

UNA MIRADA AL HORIZONTE MATEMÁTICO Y AL DISCURSO MATEMÁTICO DEL PROFESOR EN LA CLASE DE ÁLGEBRA

Marcel Pochulu, Leticia Sosa

marcelpochulu@hotmail.com - lsosa19@hotmail.com

Universidad Nacional de Villa María (Argentina) - Universidad Autónoma de Zacatecas (México)

Tema: I.7 - Los procesos de Comunicación en el aula de Matemática y su impacto sobre el Aprendizaje del Alumnado.

Modalidad: Comunicación Breve (CB)

Nivel educativo: Medio (11 a 17 años), Terciario, y Formación y actualización docente

Palabras claves: Discurso matemático, Horizonte Matemático, Enfoque Ontosemiótico, Álgebra.

Resumen

El trabajo tuvo por objetivo analizar las implicaciones matemáticas que tienen para los estudiantes, algunas expresiones del discurso del profesor que son válidas sólo en ciertos contextos. En particular, se consideraron las expresiones “Para resolver una ecuación hay que despejar la incógnita” y “Toda ecuación tiene solución” formuladas en escenarios de resolución de ecuaciones lineales. Con este fin, se analizó el discurso matemático presente en textos escolares de Matemática, clases impartidas por profesores cuando enseñan ecuaciones, y en las prácticas operativas y discursivas realizadas por estudiantes cuando resuelven ecuaciones.

Como marco teórico y metodológico se utilizaron algunos constructos que devienen de las investigaciones que han tomado al discurso matemático del profesor como foco de estudio, el sentido de los símbolos, conocimiento del horizonte matemático (HCK) del profesor y herramientas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática.

El estudio muestra que estas expresiones del discurso del profesor prevalecen fuertemente arraigadas en los estudiantes, provocando deficiencias en la construcción de significados de los objetos matemáticos involucrados. Con lo cual, resulta relevante cuestionarse qué conocimiento necesita el profesor en cuanto a las estructuras y conexiones intramatemáticas, de las cuales pudiera reflexionar y modificar su discurso matemático en la enseñanza.

Introducción

A pesar de la importancia que tienen las ecuaciones en el currículo de Matemática, por diversas razones los estudiantes que ingresan a la universidad no suelen contar con muchos recursos para hallar el conjunto solución, ni han logrado construir un significado adecuado de ellas, como objeto matemático. En este sentido, cuando se les plantean situaciones problemas a los estudiantes, cuya resolución involucra ecuaciones, se advierte que hacen un abuso de manipulaciones algebraicas, prescindiendo de toda lectura de las expresiones simbólicas, lo que impide captar significados y agregarle niveles de conexión y razonabilidad a los resultados (Arcavi, 2007).

Investigaciones como las de Kieran (1992), Dubinsky (1997), Filloy & Rojano (1989), Hercovics & Kieran (1980), Ribeiro (2007), Abrate, Pochulu y Font (2009), Sierpinska, Bobos & Pruncut (2011), Kasmer & Kim (2011), entre otros, ponen en evidencias que las dificultades que tienen los estudiantes en Álgebra Lineal, son debidas a la naturaleza epistemológica de los contenidos, a los diseños didácticos que implementan los profesores y al uso de diferentes tipos de lenguajes empleados en la clase.

Seguramente, cuando el profesor realiza los diseños didácticos que pondrá en marcha en la clase y el uso de distintos tipos de lenguaje cuando los gestiona, se hace eminente que conozca la trayectoria del contenido matemático que va a explicar a sus alumnos, a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones intramatemáticas. En este sentido, estamos hablando del conocimiento del horizonte matemático (HCK) propuesto por Ball, Thames y Phelps¹ (2008). Este conocimiento del profesor incluye, según Sosa (2011), las habilidades que tienen los profesores para saber:

[...] las similitudes (las relaciones) entre varios conceptos matemáticos de un mismo tema o unidad; saber cómo un contenido está relacionado con otro más general (incluso aunque no aborde esa forma más general en ese grupo porque el programa no lo incluye); saber cómo concretar un contenido con otro más específico; saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos anteriores o posteriores; [...]. (p.470).

En este caso, estamos hablando de que cuando el profesor diseña y explica un tema de Álgebra Lineal, conozca por ejemplo, la diferencia entre incógnita, variable y parámetro, así como las propiedades matemáticas que determinan la validez matemática al momento de manipular con las ecuaciones lineales y que establecen incluso estructuras algebraicas (grupo, anillo, campo). Con esto, no estamos diciendo que el profesor deba explicarles todo el horizonte matemático² a sus alumnos, sino que el hecho de poseer ese conocimiento le puede permitir reflexionar sobre su propio discurso matemático y modificarlo al enseñar un contenido matemático concreto.

En este trabajo, centraremos la atención en estos aspectos señalados, pues estamos interesados en analizar las implicaciones matemáticas que tienen para los estudiantes, algunas expresiones del discurso del profesor que son válidas sólo en ciertos contextos del Álgebra Lineal. En particular, se consideraron las expresiones “*Para resolver una*

¹ Cabe mencionar que el HCK (*Horizont Content Knowledge*) es uno de los 6 subdominios del modelo del MKT (*Mathematics Knowledge for Teaching*) propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008).

² Nótese que aunque los 6 subdominios del MKT son importantes, en este documento estamos enfocándonos sólo en el HCK.

ecuación hay que despejar la incógnita” y “Toda ecuación tiene solución” formuladas en escenarios de resolución de ecuaciones lineales.

Acerca de los aspectos teóricos y metodológicos de la investigación

El trabajo se encuadra dentro de la Teoría de Funciones Semióticas, una de las herramientas provistas por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) de Godino, Batanero & Font (2007), como línea de investigación en Didáctica de la Matemática.

El EOS entiende el significado de un objeto matemático en términos de lo que se puede hacer con él en una práctica matemática. Esta correspondencia se realiza a través de una función semiótica que tiene por antecedente a un objeto matemático (o la expresión que puede designarlo), y como consecuente al sistema de prácticas matemáticas realizadas por una persona (o compartida en el seno de una institución) ante una cierta clase de situaciones-problemas.

Cuando un sujeto realiza una práctica matemática activa un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos primarios que componen un objeto matemático: situación-problema, lenguaje o elementos lingüísticos, conceptos o definiciones, proposiciones o propiedades, procedimientos o técnicas, y argumentos. Estos seis objetos primarios se relacionan entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático. Las configuraciones pueden ser epistémicas o instruccionales si son redes de objetos institucionales, o cognitivas si representan redes de objetos personales. Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional.

En consecuencia, el significado de un objeto, considerado como “expresión” en una función semiótica, será el “contenido” de esta función semiótica, y ha sido establecido por un sujeto siguiendo una regla o criterio de correspondencia.

Este constructo, descripto sucintamente, fue utilizado en las tres fases de la investigación que implicaron el análisis de:

(a) El discurso matemático presente en los textos escolares de Matemática que son recomendados por los profesores de escuela secundaria, cuando abordan el tema ecuaciones. En particular, nos enfocamos en detectar la presencia de explicaciones que promueven la concepción de que *“Para resolver una ecuación hay que despejar la incógnita”* y *“Toda ecuación tiene solución”*.

(b) Clases o explicaciones impartidas por profesores o estudiantes cuando enseñan a resolver ecuaciones algebraicas. Las mismas se obtuvieron de los vídeos de *youtube* que presentan un elevado número de reproducciones por grupos demográficos comprendidos entre los 13 y 17 años (datos obtenidos de las estadísticas del vídeo). Para estas clases y/o explicaciones -muchas de ellas en contextos reales y con estudiantes- también se buscó la presencia de expresiones que se interpretan como: *“Para resolver una ecuación hay que despejar la incógnita”* y *“Toda ecuación tiene solución”*.

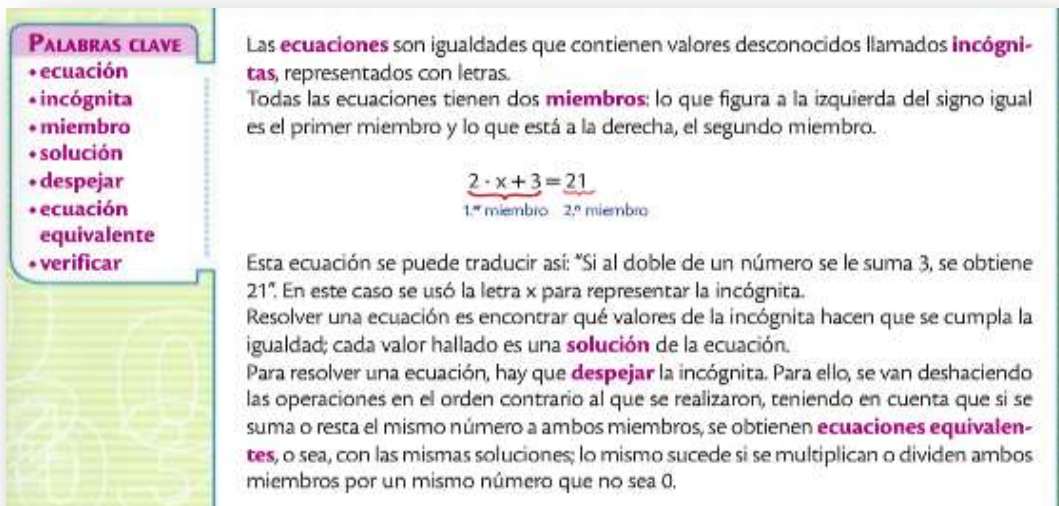
(c) Las prácticas matemáticas (operativas y discursivas) que efectuaron 55 estudiantes aspirantes a ingresar a una carrera de Ingeniería, que participaron voluntariamente de la investigación, y a quienes se les propuso la realización de un conjunto de tareas referidas a ecuaciones algebraicas. Estructuramos las configuraciones cognitivas estableciendo funciones semióticas entre el conglomerado de prácticas que son capaces de realizar con el objeto matemático ecuaciones, y el significado que pudieron construir acerca del mismo. Como no es posible reconstruir los procesos didácticos que involucraron en años anteriores a los estudiantes, partimos del supuesto de que los textos y las clases de Matemática que tuvieron guardan muchas similitudes con las muestras consideradas en este trabajo. En consecuencia, al efectuar un análisis sistémico de las tres fases de la investigación, permite establecer implicaciones que podrían tener algunas expresiones del discurso del profesor y presentes en los textos escolares -válidas sólo en ciertos contextos del Álgebra Lineal- en los significados personales construidos por los estudiantes sobre las ecuaciones algebraicas.

Resultados y discusión

Analizamos las prácticas operativas y discursivas que están presentes en 64 textos escolares de Matemática, donde se aborda la resolución de ecuaciones algebraicas, entre ellas las lineales, como objeto matemático. Hallamos que todos los textos analizados promueven encontrar el conjunto solución de una ecuación lineal despejando la incógnita, y utilizando dos procedimientos básicos: propiedades de la igualdad, o por transposición de términos. También advertimos que la mayoría de los textos que

plantean la resolución de ecuaciones a través de las propiedades de la igualdad, terminan induciendo el uso de la transposición de términos como procedimiento principal (ver ejemplos y evidencias en Anexo I).

En la mayoría de los textos se expresa explícitamente que *“Para resolver una ecuación hay que despejar la incógnita”* (ver una evidencia de lo expresado en la Figura 1), o inducen a esta creencia a través de las tareas que se proponen.



PALABRAS CLAVE

- ecuación
- incógnita
- miembro
- solución
- despejar
- ecuación equivalente
- verificar

Las **ecuaciones** son igualdades que contienen valores desconocidos llamados **incógnitas**, representados con letras.
 Todas las ecuaciones tienen dos **miembros**: lo que figura a la izquierda del signo igual es el primer miembro y lo que está a la derecha, el segundo miembro.

$$2 \cdot x + 3 = 21$$

1.º miembro 2.º miembro

Esta ecuación se puede traducir así: “Si al doble de un número se le suma 3, se obtiene 21”. En este caso se usó la letra *x* para representar la incógnita.
 Resolver una ecuación es encontrar qué valores de la incógnita hacen que se cumpla la igualdad; cada valor hallado es una **solución** de la ecuación.
 Para resolver una ecuación, hay que **despejar** la incógnita. Para ello, se van deshaciendo las operaciones en el orden contrario al que se realizaron, teniendo en cuenta que si se suma o resta el mismo número a ambos miembros, se obtienen **ecuaciones equivalentes**, o sea, con las mismas soluciones; lo mismo sucede si se multiplican o dividen ambos miembros por un mismo número que no sea 0.

Figura 1: Expresiones del discurso matemático en un texto escolar de Matemática

En 3 textos escolares se advirtió un intento por parte de los autores por promover una lectura de las expresiones simbólicas, sólo para un reducido número de tareas, las cuales mostraban procedimientos más intuitivos para encontrar el conjunto solución de una ecuación lineal. De todos modos, todas las tareas que se proponen tienen un conjunto solución único, lo que refuerza la creencia de que *“Toda ecuación tiene solución”*.

En cuanto a clases o explicaciones referidas a la resolución de ecuaciones lineales, se hizo el análisis de las prácticas operativas y discursivas registradas en 18 vídeos que tenían entre 20.000 y 1.027.000 reproducciones por parte de los usuarios.

El procedimiento principal que promueven para hallar el conjunto solución de una ecuación lineal, también es la transposición de términos (como en los textos escolares) y lo hacen planteando ecuaciones cuya solución es única. Estas prácticas matemáticas ayudan a fortalecer la idea de que *“Toda ecuación tiene solución”*. Además, las prácticas discursivas resaltan el hecho de que *“Para resolver una ecuación hay que*

despejar la incógnita". Por ejemplo, en Asesoriasdematecom (2010), con más de 522.000 reproducciones, se expresa que "la resolución de ecuaciones de primer grado básicamente es despejar la variable", o en Mathsuperate (2010), con más de 79.900 reproducciones, donde se alude a que "la misión importante que hay que tener en una ecuación, es exactamente, es dejar la variable sola, que nada esté cerca de ella". En Sánchez (2009), con más de 43.900 reproducciones, se argumenta que "el propósito es dejar la variable sola para saber qué valor la hace cierta".

De manera indirecta, también tenemos expresiones del discurso que expresan esta noción, como en Grillo (2007), con más de 1.027.000 reproducciones, cuando explica que para la ecuación $8x - 2 = 6x + 3$ "lo primero que tenemos que hacer es traer $6x$, que está en el segundo miembro, al primer miembro" y luego, después de realizar algunas transposiciones de términos, "así debería estar siempre, las incógnitas en el primer miembro y los términos conocidos en el segundo".

En Rigoberto (2007), con más de 823.000 reproducciones, se plantea la resolución de la ecuación $2x+4=8$, y se indica que "primero tendríamos que dejar el término que contiene la variable a la izquierda y pasar este término, que está sumando, a la derecha del igual"; o en Marcelrzmuo (2009), con más de 102.700 reproducciones, se aclara "como ustedes saben, estimados y estimadas, las x se van a pasar del lado izquierdo".

Analizamos a continuación algunas prácticas operativas y discursivas de los 55 estudiantes, al proponérseles la resolución de ecuaciones, y realizamos una interpretación del significado construido a través de una función semiótica.

Cuando se les propuso a los estudiantes la resolución de ecuaciones cuyo conjunto solución era vacío, todos procedieron a realizar manipulaciones algebraicas, con el fuerte convencimiento de que "*Para resolver una ecuación hay que despejar la incógnita*" y "*Toda ecuación tiene solución*" (ver algunas evidencias en Anexo 2). Asimismo, ninguno logró interpretar la información resultante de la manipulación algebraica (procedimiento) cuando la ecuación tenía un conjunto solución vacío, o con infinitas soluciones.

Durante las entrevistas, se les pidió a los estudiantes que explicaran cómo procedían para encontrar el conjunto solución de una ecuación, y las argumentaciones son

similares a las que encontramos en los textos escolares y explicaciones dadas en los vídeos. Por ejemplo, para hallar el conjunto solución de la ecuación $3x - 1 = 5$, una estudiante expresó:

Primero debo analizar la ecuación para determinar qué es lo que me conviene hacer para lograr obtener un resultado concreto de la x . Entonces debo comenzar a pasar los números independientes con el signo opuesto y resolverlos con el que se encuentra del otro lado. Luego logro que me quede mi variable sola en compañía de su coeficiente. Finalmente pasamos hacia el otro término con la operación inversa el coeficiente. Si está multiplicando lo pasamos dividiendo o viceversa. Así obtenemos un número concreto de x .

En todos los casos daban argumentos vinculados con procedimientos algebraicos, y no lograban explicar lo que acontecía cuando obtenían expresiones donde no estaba presente la variable. Hacían alusión a que seguramente se habían equivocado en algún paso y que no se daban cuenta cuál era.

A modo de cierre

El estudio muestra que estas expresiones del discurso del profesor y libros escolares prevalecen fuertemente arraigadas en los estudiantes, provocando deficiencias en la construcción de significados de los objetos matemáticos involucrados. En muchas ocasiones, el profesor ante su realidad escolar (clase tradicional, libros de texto o videos en *youtube* que apoyan y fomentan la enseñanza a través del discurso matemático válido sólo para contextos reducidos), se limita a ver más allá de ese tópico, lo cual puede impedirle reflexionar sobre las implicaciones matemáticas de su propio discurso matemático (sobre las afectaciones de su discurso en el aprendizaje de sus alumnos) y modificarlo al enseñar un contenido matemático concreto o rediseñar una tarea. Por tanto, se requiere que el profesor sea reflexivo y crítico en cuanto al propio discurso matemático a fin de mejorar su propia práctica docente. Nuestra apuesta está basada, en concordancia con Ball y Bass (2009), en que el HCK puede ayudar al profesor a tener una perspectiva más amplia del contenido matemático a enseñar y eso le ayudaría a tener más herramientas matemáticas al momento de explicarlo a sus alumnos.

Bibliografía


Abrate, R., Pochulu, M. y Font, V. (2009). Metáforas en contextos de resolución de ecuaciones. En M. Pochulu, R. Abrate y S. Visokolskis (Eds), *La Metáfora en la Educación: descripción e implicaciones* (pp.95-126), Villa María: Eduvim.


- Asesoriasdematecom. (2010, agosto 13). *Resolución de ecuaciones de primer grado* [Archivo de video]. Recuperado el 21 de julio de 2013 de <http://www.youtube.com/watch?v=4h2-GpUcqwQ>.
- Arcavi, A. (2007). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 44, 59-75.
- Ball, D.L. & Bass, H. (2009, febrero). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Paper presented at The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference, University of California, Los Angeles.
- Ball, D.L.; Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first lineal algebra course. En D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins & W. Watkins (Eds.), *Resources for teaching linear algebra* (pp. 85-106), Washington: MAA.
- Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Godino, J. D; Batanero, C & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM*, 39(1/2), 127-125.
- Grillo, C. (2007, diciembre 13). *Ecuaciones de primer grado sencillas* [Archivo de video]. Recuperado el 21 de julio de 2013 de <http://www.youtube.com/watch?v=NDEwNJ7M0eY>.
- Hercovics, N. & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, 73(8), 572-580.
- Kasmer, L.A. & Kim, O.K. (2011). The nature of student predictions and learning opportunities in middle school algebra. *Educ Stud Math*, 79, 175-191.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). Macmillan. New York.
- Marcelzrmuo. (2009, septiembre 10). *Despeje de una ecuación* [Archivo de vídeo]. Recuperado el 21 de julio de 2013 de <http://www.youtube.com/watch?v=COwqcfAn3Q0>.
- Mathsuperate. (2010, agosto 05). *Ecuaciones con suma y resta* [Archivo de video]. Recuperado el 21 de julio de 2013 de <http://www.youtube.com/watch?feature=endscreen&NR=1&v=UbrMCU-XhOg>.
- Ribeiro, A. J. (2007). *Equação e seus multissignificados no ensino de matemática: contribuições de um estudo epistemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Pontificia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.
- Rigoberto. (2007, octubre 03). *Video de ecuaciones* [Archivo de video]. Recuperado el 21 de julio de 2013 de http://www.youtube.com/watch?v=wwlHv_9yajo
- Sánchez, A. (2009, mayo 20). *Resolver ecuaciones lineales* [Archivo de video]. Recuperado el 21 de julio de 2013 de http://www.youtube.com/watch?v=zdeqL0d_Hgs.
- Sierpiska, A.; Bobos, G. & Pruncut, A. (2011). Teaching absolute value inequalities to mature students. *Educ Stud Math*, 78, 275-305.
- Sosa L. (2011). *Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Huelva. España. Recuperada el 26 de julio de 2013 de <http://hdl.handle.net/10272/4509>.

Anexo I


Procedimientos de resolución de ecuaciones presentes en los libros de texto

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN $x + a = b$


 Vamos a resolver la ecuación $x + 5 = 9$.


 $x + 5 = 9$

- Para despejar la x , debemos eliminar el 5 que está sumando en el primer miembro.



 $x + 5 - 5 = 9 - 5$


- Restamos 5 a cada miembro.

$x = 4$


- La x queda despejada. La solución es $x = 4$.

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN $x - a = b$



 Vamos a resolver la ecuación $x - 3 = 5$.


 $x - 3 = 5$

- Para despejar la x , debemos eliminar el -3 del primer miembro.


 $x - 3 + 3 = 5 + 3$

- Sumamos 3 en cada miembro.


 $x = 8$

- La solución es $x = 8$.

Figura 2: Resolución de una ecuación por propiedades

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación lineal

Resolver $5x - 6 = 3x$.

Solución: Empezamos por dejar los términos que implican a x en un lado y las constantes en el otro.

$$\begin{aligned}
 5x - 6 &= 3x, \\
 5x - 6 + (-3x) &= 3x + (-3x) && \text{(sumando } -3x \text{ a ambos miembros),} \\
 2x - 6 &= 0 && \text{(simplificando, esto es, operación 3),} \\
 2x - 6 + 6 &= 0 + 6 && \text{(sumando 6 a ambos miembros),} \\
 2x &= 6 && \text{(simplificando),} \\
 \frac{2x}{2} &= \frac{6}{2} && \text{(dividiendo ambos miembros entre 2),} \\
 x &= 3.
 \end{aligned}$$

Figura 3: Resolución de una ecuación por propiedades

Ecuaciones

Para resolver ecuaciones de primer grado es indispensable seguir un plan de trabajo.

Ejemplo:

$$(\sqrt{x-5})^2 = 25$$

$$\sqrt{x-5} = \sqrt{25} \longrightarrow \text{la potencia al cambiar de miembro se transforma en la operación opuesta}$$

$$\sqrt{x-5} = 5 \longrightarrow \text{reducimos la raíz}$$

$$\sqrt{x} = 5 + 5 \longrightarrow \text{pasaje de término}$$

$$x = 10^2 \longrightarrow \text{la raíz, al cambiar de miembro, se transforma en potencia}$$

x = 100

Figura 4: Resolución de una ecuación por transposición de términos

RECUERDEN

Si $x - 3 = 7$, entonces si sumamos 3 a ambos miembros obtenemos otra igualdad
 $x - 3 + 3 = 7 + 3$
 Reducimos términos y nos queda: $x = 7 + 3$
 El 3 pasó al otro miembro con la operación inversa.

Sustracción
 \updownarrow
 Adición

RECUERDEN

Si $x \cdot 3 = 18$, entonces, si dividimos ambos miembros por 3 obtenemos otra igualdad
 $x \cdot 3 : 3 = 18 : 3$
 Simplificamos y nos queda:
 $x = 18 : 3$

El 3 pasó al otro miembro con la operación inversa.

Multiplicación
 \updownarrow

Figura 5: Resolución de una ecuación donde se induce a la transposición de términos

Resolvemos las siguientes ecuaciones

$x + 100 = 250$
Restaremos 100 a ambos miembros.

1.º MIEMBRO	2.º MIEMBRO
-	x + 100 = 250
100	= 100
x + 100 - 100 = 250 - 100	
x = 150	

Gracias a la propiedad uniforme logramos dejar sola a la x.
 En el segundo miembro quedó el 100 restando.
 Habitualmente, el mecanismo es pasar el número 100, que se encontraba sumando en el primer miembro, al segundo miembro, restando.

$x - 100 = 800$
Sumaremos 100 a ambos miembros.

1.º MIEMBRO	2.º MIEMBRO
+	x - 100 = 800
100	= 100
x - 100 + 100 = 800 + 100	
x = 900	

Gracias a la propiedad uniforme logramos dejar sola a la x.
 En el segundo miembro quedó el 100 sumando.
 Habitualmente, el mecanismo es pasar el número 100, que se encontraba restando en el primer miembro, al segundo miembro, sumando.

Figura 6: Resolución de una ecuación donde se induce a la transposición de términos

Anexo II

Procedimientos de resolución realizados por alumnos para ecuaciones con conjunto solución vacío

$$\textcircled{7} \quad 2(x-2) + 3x + 1 = 5x - 3$$

$$2x - 4 + 3x + 1 = 5x - 3$$

$$-4 + 1 + 3 = 5x - 2x - 3x$$

$$0 = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{x-3}{x-1} = 0$$

$$x-3 = 0$$

$$x = 0+3$$

$$\boxed{x = 3}$$

Figura 7: Resolución del Alumno A

$$4) \quad 1 + \sqrt{x-2} = -3$$

$$\sqrt{x-2} = -3 - 1$$

$$\sqrt{x-2} = -4$$

$$x-2 = -4^2$$

$$x-2 = 16$$

$$x = 16 + 2$$

$$\boxed{x = 18}$$

Figura 8: Resolución del Alumno B

$$4) \quad 1 + \sqrt{x-2} = -3$$

$$\sqrt{x-2} = -3 - 1$$

$$\sqrt{x-2} = -4$$

$$x-2 = -4^2$$

$$x-2 = 16$$

$$x = 16 + 2$$

$$x = 18$$

$$5) \quad \frac{3}{x-1} + 2 = 2$$

$$\frac{3}{x-1} = 2 - 2$$

$$\frac{3}{x-1} = 0$$

$$3 = 0 \cdot (x-1)$$

$$\frac{3}{0} = x-1$$

$$3 = x-1$$

$$3 + 1 = x$$

$$4 = x$$

Figura 9: Resolución del Alumno C

④ $1 + \sqrt{x-2} = -3$
 $\sqrt{x-2} = -3-1$
 $x-2 = (-4)^2$
 $x = 16+2$
 $x = 18$

⑤ $\frac{3}{x-1} + 2 = 2$
 $\frac{3}{x-1} = 2-2$
 $\frac{3}{x-1} = 0$
 $3 = 0 \cdot (x-1)$
 $3 = 0$

Figura 10: Resolución del Alumno D

④ $2(x-2) + 3x + 1 = 5x - 3$
 $2x - 4 + 3x + 1 = 5x - 3$
 $2x - 4 + 3x + 1 - 5x + 3 = 0$
 $0x - 0 = 0$
 $0x - 0 = 0$
 $0x = 0 + 0$
 $x = 0 : 0$
 $x = 0$

Figura 11: Resolución del Alumno E

⑤ $\frac{3}{x-1} + 2 = 2$
 $\frac{3}{x-1} = 2-2$
 $\frac{3}{x-1} = 0$
 $3 = 0 \cdot (x-1)$
 $3 = 0$ No es una igualdad

Figura 12: Resolución del Alumno F

④ $1 + \sqrt{x-2} = -3$
 $\sqrt{x-2} = -3-1$
 $x-2 = (-4)^2$
 $x = 16+2$
 $x = 18$

$1 + \sqrt{x-2} = -3$
 $1 + x - 2 = (-3)^2$
 $x-1 = 9$
 $x = 10$
 NO TOMAR EN CUENTA

Figura 13: Resolución del Alumno G