de observador participante. Se realiza también observación no participante a partir de la colaboración de colegas del equipo de investigación. Se toma un audio general de cada curso durante todo el período de ejecución del dispositivo, se escanearon todos los protocolos escritos de todos los estudiantes, y además el profesor-investigador registra notas de campo antes y después de cada clase correspondiente a cada implementación.

Los REI:

El REI parte de la cuestión generatriz Q_0: *¿Cómo operar con curvas cualesquiera, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?* La respuesta a dicha cuestión puede originar diferentes recorridos de estudio, y en el marco de esta investigación se han ejecutado tres (Otero, Llanos, 2011), todos derivados de Q_0. Q_1: *¿Cómo multiplicar dos funciones afín, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?* que ha permitido estudiar las funciones polinómicas de segundo grado (Llanos, Otero, 2011); Q_2: *¿Cómo multiplicar más de dos rectas, o rectas y parábolas, o parábolas; si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?*, permite estudiar las funciones polinómicas (Llanos, Otero, Bilbao, 2011; Llanos, Bilbao, Otero, 2011); Q_3: *¿Cómo realizar el cociente entre funciones polinómicas, si sólo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?*, a partir de la cual se estudian las funciones racionales (Gazzola, Llanos, Otero, 2011). Además de los recorridos mencionados como respuesta a Q_0, pueden darse muchos otros, tantos como combinaciones entre curvas y operaciones puedan surgir.

Sobre la multiplicación geométrica de las rectas:
Como iniciación del recorrido se proponen tres situaciones que permiten construir las características de la representación gráfica para las funciones polinómicas de segundo grado. Las variantes entre estas se dan en las diferentes rectas que se multiplican:

Las funciones f y g están dadas por los gráficos de las Figuras. Todas las rectas A//B//C//D, son perpendiculares al eje x. La función $h = f \cdot g$.

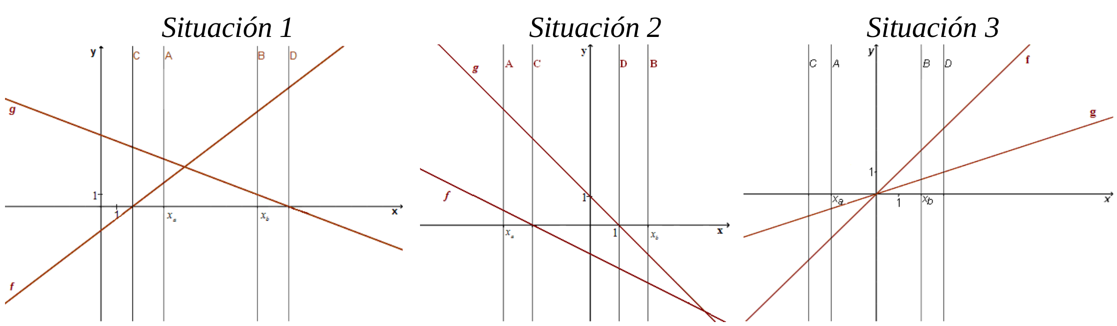

Figura 1: Gráficas correspondientes a las a las funciones f y g de las situaciones 1, 2 y 3

(a) ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para h? ¿Qué características de la gráfica de h podrías justificar?

(b) Para todo x_a *y* x_b *equidistantes de los ceros de cada función,* $\overline{CA} = \overline{BD}$ *¿Es verdad que* $h(x_a) = h(x_b)$*? ¿Podrías justificar?*

(c) ¿Qué triángulos tendrías que construir para calcular la multiplicación entre f y g en el eje de simetría, utilizando como lado de uno de los triángulos, la unidad?

A partir del problema propuesto, es posible explicitar las técnicas que permiten obtener los puntos notables de una parábola y la respectiva representación gráfica. En este caso se realiza a partir de la situación 1.

Características y puntos notables de *h*:
La información proporcionada en el problema permite obtener algunos puntos "seguros" y el análisis de los signos de *h*, a partir de los signos de *f* y *g*.

Partiendo de que $h = f \cdot g$, es posible identificar cuatro puntos (×) "los ceros y los unos"; y son seguros porque:

$$f(x_c)=0 \Rightarrow h(x_c)=0\cdot g(x_c)=0 \qquad f(x_i)=1 \Rightarrow h(x_i)=1\cdot g(x_i)=g(x_i)$$
$$g(x_d)=0 \Rightarrow h(x_d)=f(x_d)\cdot 0=0 \qquad g(x_b)=1 \Rightarrow h(x_b)=f(x_b)\cdot 1=f(x_b)$$

además los signos de las funciones *f* y *g*, determinan los signos de *h*.

$$\forall x \in (-\infty;\, x_c)\ \ f<0 \ \text{y}\ g>0 \Rightarrow\ h<0$$
$$\forall x \in (x_c;\, x_d)\ \ f>0 \ \text{y}\ g>0 \Rightarrow\ h>0$$
$$\forall x \in (x_d;\, +\infty)\ \ f>0 \ \text{y}\ g<0 \Rightarrow\ h<0$$

Es posible obtener otros puntos, pero resulta de fundamental importancia probar primero que $h(x_a)=h(x_b)$ para obtener también por construcción los puntos simétricos a los antes mencionados.

Para realizar la prueba por la simetría de la curva, es necesario construir triángulos semejantes sobre los segmentos x_a y x_b, que son puntos que equidistan de los ceros. Se nombra a $f(x_a)=y_a$, $f(x_b)=y_b$, $g(x_a)=y\acute{}_a$, $g(x_b)=y\acute{}_b$ y se construyen dos pares de triángulos semejantes determinados por estos segmentos. Además las longitudes $\overline{CA}=\overline{BD}$ se nombran como *z* y la que es común a ambos triángulos *w*, como se indica en la Figura 2

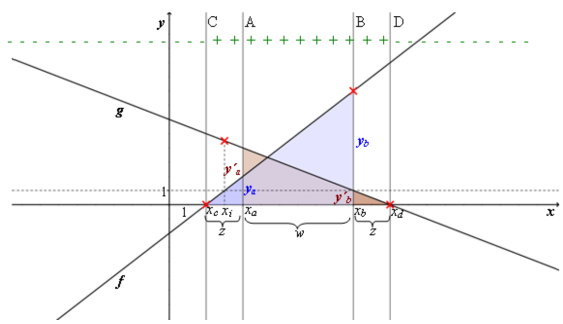

Figura 2: Identificación de los ceros y unos y ubicación de los triángulos semejantes sobre x_a y x_b

Como los pares de triángulos son semejantes, es posible por el teorema de Tales plantear la proporción entre los lados de los triángulos:

$$\begin{array}{l} Marrones: \dfrac{y\acute{}_a}{y\acute{}_b}=\dfrac{w+z}{z} \\ Azules: \dfrac{y_b}{y_a}=\dfrac{w+z}{z} \end{array} \Rightarrow \frac{y\acute{}_a}{y\acute{}_b}=\frac{y_b}{y_a} \Rightarrow y\acute{}_a\cdot y_a = y\acute{}_b \cdot y_b \Rightarrow g(x_a)\cdot f(x_a)=g(x_b)\cdot f(x_b);$$

$h(x_a)=h(x_b)$ $\forall x_a$ y $\forall x_b$ equidistantes de los ceros de *h*. Entonces *h* es simétrica, con respecto a un eje vertical que se encuentra en la mediatriz de los ceros de x_c y x_d respectivamente y se denomina "eje de simetría".

Esta prueba permite obtener otros puntos seguros, los simétricos de $h(x_i)$ y $h(x_b)$ respectivamente. Se agrega a la gráfica de la Figura 2, la construcción del eje de simetría y los puntos simétricos (**o**). Para aumentar la precisión sobre las características de la gráfica de *h*, es posible identificar otros puntos seguros: los múltiplos de la unidad ("los menos unos, los dos", etc.); identificados (♦) en la Figura 3. Por ejemplo, los menos unos y los dos quedan así justificados:

$$f(1) = -1 \Rightarrow h(1) = f(1) \cdot g(1) \Rightarrow h(1) = -1 \cdot g(1) \Rightarrow h(1) = -g(1)$$
$$f(x_a) = 2 \Rightarrow h(x_a) = f(x_a) \cdot g(x_a) \Rightarrow h(x_a) = 2 \cdot g(x_a)$$

Se obtienen los simétricos de estos puntos y lo mismo ocurre con el -1 y el 2 para la recta *g*. Podrían también identificarse otros puntos: los tres, los menos dos, etc. tantos como sea necesario.

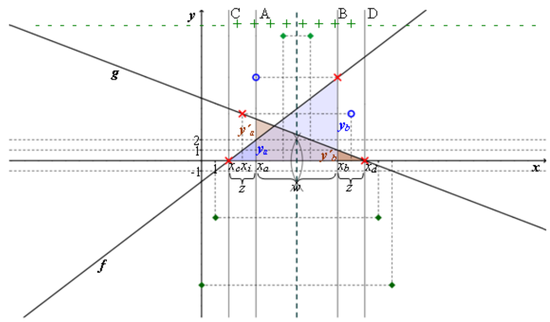

Figura 3: Representación de los puntos simétricos y los múltiplos de la unidad.

La técnica de construir cualquier múltiplo de la unidad tiene algunas limitaciones: sólo permite obtener los puntos seguros que son múltiplos de la unidad, y no permite por ejemplo, obtener el vértice de *h*. Este problema puede ser superado a partir del ítem c) que propone construir una técnica para obtener cualquier punto de *h*.

En la Figura 4 se identifican los segmentos de las rectas *f* y *g* en el eje de simetría y se los nombra *a* y *b* respectivamente. Con los segmentos *a*, *b* y la unidad se construyen dos triángulos semejantes y el segmento resultante se nombra *c*. Por construcción los triángulos son semejantes y por lo tanto sus lados proporcionales: $\frac{c}{a} = \frac{b}{1} \Rightarrow c \cdot 1 = a \cdot b$; c es el resultado de realizar la multiplicación entre los segmentos en el eje de simetría.

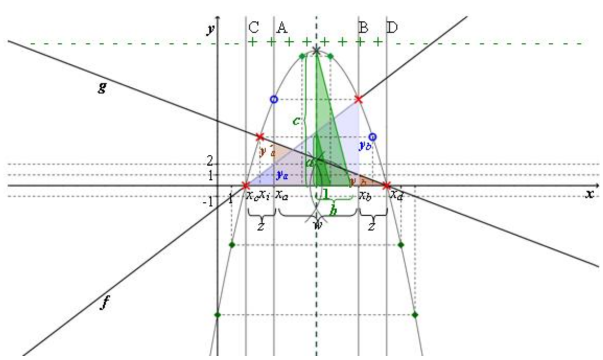

Figura 4: Construcción geométrica del vértice y representación gráfica de h

El problema de la multiplicación geométrica de las rectas requiere validar cada punto notable de la parábola. Todos los puntos son objeto de construcción. Los resultados obtenidos de las implementaciones permiten justificar la relevancia de las técnicas indicadas en este apartado.

Sobre la puesta en obra del REI:
La información de la que disponen los estudiantes en cada situación es la misma. Comienzan siempre por identificar algunos puntos notables y analizan también los signos de *h*. Una cuestión crucial, aunque más compleja para los alumnos, es relativa a la prueba por la simetría de la curva. En todas las implementaciones ha sido posible obtener dicha prueba, pero siempre con la dificultad de los estudiantes para identificar los segmentos que permiten construir los triángulos semejantes para probar la simetría de la curva por medio del Teorema de Tales. La otra cuestión crucial es relativa a la construcción del vértice. Esta técnica permite calcular la multiplicación entre dos segmentos en cualquier abscisa. En algunos casos deciden también realizar la construcción en otros puntos además del vértice, lo que permite aumentar la cantidad de puntos seguros y su certidumbre de obtener una gráfica más precisa para *h*.

La construcción correspondiente a la situación 1 se toma como caso para describir las técnicas que se requieren construir para obtener una respuesta al problema de la multiplicación geométrica de las rectas. En esa situación las rectas que se multiplican tienen pendientes con signos opuestos, *f* y *g* ceros distintos y *h* tiene un máximo. En la situación 2 las rectas tienen ceros distintos, pendientes con igual signo y *h* alcanza un mínimo. El protocolo A64 de la figura 5 corresponde a la situación 2. En este protocolo el estudiante identifica los signos, los puntos seguros (los ceros, unos, los menos dos y los menos uno), realiza la prueba por la simetría de la curva y la construcción geométrica del vértice. La gráfica que obtiene para *h* es muy aproximada, y cada punto seguro está justificado adecuadamente. Esta situación permite analizar los casos de las parábolas con ceros distintos, y en el vértice hay un mínimo.

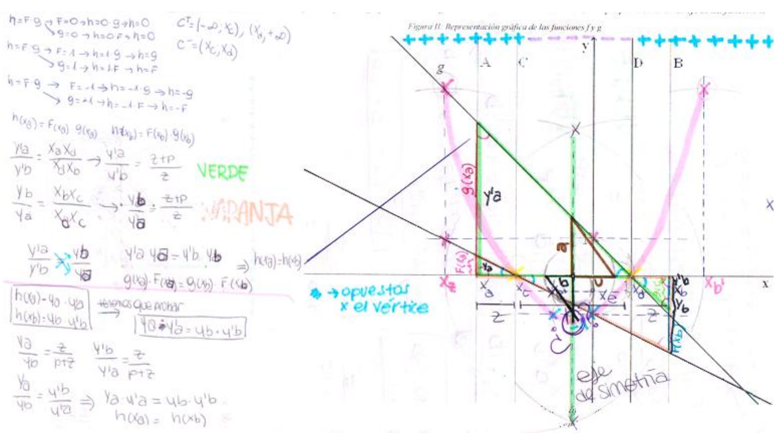

Figura 5: Protocolo correspondiente al alumno A64 Implementación 3.

La situación 3 introduce el problema de la multiplicidad de los ceros. En esta situación el vértice de la parábola coincide con los ceros de las rectas. Se analizan las características de la gráfica de *h* con dos ceros reales iguales. Los estudiantes continúan identificando los signos y los puntos seguros (ceros, unos y en algunos casos, los múltiplos de la unidad). En el protocolo A114 correspondiente a la figura 6, se interpreta la importancia de la técnica construida en principio para la obtención del vértice de la parábola que luego fue generalizada para cualquier punto de *h*. Este alumno consiguió identificar no sólo los signos y puntos seguros (ceros y unos); sino que además pudo agregar por construcción cuatro puntos más que le permitieron mejorar las características de la gráfica de *h*, utilizando la generalización de la construcción del vértice de *h* para cualquier otro punto.

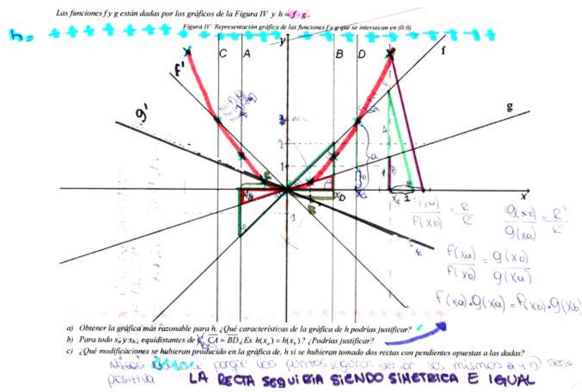

Figura 6: Protocolo correspondiente al alumno A136. Implementación 5

El recorrido propuesto permite estudiar las funciones polinómicas de segundo grado en cursos usuales de la escuela secundaria de una manera que se aparta de la tradicional. La generatividad de la cuestión inicial da sentido a los puntos notables de la parábola y a las características generales de la representación gráfica de dicha función. Además la generalidad de las técnicas construidas permite obtener la representación para cualquier par de rectas que se multipliquen, y construir tantas gráficas como se quieran estudiar.

Conclusiones

En este trabajo se presentan los resultados del inicio de un Recorrido de Estudio y de Investigación que permite estudiar las funciones polinómicas de segundo grado. El recorrido generado a partir de la multiplicación geométrica de las rectas permitió construir una representación gráfica aproximada para dicha función, justificando cada punto notable, y también analizando las diferencias entre las distintas representaciones que se obtienen. Entre los resultados más importantes relativos a dicha construcción se pueden mencionar:

· El papel que adquieren los puntos notables y el análisis de signos cuando sólo se dispone de la unidad en los ejes, y en este análisis, se destaca la relación entre los ceros y el cambio o no de signo.

· La justificación del vértice y la simetría de la curva resultan dos aspectos claves. En el marco de un REI la obtención de dichos puntos notables no pueden reducirse a una imposición ostensiva y es gracias al “retorno a la geometría” que es posible obtener por construcción el eje de simetría y el vértice de una parábola.

· La construcción del vértice no sólo es significativa por la relevancia que dicho punto adquiere en la representación gráfica de una parábola, sino también por la generalidad que dicha construcción tiene cuando se busca construir la ordenada de cualquier abscisa en una representación gráfica. Esta técnica permite multiplicar o dividir cualquier par de segmentos en cualquier representación gráfica, se trate o no de la multiplicación de dos rectas.

El recorrido de estudio propuesto para estudiar las funciones polinómicas de segundo grado avanzó y fue más allá de la multiplicación geométrica de las rectas. La multiplicación algebraica también permitió obtener resultados significativos. La potencialidad de los conceptos construidos desde las primeras situaciones y de los instrumentos adquiridos revela los alcances del dispositivo propuesto.

La limitación es relativa al problema de la inserción de estos dispositivos. Insertar un dispositivo tipo REI en la escuela secundaria no es tarea sencilla, pero es posible. La viabilidad del dispositivo propuesto en el marco de esta investigación no sólo está justificada por los resultados que el recorrido generado por la multiplicación de las rectas permite obtener, sino también por la diversidad de caminos de estudio posibles legitimados por la generalidad y el alcance de las técnicas construidas en el marco de esta investigación.

Referencias Bibliográficas

Chevallard, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19 (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Recuperado el 7 de Octubre de 2011 de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2006). *Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir*. Recuperado el 16 de Febrero de 2012 de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Recuperado el 23 de Febrero de 2012 de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER: problèmes et avancées*. Recuperado el 22 de Marzo de 2012 de http://yves.chevallard.free.fr/

Gazzola, M. P.; Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2011) Funciones racionales en la secundaria: primeros resultados de una actividad de estudio y de investigación (AEI). En M. R. Otero, et al. (Ed.). *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM)*, pp. 493-500. Tandil: NIECyT.

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2011) Evolución de una AEI como producto de investigación al cabo de seis implementaciones consecutivas. En M. R. Otero, et al. (Ed.). *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM)*, pp. 51-508. Tandil: NIECyT.

Llanos, V. C.; Otero, M. R.; Bilbao, M. P. (2011). Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI). *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC)*, 6 (1), 102-112.

Llanos, V. C.; Bilbao, M. P.; Otero, M. R. (2011). Implementación de una AEI relativa al campo conceptual de las funciones polinómicas en la escuela secundaria: perspectiva didáctica y cognitiva. En M. R. Otero, et al. (Ed.). *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM),* pp. 486-492. Tandil: NIECyT.

Otero, M. R.; Llanos, V. C. (2011). La enseñanza por REI en la escuela secundaria: desafíos, incertidumbres y pequeños logros al cabo de seis implementaciones. En M. R. Otero, et al. (Ed.). *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM),* pp. 15-23. Tandil: NIECyT.