

## **CRITERIOS PARA LA REDEFINICIÓN DE UN INSTRUMENTO QUE PERMITA EVALUAR EL SIGNIFICADO QUE LE OTORGAN LOS ESTUDIANTES A DETERMINADOS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS**

María Laura Distéfano, María Andrea Aznar, Marcel David Pochulu, Emilce Moler  
mldistefano@fi.mdp.edu.ar – maznar@fi.mdp.edu.ar – marcelpochulu@hotmail.com –  
egmoler@yahoo.com.ar

Universidad Nacional de Mar del Plata, Universidad Nacional de Villa María – Argentina

Tema: I.7

Modalidad: CB

Nivel: Terciario

Palabras clave: diseño de un instrumento – símbolos matemáticos - significado

### **Resumen**

*En este trabajo se realiza un análisis retrospectivo de las diferentes fases que ha tenido la construcción de un instrumento, el cual estaba destinado a recabar información sobre el significado y sentido que le otorgan los estudiantes a algunos símbolos matemáticos que aparecen frecuentemente en las matemáticas de los primeros años de las carreras universitarias.*

*El objetivo de este análisis fue determinar algunos criterios que puedan ser útiles para mejorar la idoneidad y fiabilidad del diseño inicial de un instrumento -cuyo fin sea el de evaluar significados- y de esta forma, reducir los ciclos de rediseño. Como marco teórico y metodológico del trabajo se utilizaron algunas herramientas e indicadores de idoneidad del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática.*

*A partir del análisis realizado sobre los rediseños y modificaciones que se le efectuaron al instrumento, en las pruebas piloto que se llevaron a cabo con estudiantes de ingeniería, se describen criterios para la redacción de las consignas, la distribución y cantidad de las mismas, el tipo de tareas que se propone, el contenido matemático involucrado, entre otros.*

### **Introducción**

Gran parte de las investigaciones de Educación Matemática requieren del diseño de instrumentos como test, cuestionarios, encuestas o evaluaciones que buscan obtener evidencias que sostengan las hipótesis que se tienen en el trabajo. Estas hipótesis, a su vez, suelen aludir a juicios de valor sobre variables de análisis o constructos que no son observables directamente, y por tal razón, el instrumento debiera medir con precisión, estabilidad y coherencia aquello que es necesario medir y no otras “cosas”. En síntesis, la fiabilidad y validez se vuelven elementos centrales en estos instrumentos, como lo expresan Díaz, Batanero y Cobo (2003).

En este trabajo se presenta un análisis retrospectivo de las diferentes fases que tuvo la construcción de un instrumento. Esto se realiza con una doble finalidad. Por un lado, se describen las fases seguidas para dotarlo de fiabilidad y validez utilizando una línea teórica de la Didáctica de la Matemática, y como fruto de ese proceso, se enuncian

algunos criterios para realizar diseños, ajustes y redefiniciones que van más allá del caso particular considerado. Por otro lado, se ofrece un instrumento destinado a recabar información sobre el significado y sentido que le otorgan los estudiantes a algunos símbolos matemáticos que aparecen frecuentemente en las matemáticas de los primeros años de las carreras universitarias.

### **Fundamentos teóricos**

Como marco teórico y metodológico del trabajo se utilizaron algunas herramientas e indicadores de idoneidad del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) que sucintamente describimos.

El EOS considera a la *práctica matemática* como un concepto central, definida como cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos (Godino, Batanero y Font, 2009). A partir de este concepto surge la noción de *significado*, definido como “el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas” (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.7). Puesto que no siempre existirá concordancia entre los significados otorgados por los distintos actores que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, se generan diferencias que dan lugar a lo que se denomina *conflicto semiótico*. Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones).

Plantear el aprendizaje en términos de significados, otorga una relevancia central al proceso mediante el cual un sujeto crea un significado vinculando una expresión con un contenido a través de una *función semiótica*. Esta función es establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia. De esta manera, la función semiótica destaca el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática y sirve para explicar algunas dificultades y errores de los alumnos, dado que los conflictos que causan equivocaciones en los alumnos no resultan de su falta de conocimientos, sino que son producto de no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica (Godino, Batanero y Font, 2009).

Para evaluar de manera integral un proceso de instrucción surge la noción de *idoneidad didáctica*, entendida como un criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo a través de la cual se efectúa la mencionada

valoración (Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi, 2007). Para dicha evaluación global, Godino (2011) propone seis criterios parciales de idoneidad, con sus correspondientes indicadores, atendiendo a las distintas dimensiones que caracterizan y condicionan los procesos instruccionales: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica.

### **Características generales del instrumento**

El instrumento al que se hace referencia en este trabajo es una herramienta de evaluación de una investigación cuyo objetivo general es describir y caracterizar el proceso de construcción de significados de símbolos algebraicos, en estudiantes universitarios. En este contexto, con el instrumento se pretenden evaluar qué significados han construido los alumnos respecto de los símbolos de pertenencia, inclusión, conjunción, disyunción y cuantificadores.

Dos versiones del instrumento fueron administradas en años sucesivos; la segunda versión se obtuvo en base a una reformulación de la primera. Algunas características de estas versiones son expuestas en la Tabla 1. Los protocolos completos se presentan en los anexos 1 y 2 respectivamente.

Tabla 1. Características de cada versión del instrumento

	PRIMERA VERSIÓN	SEGUNDA VERSIÓN
Año	2012	2013
Carreras	Primer año de las distintas carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata	Primer año de las carreras de Ingeniería, Profesorado y Licenciatura en Matemática, Profesorado y Licenciatura en Biología, Bioquímica. Universidad Nacional de Mar del Plata
Cantidad de estudiantes	41	100
Tiempo de resolución	De 15 a 20 minutos	De 25 a 35 minutos
Tareas evaluadas	Lectura, escritura y determinación del valor de verdad en expresiones simbólicas que involucran uno o varios de los seis símbolos mencionados.	Lectura, escritura y determinación del valor de verdad en expresiones simbólicas que involucran uno o varios de los seis símbolos mencionados.
Criterio de selección y distribución de las tareas	Ítems con distinto nivel de complejidad de acuerdo a la cantidad de símbolos que conforman cada expresión.	Ítems para cuya resolución se requiere que estén construidas determinadas funciones semióticas que tributan al significado de cada símbolo.

Como puede observarse en la tabla anterior, una de las principales modificaciones entre la primera y la segunda versión del instrumento descansa en el criterio de distribución de

las tareas. A partir de la definición de algunas funciones semióticas surgió la necesidad de reformulación del instrumento.

Se determinaron tres funciones semióticas presentes en el proceso de significación de todos los símbolos analizados.

1- La primera de ellas ( $F_1$ ) vincula la expresión del símbolo con su expresión coloquial o denominación.

2- La segunda ( $F_2$ ) se establece entre la denominación mencionada y la estructura determinada por la sintaxis de la representación. Esa sintaxis involucra tanto el orden de los elementos como los roles jugados por ellos.

En el caso de la pertenencia, la sintaxis exige que, para que una expresión esté “bien formada”, si el operando de la izquierda forma parte de una determinada categoría, el de la derecha debe ser un conjunto de objetos de dicha categoría.

3- La tercera ( $F_3$ ), es la que relaciona la proposición en la que está presente el símbolo, con su valor de verdad, el cual depende también de los significados de los operandos involucrados.

Como ejemplo se presentan en la Figura 1 estas funciones semióticas para el caso particular del símbolo de pertenencia.

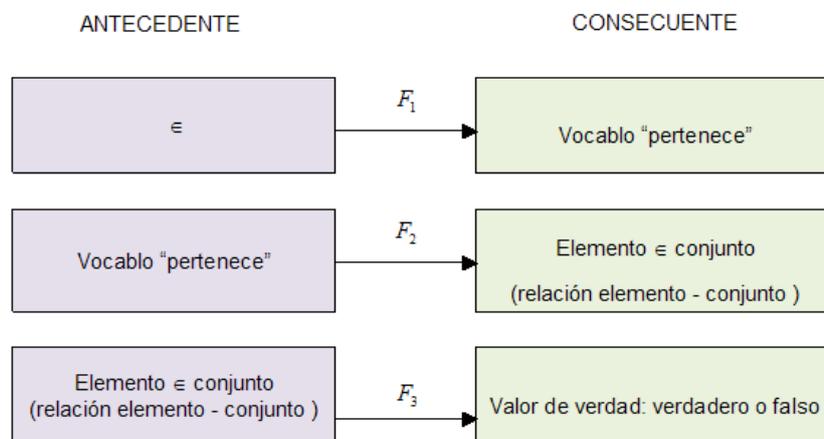


Figura 1: funciones semióticas para el símbolo de pertenencia

### Proceso de ajuste y reformulación

En este proceso de ajuste y reformulación del instrumento pueden distinguirse las siguientes fases:

#### Fase 1: Diseño de la primera versión.

Teniendo en cuenta la concepción de significado como conjunto de prácticas operativas y discursivas asociadas a determinado objeto matemático se contempló evaluar tres tipos

de tareas: identificación del símbolo, conversión desde el registro coloquial al simbólico y viceversa y asignación de valor de verdad.

Se distribuyeron expresiones con distinto nivel de complejidad: expresiones atómicas con símbolos de pertenencia o inclusión, expresiones moleculares con operador lógico de conjunción o disyunción y expresiones moleculares con una variable cuantificada.

### **Fase 2: Análisis de la primera versión.**

El análisis de validez del instrumento puede expresarse en términos de idoneidades.

*Idoneidad epistémica:* una evaluación a priori puede indicar una idoneidad mediana pues, de acuerdo a los elementos de significado considerados, se usó una muestra representativa y articulada de ítems, en diferentes registros, con contenido semántico de las expresiones adecuado al nivel de los alumnos. La evaluación a posteriori reveló una idoneidad menor porque, al examinar las producciones de los alumnos y necesitar describirlas mediante funciones semióticas, se comprobó que la distribución y selección de los ítems no se ajustaba completamente a estas herramientas metodológicas.

*Idoneidad cognitiva:* podría considerarse como mediana-alta ya que, en la redacción de los ítems se contempló que los estudiantes tuvieran los conocimientos previos necesarios para interpretar cada proposición, extrayendo las mismas del universo de afirmaciones trabajadas en el curso de ingreso. Por otra parte se proponen tanto tareas de lectura como de escritura para evaluar los significados.

*Idoneidad Mediacional:* Esta idoneidad se podría calificar de mediana a alta; el hecho de que el cuestionario pudiera resolverse entre 15 y 20 minutos muestra un apropiado uso del recurso tiempo. Al considerar el número total de ítems, se procuró asegurar una fiabilidad satisfactoria, teniendo en cuenta la restricción de la posible longitud total del test (Batanero y Díaz, 2006). Por otra parte, fue contemplada la forma de presentación de los ítems en una sola hoja tamaño oficio lo que permitió una clara legibilidad, espacio adecuado para las resoluciones y evitó en los alumnos las sensación de que la tarea de resolución fuera “densa” y extensa. Por otra parte se evitó ubicar los ítems de mayor dificultad al principio para promover la agilidad en la resolución y prevenir el cansancio.

*Idoneidad interaccional:* la presencia de conflictos semióticos la califica como baja. En las resoluciones de los alumnos se evidenció un conflicto semiótico al interpretar, en el enunciado del ejercicio 2 (ver Anexo 1), el vocablo “correcto” como “verdadero”.

Para analizar la confiabilidad, se calculó el coeficiente alfa de Cronbach. El mismo arrojó un resultado de 0.7169, que puede considerarse como aceptable.

### **Fase 3: Redefinición de herramientas metodológicas de análisis**

La descripción de los errores cometidos por los alumnos provocó la necesidad de organizar, formalizar y representar, en términos del EOS, los componentes del significado de los símbolos estudiados. Esto se llevó a cabo a través de la definición de algunas funciones semióticas. A partir de ellas se configuró una nueva herramienta de análisis que consiste en determinar si se han construido o no las funciones semióticas requeridas en cada ítem, lo que permitió un análisis más refinado.

#### **Fase 4: Rediseño del instrumento**

El cambio en el enfoque metodológico y los resultados del análisis de idoneidad implicaron la necesidad de ajuste del instrumento.

En el ejercicio 1, para asegurar que los estudiantes escribieran ejemplos que fueran proposiciones, se adicionó en la solicitud de los mismos la condición de que el ejemplo dado fuera verdadero. Esto también permitiría evaluar los roles involucrados en la función semiótica de sintaxis (F2).

Se procuró una distribución equilibrada de los ítems de acuerdo a las funciones semióticas evaluadas. Para ello, se consideró que la cantidad de ítems destinados a evaluar la función asociada a la sintaxis, para cada uno de los símbolos, fuera la misma. Con el mismo criterio se presentó un ítem correctamente escrito y otro que no lo estaba, para cada uno de los símbolos.

Para contribuir a la mejora de la idoneidad epistémica se amplió la representatividad de los ítems adicionando algunos con expresiones que contienen un cuantificador universal tácito; asimismo se incluyeron expresiones similares escritas en dos formas diferentes: por una parte, respetando las reglas de formación de fórmulas de la lógica formal y, por otra, representadas con convenciones de uso habitual en Matemática.

Para procurar resolver el conflicto semiótico, producido en el ejercicio 2, que llevó a algunos estudiantes a confundir “escritura incorrecta” con “expresión falsa”, se reformuló la redacción del mismo aludiendo a “expresiones bien escritas” y “expresiones mal escritas” y se eliminó la solicitud del valor de verdad.

#### **Fase 5: Análisis de la segunda versión**

El análisis de esta versión implica dos etapas: una vinculada a la evaluación en términos de idoneidades, que se presenta a continuación, y otra determinada por un juicio de expertos, que se omite en este trabajo.

*Idoneidad Epistémica:* se puede apreciar como alta pues no hay sesgo en la evaluación de las funciones semióticas contempladas, ya que se utiliza una muestra representativa y

articulada de ítems, distribuidos uniformemente y manteniendo el contenido semántico de las expresiones adecuado al nivel de los alumnos.

*Idoneidad cognitiva:* se mantuvo el nivel de esta idoneidad logrado en la primera versión del instrumento conservando los criterios utilizados al modificar los ítems.

*Idoneidad Mediacional:* dado el alto valor de esta idoneidad logrado en la primera versión del instrumento, manifestado en la buena disposición lograda en los estudiantes, se trató de mantener las características mencionadas en la segunda versión. Se respetaron las características de presentación de los ítems y, aunque se aumentó la cantidad de los mismos, el tiempo de resolución demandado permaneció dentro de un rango aceptable. Es importante destacar que la información que no pudiera ser relevada en base al instrumento se contempla obtenerla mediante entrevistas a una selección de estudiantes.

*Idoneidad interaccional:* se mejoró al disminuir significativamente la aparición del conflicto semiótico mencionado como resultado de la modificación en el enunciado del ejercicio 2. Por otra parte, el agregar en el ejercicio 1, la solicitud de un ejemplo que fuera *verdadero* mejoró la posibilidad de evaluación de la sintaxis (función semiótica F2), pues esta condición disminuyó significativamente la aparición de ejemplos en forma de esquemas proposicionales que contienen una variable cuyo rol sintáctico no se podía identificar. Se calculó el alfa de Cronbach para determinar la confiabilidad de esta nueva versión, y se obtuvo un valor de 0.82, lo cual resulta muy aceptable.

### **Consideraciones finales**

En los apartados anteriores se describieron evaluaciones de dos versiones del instrumentos efectuadas en términos de idoneidades. A continuación se enumeran algunos criterios a considerar, en el diseño y elaboración de instrumentos que evalúan significados, identificando la idoneidad que pretende mejorar.

- Es conveniente analizar previamente, para cada ítem, si es posible determinar que los errores cometidos por los estudiantes estén asociados únicamente al contenido evaluado y no a otros factores vinculados a falencias en conocimientos previos. (Idoneidades epistémica y cognitiva)
- Para prevenir el sesgo en los contenidos evaluados, contemplar la cantidad de ítems que evalúan un mismo contenido, distribuyéndolos equilibradamente, de modo que no se obtenga más información de un contenido que de otro. (Idoneidades epistémica y mediacional)

- Se debe tener en cuenta la longitud total del instrumento. Los instrumentos excesivamente largos provocan una mala predisposición de algunos estudiantes, que terminan no respondiendo a todas las consignas o bien contestan sin haber pensado efectivamente su respuesta. En estos casos el investigador se encuentra con datos que no son ni útiles ni fiables. (Idoneidad mediacional)
- Un criterio para reducir la cantidad de ítems puede ser el siguiente: si se tiene la posibilidad de complementar la información obtenida con el instrumento con información derivada de entrevistas, se puede reservar para el guión de las mismas aquellos ítems cuya respuesta puede anticiparse que dará lugar a la re-pregunta. (Idoneidades mediacional e interaccional)
- Ordenar la presentación de los ítems de manera que NO queden los de mayor nivel de dificultad al principio; esto podría ocasionar el abandono o la respuesta no pensada de los estudiantes. (Idoneidad mediacional)
- Si al analizar los resultados obtenidos de la administración de una versión del instrumento surgieran nuevas herramientas metodológicas y/o de análisis, se debe revisar la adecuación de los ítems a las mismas y hacer los reajustes necesarios. (Idoneidad epistémica)
- Si al administrar una versión del instrumento se detecta la aparición de conflictos semióticos, rediseñar los enunciados de los ítems involucrados para evitar dichos conflictos. (Idoneidad interaccional)

### Referencias bibliográficas

- Batanero, C. y Díaz, M. C. (2006). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. Reflexiones desde el marco de la TFS. En A. Contreras, (Ed.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, 13-36. Universidad de Granada.
- Díaz, C.; Batanero, C. y Cobo, B. (2003). Fiabilidad y generalizabilidad en el campo educativo: análisis de un cuestionario sobre comprensión de promedios. *Números*, 54, 3- 21.
- Godino, J. D.; Bencomo, D.; Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Recuperado el 2/4/13 de: [www.ugr.es/~jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm)
- Godino, J. D.; Batanero y C., Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Universidad de Granada. Recuperado el 12/4/13 de [http://www.ugr.es/~jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm)
- Godino, J. D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Conferencia presentada en la XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Recuperado el 22/5/13 de [http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino\\_indicadores\\_idoneidad.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf)

## ANEXO 1 – Protocolo del instrumento administrado en 2012

## ANEXO 1 – Protocolo del instrumento administrado en 2012

❶- Completar:

Símbolo	¿Cómo se lee?	Escriba una expresión utilizando el símbolo de la que se pueda afirmar que es VERDADERA
$\in$		
$\notin$		
$\subset$		
$\forall$		
$\exists$		
$\wedge$		
$\vee$		

❷- Coloque una cruz en la casilla correspondiente:

Expresión	La escritura es incorrecta	La escritura es correcta y además resulta:	
		Verdadera	Falsa
$3 \subset \mathbb{Z}$			
$\{1, 2\} \subset \mathbb{N}$			
$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$			
$-2 \in \mathbb{N}$			
$[2, 5] \subset \mathbb{R}$			
$4 \in \mathbb{N} \wedge 4$ es impar			
$-1 \in \mathbb{N} \vee -1 \in \mathbb{Z}$			

❸- Escribir las siguientes expresiones en forma simbólica:

- a) -3 es un número entero .....
- b) 4 es positivo y -2 es negativo.....
- c) El conjunto de los números enteros está incluido en el conjunto de los números reales .....

❹- Escribir las siguientes expresiones en lenguaje coloquial o simbólico, según corresponda. Además indicar si son verdaderas o falsas.

EN LENGUAJE COLOQUIAL	EN LENGUAJE SIMBÓLICO	V-F
Todo número entero es menor que su sucesor.		
Algunos números naturales son pares		
Ningún número entero es mayor que 2 y menor que 3.		
	Sean $a, b \in \mathbb{R}$ , $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$	
	$\exists x \in \mathbb{Z} / x < 0$	
	$\forall x \in \mathbb{N} \ x = 2 \cdot k \vee x = 2 \cdot k + 1$ , $k \in \mathbb{N}$	

## ANEXO 2 – Protocolo del instrumento administrado en 2013

❶ Completar:

Símbolo	¿Cómo se lee?	Escriba una expresión utilizando el símbolo de la que se pueda afirmar que es VERDADERA
$\in$		
$\subset$		
$\forall$		
$\exists$		
$\wedge$		
$\vee$		

❷ Determinar si las siguientes expresiones ESTÁN BIEN ESCRITAS. En caso de no estarlo re-escribirlas en forma correcta.

Expresión	Si es la expresión está BIEN ESCRITA señale con una x en esta columna	Si la expresión está MAL ESCRITA, re-escribirla en forma correcta en esta columna
$-2 \in \mathbb{Z}$		
$3 \subset \mathbb{Z}$		
$\{1; 2\} \subset \mathbb{N}$		
$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$		
$[2; 5] \subset \mathbb{R}$		
$4 \in \mathbb{N} \wedge -3 < 0$		
$-1 \in \mathbb{N} \vee -1 \in \mathbb{Z}$		
$-5 \wedge 4 \in \mathbb{R}$		
$4 \in \mathbb{N} \vee \mathbb{Z}$		
$\forall \mathbb{N} \mathbb{N} > 0$		
$\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 > 0$		
$\exists x \in \mathbb{R} \ / \ y + 2 = 5$		
$\exists x \in \mathbb{Z} \ / \ x < 0$		

❸ Escribir las siguientes expresiones en lenguaje coloquial o simbólico, según corresponda. Además indicar si son verdaderas o falsas.

EN LENGUAJE COLOQUIAL	EN LENGUAJE SIMBÓLICO	Indicar V o F
	$0,5 \in \mathbb{Z} \vee -1 \in \mathbb{Z}$	
	$-2 \in \mathbb{Z} \wedge -1 \in \mathbb{N}$	
	$\forall x (x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x < 0)$	
	$\exists x (x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0)$	
	Sea $a \in \mathbb{Z}$ , $(a < -2 \Rightarrow a^2 < 15)$	
	$\exists x \in \mathbb{N} \ / \ x < 0$	
	$\forall x \in \mathbb{N} \ x > 0$	
	Sea $x \in \mathbb{Z} \ x^2 < 9$	
	$\forall x \in \mathbb{N} \ x = 2k \vee x = 2k - 1, \ k \in \mathbb{N}$	
3 es un número entero e impar		
3 y 5 son números naturales		
4 es un número natural o es un número entero		
Cada número entero es menor que su sucesor		
Algunos números naturales son negativos		
El cuadrado de cualquier número real es positivo		