¿PRIMAS DEL COMPÁS? OTRAS HERRAMIENTAS PARA DIBUJAR CURVAS

Juan Pablo Muszkats
Instituto del Profesorado del CONSUDEC "Septimio Walsh", Argentina
juanpablomus@gmail.com
Nivel Terciario

Palabras clave: Curvas. Construcción. Coordenadas. Polares.

Resumen
En el presente trabajo se exponen herramientas que permiten construir algunas curvas planas clásicas y se sugieren posibles actividades. Se trata de una propuesta basada en el atractivo visual que pueden tener dichas curvas y su construcción concreta en una hoja de papel y gran tamaño: resultan especialmente indicadas para la introducción y motivación de ciertos temas. La exposición no busca ser exhaustiva ni prescriptiva. Se trata más bien de un breve muestrario de las posibilidades que ofrecen las herramientas mencionadas, junto con una serie de advertencias y consejos acerca de las dificultades que puede presentar su construcción, surgidas de la experiencia propia. Con esto se busca ofrecer a las personas eventualmente interesadas un recurso didáctico sujeto a todas las modificaciones y mejoras que pudieran aportar. Dado que existen muchas maneras equivalentes de definir a las curvas planas que se tratarán, el presente trabajo adoptará la modalidad de describir a cada curva como el conjunto de puntos determinado por la correspondiente herramienta. Partiendo de esa descripción se buscará una definición formal en algún sistema de coordenadas adecuado.

Introducción

Este artículo es una exposición de herramientas que permiten construir curvas planas tales como la espiral de Arquímedes, la cicloide, algunas hipocicloides y epicicloides. En cada caso particular, el formato básico será el mismo:

1) Descripción general de la herramienta y de las características indispensables que debe tener para poder cumplir con su función.
2) Descripción de la herramienta efectivamente construida y de las posibilidades y dificultades encontradas durante dicho proceso.
3) Modo de empleo de la herramienta.
4) Exploración de algunas posibilidades didácticas.

Es muy importante destacar que cada uno de estos ítems está sujeto a revisión y ampliación: es de esperar que surjan mejoras y aportes por parte de las personas que eventualmente utilicen estas herramientas. Así, los contenidos teóricos y definiciones serán mencionados lo más brevemente posible, dejando librados los detalles a las necesidades de cada propuesta didáctica particular. Por esta misma razón es que no se presentarán conclusiones del trabajo: se lo considera apenas una presentación y una propuesta a la espera de ser implementada, revisada y ampliada.

La espiral de Arquímedes
Básicamente, la herramienta consiste en una chapa circular por cuyo centro pasa un eje. Dicho eje está fijado a la chapa y en su parte superior se enrolla un hilo al que se sujeta un elemento de escritura.

En la figura 1 se aprecia la chapa circular de $50\,cm$ de diámetro construida en madera del tipo "fibro fácil" de $5,5\,mm$ de espesor. El eje es un tornillo que se sujeta a la chapa por medio de arandelas y una tuerca "mariposa". En la parte superior del tornillo se colocó cinta de papel (también llamada "de enmascarar") para evitar que la rosca dificulte el uso. En este caso, el elemento de escritura es un marcador que se sujeta al eje por medio de un hilo resistente (del tipo tanza). Uno de los extremos del hilo se retiene usando la misma arandela y tuerca, mientras que el otro extremo queda atado al marcador. La superficie sobre la que se escribe es una cartulina blanca recortada de forma circular que se pasa por el eje y se afirma sobre la madera con la ayuda de la cinta de papel.

Figura 1

Cabe mencionar que la construcción de esta herramienta no presenta mayores dificultades. Lo que eventualmente podría llegar a complicarse es recortar el círculo en la madera: esta tarea puede hacerse con una sierra caladora o encargarse a alguna carpintería. De todas maneras, no es indispensable que el material sea madera: puede reemplazarse por cualquier objeto plano de forma circular que sea lo suficientemente rígido. Las tapas de ciertos recipientes podrían resultar adecuadas. En cuanto a las dimensiones, quedan libradas al criterio del usuario sobre la visibilidad que pretenda lograr.

El uso de la herramienta es muy sencillo de describir, aunque posiblemente requiera unos cuantos ensayos hasta lograr un buen dominio de la técnica. Se debe enrollar el hilo sobre el eje hasta que el marcador quede muy próximo; recién entonces se apoya la fibra sobre el papel y se hace girar el eje de manera tal que el hilo se desenrolle. Durante todo este proceso debe mantenerse tenso el hilo. A medida que la chapa da vueltas, el marcador dibuja una espiral.

Las posibilidades de esta herramienta no se agotan en el aspecto meramente ilustrativo de una curva particular. Una posible utilización es como un recurso que permita reconocer las limitaciones del sistema de coordenadas rectangulares, introduciendo la motivación para otros sistemas de coordenadas. En efecto, puede mostrarse el funcionamiento de la herramienta y proponer el problema de describir analíticamente la curva dibujada. En este contexto debería hacerse evidente la dificultad que entraña una descripción en coordenadas rectangulares. La misma construcción de la curva indica que los elementos que están involucrados son el ángulo de rotación θ (con respecto a alguna referencia) y la distancia al origen r. Cada vez que el ángulo aumenta 2π radianes, el sistema da una vuelta completa y libera una cantidad de hilo cuya longitud es igual que la circunferencia del eje. No es difícil tomar nota, después de una breve reflexión, de que el método empleado para dibujar la espiral implica que el ángulo de rotación y la distancia al origen son directamente proporcionales, siendo la constante de proporcionalidad k el radio del eje:

$$r = k \cdot \theta$$

(Por supuesto, la herramienta no puede dibujar el punto correspondiente al valor $\theta = 0$, sino que el trazado de la curva comienza con valores positivos de r y θ). A partir de esta fórmula y de las fórmulas de pasaje a coordenadas rectangulares

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta$$

pueden obtenerse las ecuaciones paramétricas de la espiral reemplazando el valor de r:

$$\begin{cases} x(t) = k \cdot t \cdot \cos t \\ y(t) = k \cdot t \cdot \operatorname{sen} t \end{cases}$$

La cicloide

La construcción de esta curva requiere tan solo un segmento recto y un círculo tal que un punto de su circunferencia pueda portar un elemento de escritura.

En la figura 2 se observa la misma chapa utilizada para la construcción de la espiral. Un prisma de madera está sujeto a la chapa por medio de dos broches grandes de librería. Este mismo prisma se utiliza para fijar a la chapa una cartulina rectangular, con la ayuda de la cinta de papel. En esta construcción, el círculo está recortado en madera de 1 cm de espesor (siempre del tipo “fibro fácil”), la misma con la que se construyó el prisma. (Una variante podría consistir en comprar las ruedas hechas: existe un enorme surtido de ruedas comerciales, no necesariamente de madera). Se eligió un espesor mayor para que haya más contacto, intentando así evitar que al moverse sobre el prisma el círculo se deslice. El aspecto más complicado de esta herramienta es lograr un punto en la circunferencia que efectivamente escriba sobre la hoja. La opción que se eligió fue hacer una perforación lo más próxima posible al borde, por la que pasa una mina de compás preferentemente blanda.

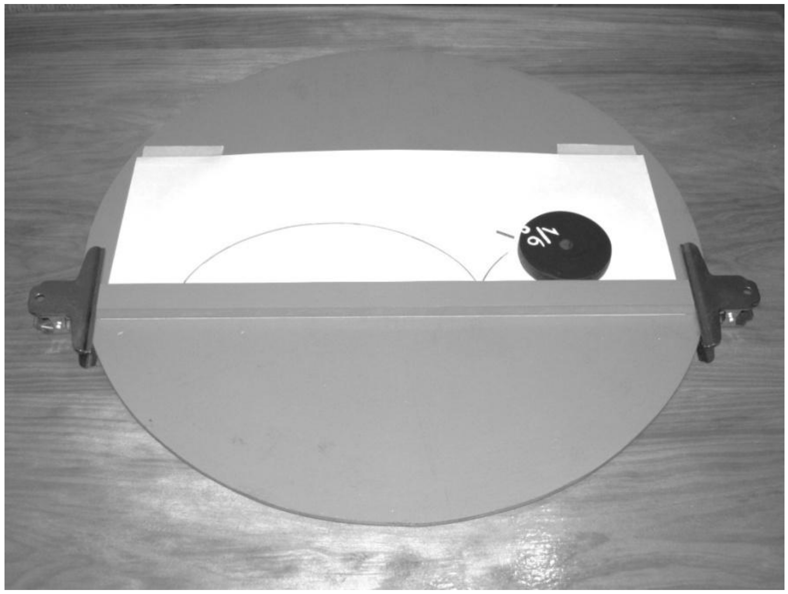


Figura 2

Como en el caso anterior, el uso de la herramienta es casi obvio, pero requiere una destreza manual que se adquiere al cabo de algunos intentos. Para dibujar la curva se debe mover el círculo sobre el prisma evitando que se deslice y, simultáneamente, presionando sobre la mina de compás para lograr un buen trazo.

La manera más inmediata y obvia de usar esta herramienta en una situación de clase consiste en describir su funcionamiento y tratar de encontrar las ecuaciones que describen la curva construida. Fijando un sistema de referencia sobre cuyo eje horizontal se apoya un círculo de radio a y siguiendo al punto de la circunferencia que inicialmente está en la posición $(0,0)$, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

La demostración puede consultarse en numerosos textos y se omite. Puede verse, por ejemplo, en Lockwood (1961).

Otro aspecto que cabe mencionar es que la cicloide es la solución del problema de la braquistócrona, tema sobre el que hay una amplia bibliografía. Una exposición técnica se encuentra en Gelfand y Fomin (1963).

Las hipocicloides
En este caso, se necesita un círculo como el empleado para construir la cicloide junto con una circunferencia dentro de la cual pueda girar dicho círculo.

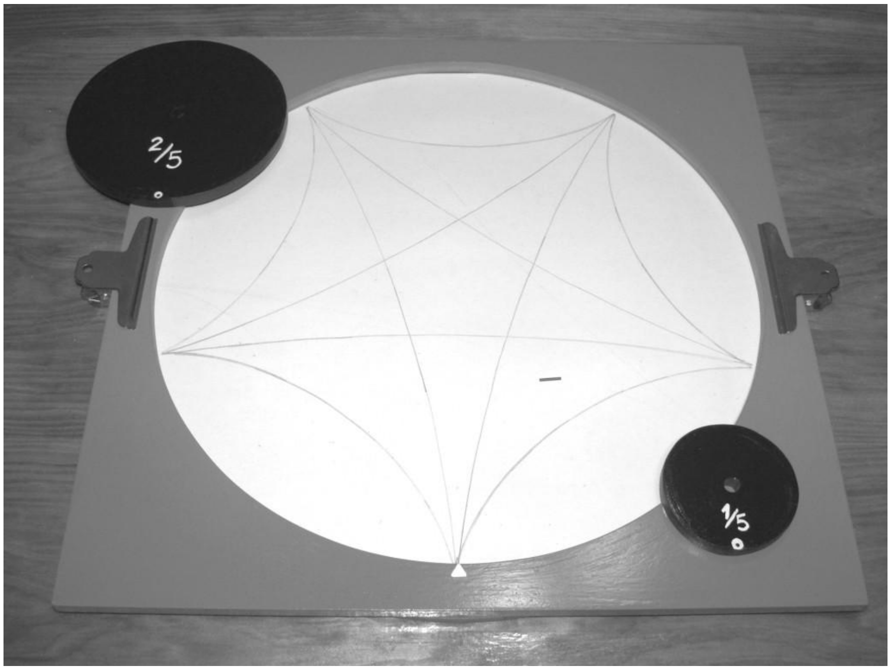


Figura 3

En la figura 3 se puede ver la construcción realizada en madera para que se desplacen los círculos. Se trata de un cuadrado en el que se caló un círculo de $44\ cm$; esta pieza se sujeta a la chapa circular antes mencionada usando los broches, de forma tal que pueda sujetar una cartulina sobre la que se dibujarán las curvas. Los círculos que se ven en la figura llevan una fracción que indica qué parte del diámetro grande es su propio diámetro (o sus respectivas circunferencias). Esta construcción es la más difícil de todas, porque requiere más precisión que las otras. Si la circunferencia de un círculo no es la fracción que se pretende de la circunferencia grande, entonces no se lograrán curvas cerradas como las de la figura, ni siquiera dentro de un margen tolerable para los fines meramente ilustrativos que se persiguen.

La construcción de las curvas en este caso es completamente análoga a la de la cicloide.

Una primera aproximación a las posibilidades de esta herramienta consiste, evidentemente, en buscar las ecuaciones paramétricas de la curva. Si el círculo que gira tiene radio a y el círculo fijo tiene radio $(k+1)a$, no difícil (aunque sí engorroso) probar que

$$\begin{cases} x(t) = ka\cos t + a\cos kt \\ y(t) = ka\,\mathrm{sen}\,t - a\,\mathrm{sen}\,kt \end{cases}$$

como se puede ver en Lockwood (1961).

Más atractivo resulta investigar cómo influye la relación entre las circunferencias en las curvas obtenidas. Como primera observación, puede señalarse que si el círculo que gira tiene una circunferencia que es la enésima parte de la circunferencia grande, entonces deberá dar n vueltas para volver al punto de partida y dibujar una curva cerrada, después de haber recorrido una vuelta completa en el círculo fijo. Algunos casos que merecen una mención especial son el de la relación $1/3$, que produce la curva llamada "deltoide"; la relación $1/4$, asociada con la curva "astroide" y la relación $1/2$, para la cual se sugiere tratar de predecir el resultado (sugerencia: mirar las ecuaciones paramétricas).

Si en cambio la relación es una fracción p/q con $1 < p < q$ y coprimos, el círculo chico deberá dar q vueltas sobre su eje para completar p vueltas grandes y volver al punto de partida. Una manera sencilla de explicar esto consiste en pensar que la circunferencia chica mide p unidades, con lo cual la circunferencia grande mide q: si se dan "pasos" de p unidades, la primera coincidencia con una cantidad entera de vueltas al círculo grande se dará en el múltiplo común menor de estas cantidades, o sea $p \cdot q$. La figura 3 ilustra simultáneamente las curvas obtenidas con las relaciones $1/5$ y $2/5$. En conexión con estas curvas, pueden también mencionarse los polígonos estrellados (ver Coxeter (1989)).

Las hipocicloides generadas pueden interpretarse en términos de congruencias módulo n. En efecto, si se considera que cada rotación del círculo de relación $1/n$ equivale a sumar una unidad (módulo n), la hipocicloide de n puntas representa al grupo aditivo de congruencias módulo n, al que se denotará $\mathbf{Z}_n$. Retomando el caso de las relaciones $1/5$ y $2/5$, es interesante destacar que cada rotación del círculo $2/5$ puede interpretarse como la suma de dos unidades en $\mathbf{Z}_5$ y las sumas sucesivas de dos unidades recorren todos los elementos del grupo. No ocurre lo mismo si se utilizan, por ejemplo, los círculos de relaciones $1/6$ y $1/3 = 2/6$. Esta circunstancia permite comenzar a indagar los grupos cíclicos y sus generadores. (Véase, por ejemplo, Fraleigh (1987)).

Una cuestión que merece la pena preguntarse es qué ocurre cuando la relación entre las circunferencias es un número irracional: el hecho de que no se producirá una curva cerrada permite una aproximación al concepto de número irracional bajo el aspecto clásico de cantidades inconmensurables. (No puede dejarse pasar que esta discusión es estrictamente teórica y ningún instrumento de escritura permitirá apreciarla cabalmente).

Las epicicloides

En este caso se requieren tan solo dos círculos, uno de los cuales debe estar fijo con respecto a la superficie sobre la que se dibuja y el otro debe portar el elemento de escritura.

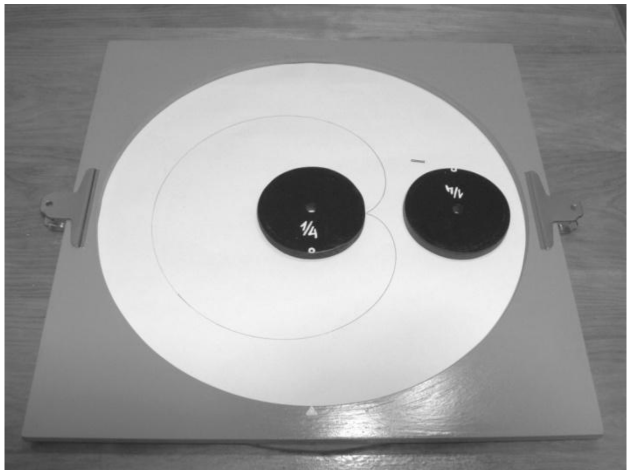


Figura 4

En la figura 4 se exhibe una posible configuración: con la chapa y el círculo grande como en el caso anterior, se usan dos círculos. Para mayor seguridad en el trazado, puede fijarse uno de los círculos mediante el tornillo. En el caso de que quieran estudiarse dos círculos de igual diámetro, como en la figura, resulta fácil evitar la construcción en madera si se consiguen dos ruedas idénticas.

Una vez más, parece innecesario aclarar los detalles del trazado de la curva.

Como al tratar las hipocicloides, se presentan las ecuaciones paramétricas correspondientes a la epicicloide que genera un círculo de radio a girando en torno a un círculo de radio $(k-1)a$:

$$\begin{cases} x(t) = ka\cos t - a\cos kt \\ y(t) = ka\,\mathrm{sen}\, t - a\,\mathrm{sen}\, kt \end{cases}$$

El caso particular de la epicicloide de la figura es aquel en que ambos círculos son iguales y lleva un nombre propio: “cardioide”, debido a su forma de corazón. Las consideraciones hechas acerca de las relaciones entre los diámetros en el párrafo sobre las hipocicloides pueden adaptarse, sin mayores dificultades, para el estudio de las epicicloides.

Una nota de interés histórico sobre las epicicloides puede encontrarse en Payne-Gaposchkin (1969), donde se comenta su utilización en el antiguo sistema planetario de Tolomeo.

Referencias Bibliográficas

Coxeter, F.R.S. (1989). *Introduction to Geometry*. (2nd ed.). John Wiley & Sons, Inc.

Fraleigh J.B. (1987). *Algebra Abstracta, primer curso*. (tercera edición). Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.

Gelfand I.M. y Fomin S.V. (1963). *Calculus of Variations*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Lockwood, E.H. (1961). *A book of curves*. London: Cambridge University Press.

Payne-Gaposchkin, C. (1969). *Introducción a la astronomía*. Buenos Aires: EUDEBA.

LA DIALECTICA DE "ENTRAR Y SALIR DEL TEMA" EN LA IMPLEMENTACIÓN DE UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN CODISCIPLINAR A LA MICROECONOMIA

Verónica Parra; María Rita Otero; María de los Ángeles Fanaro
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Argentina
vparra@exa.unicen.edu.ar, rotero@exa.unicen.edu.ar, mfanaro@exa.unicen.edu.ar
Nivel Medio.

Palabras clave: TAD. REI. Dialéctica. Microeconomía.

Resumen

El trabajo presenta resultados de la implementación de un posible Recorrido de Estudio e Investigación (REI) en el último año del secundario argentino (16-17 años). Se analiza la operatividad de la dialéctica *"entrar y salir del tema"* y su relación con los procesos de *topogénesis, mesogénesis y cronogénesis*. La implementación del REI se realizó en clases de Matemática habituales, no en clases extraescolares ni paralelas al curso. Las cuestiones de partida del REI se refieren a la Microeconomía, precisamente, a los modelos de oferta y de demanda de un único bien. Se utilizan como referente teórico las nociones de REI y las dialécticas introducidas por Chevallard en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (1999, 2009,2011).

Introducción

Este trabajo integra una investigación que se propone abordar el problema de la enseñanza de la Matemática por Recorridos de Estudio e Investigación (REI) en el secundario en Argentina. La introducción de los REI no es sencilla, y es un problema de investigación porque se trata de poner en práctica un constructo teórico en un aula real y en un contexto institucional que ofrece grandes restricciones. Los REI exigen un cambio de contrato de gran magnitud, porque se afecta fuertemente el lugar del profesor y del alumno en el aula con relación al saber, se gestionan diferentes tiempos didácticos y se redefine la concepción del medio didáctico.

Según Chevallard (2004, 2005) la enseñanza de la matemática de ha reducido al estudio de un conjunto de "obras muertas", como consecuencia de la pérdida de las razones de ser. Estas obras se estudian no por lo que nos permiten hacer, sino por ellas mismas, como si fueran transparentes e incuestionables.

Se gesta así lo que Chevallard (2004) llama "monumentalización de saberes", se visitan grandes cuerpos de saberes como si fueran monumentos que son ajenos a los estudiantes. Su –topos– se reduce así a admirar y venerar estos monumentos, pero la Matemática no es un monumento. Intentar modificar esta realidad exige adoptar un punto de vista funcional, un cambio de raíz en la pedagogía actual. Chevallard (2004, 2005, 2009) denomina "pedagogía del cuestionamiento del mundo y de la investigación" al modelo que instalan los (REI).

La enseñanza por REI y sus antecedentes

Las primeras investigaciones que proponen, implementan y analizan enseñanzas por REI se realizaron en la Universidad (Barquero, 2009; Serrano, Bosch y Gascón, 2007). En ellas se desarrollan REI en cursos "paralelos" a los cursos tradicionales de Matemática. En la Escuela Secundaria, los trabajos de Fonseca, Pereira y Casas (2011); García, Bosch, Gascón y Ruiz (2005) y Ruiz, Bosch y Gascón (2006) también proponen organizar la enseñanza de la Matemática partiendo de cuestiones, aunque no satisfarían plenamente las características esenciales de los REI. En la educación infantil, Ruiz-Higueras y García García (2011) describieron y analizaron una enseñanza por REI con un grupo de alumnos de entre 3 y 6 años. En la Argentina, los trabajos de Gazzola, Llanos y Otero (2011); Llanos, Otero, Bilbao (2011) y Otero, Llanos (2011) introdujeron una enseñanza por REI en las clases usuales de Matemática de secundaria, donde la cuestión generatriz se relaciona con el estudio de funciones asociadas a posibles operaciones con curvas a partir de una técnica geométrica. Todos los REI anteriores son mono disciplinares.

Nuestra investigación, aborda la construcción, implementación, análisis y evaluación de recorridos co-disciplinares a la Microeconomía (Parra, Otero, Fanaro, 2011, 2012) Aquí presentamos algunos resultados de la implementación de uno de estos posibles recorridos en el último año del nivel medio y describimos cómo opera la dialéctica "entrar y salir del tema" durante el proceso de estudio de este REI y su relación con la topogénesis, mesogénesis y cronogénesis.

Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI)

El objetivo principal de los REI es introducir una nueva epistemología que le dé sentido y funcionalidad al estudio escolar de las matemáticas en su conjunto (Chevallard, 2009) y que reemplace la pedagogía de "inventariar" los saberes. Los alumnos (*X*) investigan y estudian sobre una cuestión *Q* bajo la dirección de un profesor (*y*) o de un conjunto de profesores (*Y*) con el objetivo de aportar una respuesta *R* a la cuestión *Q*. Se coloca el exponente ♥ en *R* para indicar que la respuesta a *Q* ha sido producida bajo determinadas restricciones y que "funciona" como respuesta a *Q* bajo esas restricciones pues no existe respuesta universal y universalmente efectiva (Chevallard, 2009). Así, el sistema didáctico, denotado por $S(X;Y;Q)$, necesita instrumentos, recursos, obras, en definitiva, necesita un medio didáctico *M* que debe identificar, ordenar y aprender a utilizar con el objetivo de producir $R^{\heartsuit}$. Esto se denota por

$$[S(X;Y;Q) \rightarrow M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

Es decir, el sistema didáctico construye y organiza ($\rightarrow$) el medio *M* con el cuál engendrará o producirá ($\hookrightarrow$) una respuesta $R^{\heartsuit}$. El medio *M* contiene respuestas pre-construidas, aceptadas por la cultura escolar – por ejemplo, un libro, la Web, el curso de un profesor, etc., denotadas por $R^{\Diamond}$ ("*R* punzón") – y por obras – por ejemplo, teorías, montajes experimentales, praxeologías, denotadas por *O* – consideradas útiles para deconstruir las respuestas $R^{\Diamond}$, extraer qué de necesario hay allí para construir la respuesta $R^{\heartsuit}$. Por consiguiente, el medio *M* se formula de la siguiente manera:

$$M = \left\{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, R_3^{\Diamond}, \ldots\ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, \ldots\ldots, O_m\right\}$$

Chevallard (2004) define el REI en el *esquema herbatiano desarrollado*:

$$[S(X;Y;Q) \rightarrow \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, R_3^{\Diamond}, \ldots\ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, \ldots\ldots, O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

Esta denominación se refiere al filósofo y pedagogo alemán Johann Friedrich Herbart (1776-1841). La pedagogía de Herbart atiende a dos asuntos básicos: al camino (cómo) y a la meta final (dónde). Así, por un lado, Herbart se refiere a la "filosofía práctica", la que muestra "la meta de la formación", es decir, el punto a donde se ha de llegar; y, por otro lado, a la "psicología", la que reflexiona sobre "el camino, los medios y los impedimentos" que hay que transitar, recorrer, superar, para llegar a la meta y alcanzar así el fin.

Las dialécticas en los recorridos co-disciplinares

Los REI pueden ser *codisciplinares* (si involucran más de una disciplina) o *monodisciplinares*. Los REI co-diciplinares se gestionan a partir de una serie de "dialécticas", "saberes hacer" o "gestos" del estudio y de la investigación: la dialéctica del *paracaidista y de las trufas*; del *tema y fuera-de tema*; de las *cajas negras y cajas claras*; de la *excripción textual y de la inscripción textual*; de la conjetura y de la prueba –posteriormente llamada de los *media y medio*–, de la *producción y recepción*, *del individuo y del conjunto* o de la *autonomía y de la sinonimia* y la dialéctica de las *cuestiones y respuestas* (Chevallard, 2009). Sólo describiremos aquí la dialéctica de *entrar y salir del tema*.

Para buscar respuesta a una cuestión co-disciplinar es necesario disponer de la posibilidad de salirse del "tema" al que inicialmente pertenece dicha cuestión, incluso hasta la salirse de la disciplina de referencia, para reingresar posteriormente. Las cuestiones generatrices de investigaciones co-disciplinares que pueden dar lugar a REI amplios, pocas veces pueden circunscribirse en el ámbito limitado de un único sector o incluso una única disciplina (Chevallard, 2009). Esta dialéctica se opone a la tradición escolar que conduce a transitar por el camino más corto, conociendo de antemano y a la perfección cada respuesta. Por ejemplo, si la cuestión es *¿Cómo obtener el punto de equilibrio en un modelo simple de oferta y demanda de un único bien?* es preciso ingresar en la Microeconomía, investigando allí las cuestiones relativas al punto de equilibrio y a los modelos de oferta y demanda. Luego, debe reingresarse en la disciplina Matemática porque el punto de equilibrio corresponde a la solución de un sistema formado por las ecuaciones de oferta y de demanda. A la vez, hay que salir del tema "punto de equilibrio" para estudiar sobre los sistemas de ecuaciones y las características de las ecuaciones que lo conforman.

Topogénesis, cronogénesis y mesogénesis

El análisis de una organización didáctica remite a los procesos de *cronogénesis*, *mesogénesis* y *topogénesis*, ellos son *funciones didácticas* o *funciones de producción* (Chevallard, 2009). La *mesogénesis* es la "fabricación" del medio M por la clase, a partir de producciones diversas, tanto *externas* como *internas*, estas últimas incluyen particularmente las respuestas R_x, es decir, las respuestas propuestas por los alumnos x a partir de su propia actividad. Diversos tipos de obras que pueden, *en principio*, venir a constituir el medio M de un REI, obras que en general están excluidas *por principio* de la enseñanza tradicional. El "trabajo" sobre el medio cambia interactivamente en la medida en que cambia su *naturaleza*. La condición *mesogenética* se acopla con la *topogénética*: la constitución del medio M es un producto de la clase [X, y], es decir, no solo de y. El *topos* de los alumnos se amplía considerablemente: no solo podrán aportar *su* respuesta personal R_x, sino también podrán proponer introducir en M toda obra que deseen. A este cambio, corresponde un cambio importante en el *topos* del profesor, a quien se nombrará el *director del estudio* porque dirige el estudio de Q, o el *director de la investigación,* quien dirige la investigación sobre Q, es decir, de y. De igual manera, y podrá introducir en M cierta respuesta $R^{\Diamond}$, que no serán necesariamente "su" respuesta personal R_y, en ningún caso un *media* tendrá el privilegio de ser *"creído bajo palabra"* (Chevallard, 2009).

La cronogénesis se distingue fuertemente a un REI de los dispositivos didácticos usuales en la escuela: la constitución y el "trabajo" del medio M demandan *una dilatación del tiempo didáctico* es decir, *una extensión del tiempo de reloj requerido* (Chevallard, 2009). El trabajo realizado en M para producir una respuesta $R^{\heartsuit}$ comportará particularmente un estudio *más o menos incitado* de obras O_j, lo cual conduce una transformación momentánea de $S(X;Y;Q)$ en un sistema didáctico del tipo "clásico" $S(X;Y;\ O_j)$. El estudio de la obra O_j tiene por objetivo contribuir a la elaboración de $R^{\heartsuit}$ y puede requerir de un estudio más amplio de otras obras O_k. Así, el estudio de diferentes obras O_j y de respuestas $R^{\Diamond}$ deben ser "llamadas" por la investigación en curso y no introducida por y de manera artificial.

Preguntas de la Investigación

- ¿Cómo opera la dialéctica de *entrar y salir del tema* en la implementación de una enseñanza por REI en el último año del nivel medio?
- ¿Qué incidencia tiene esta dialéctica en el nivel de la *mesogénesis*, *topogénesis* y *cronogénesis*?

Metodología de la Investigación

Se trata de una investigación cualitativa, de tipo etnográfica, cuyo objetivo es describir cómo se desarrolla el proceso de estudio de un grupo de alumnos correspondiente al último año del nivel secundario, a partir de una enseñanza por REI, dentro del curso de Matemática usual. El investigador, fue a la vez el director de este proceso de estudio durante el ciclo escolar 2011 realizando observación participante, tomando notas de campo, registrando todo el desarrollo de las clases en audio y recolectando las producciones de los alumnos. Las clases se realizaban en dos sesiones semanales de 2 horas cada una. El REI comenzó el primer día del ciclo lectivo 2011, es decir, los estudiantes no sabían con qué nociones matemáticas u organizaciones matemáticas podrían responder las cuestiones planteadas. Las cuestiones generatrices del REI se refieren a la Microeconomía, específicamente al comportamiento de las leyes de oferta y demanda de mercado. Se trata de un curso de 28 alumnos, los cuáles se distribuyen en 6 grupos de alrededor de 5 alumnos cada uno. A cada grupo de alumnos (G) le asignamos un número del 1 al 6 (G1, G2, G3, G4, G5 y G6) y, a su vez, cada alumno-miembro (A) del grupo se lo identificó con del A1 al A28. Los protocolos presentados en este trabajo corresponden a representantes prototípicos de los grupos. El profesor introdujo inicialmente las cuestiones, cada grupo de alumnos tenía que aportar una respuesta, comunicarla al resto y defenderla. Las preguntas que surgían en los distintos grupos de alumnos eran consideradas por la comunidad de estudio y también debían responderse.

La dialéctica de *entrar y salir del tema* en la implementación del REI
El recorrido realizado por este grupo de alumnos se diseñó considerando ciertas hipótesis relativas a la Microeconomía, específicamente, al área de los modelos de oferta y de demanda:

***H*₀**: Existe el estado de equilibrio y es accesible.

***H*₁**: El equilibrio en el mercado se alcanza si y solo si la demanda excedente es cero. Esto es: $Q_d - Q_s = 0$, siendo Q_d la función de demanda (cantidad demandada de mercancía) y Q_s la función de oferta (cantidad ofrecida de la mercancía).

***H*₂**: Las funciones Q_s y Q_d son lineales y dependen de una única mercancía.

Las cuestiones propuestas a los alumnos bajo estas hipótesis fueron las siguientes:

***Q*₁**: Supongamos que se están elaborando sorrentinos de jamón y queso con la intención de venderlos y de recaudar dinero para la fiesta de egresados y/o para el viaje. De un ensayo de ventas previo se obtuvo la información ofrecida en las tablas siguientes:

Cantidad ofrecida (en docenas)	Precio por docena (en $)
155	10
307	18
98	7

Cantidad demandada (en docenas)	Precio por docena (en $)
330	7
250	15
270	13

¿Cómo podemos determinar a qué precio por docena no se estaría perdiendo ni ganando dinero? ¿Qué modelo lineal permitiría estudiar el comportamiento de la oferta y demanda en este mercado de sorrentinos?

***Q*₂**: ¿Cómo se podría estudiar el comportamiento de las leyes de oferta y la demanda para

Comenzamos por un problema de microeconomía que requiere del estudio de una cierta praxeología matemática, que los estudiantes no saben de antemano cuál es, lo cual exige dejar el tema por un tiempo, a la vez que tenerlo presente, para no olvidar qué pregunta se quería responder en principio. Frecuentemente durante el REI, fue necesario salir de la cuestión para investigar y estudiar algo y luego, volver a entrar a la cuestión para finalmente construir una respuesta. Por ejemplo, responder la cuestión *¿Cómo podemos saber a qué precio por docena no se estaría perdiendo ni ganando dinero?* implicó investigar respecto al comportamiento del mercado, a saber que significa no perder ni ganar. La Figura 1 presenta sólo algunos de los tantos materiales aportados por dos alumnos (A26 y A28) para investigar y estudiar al respecto.

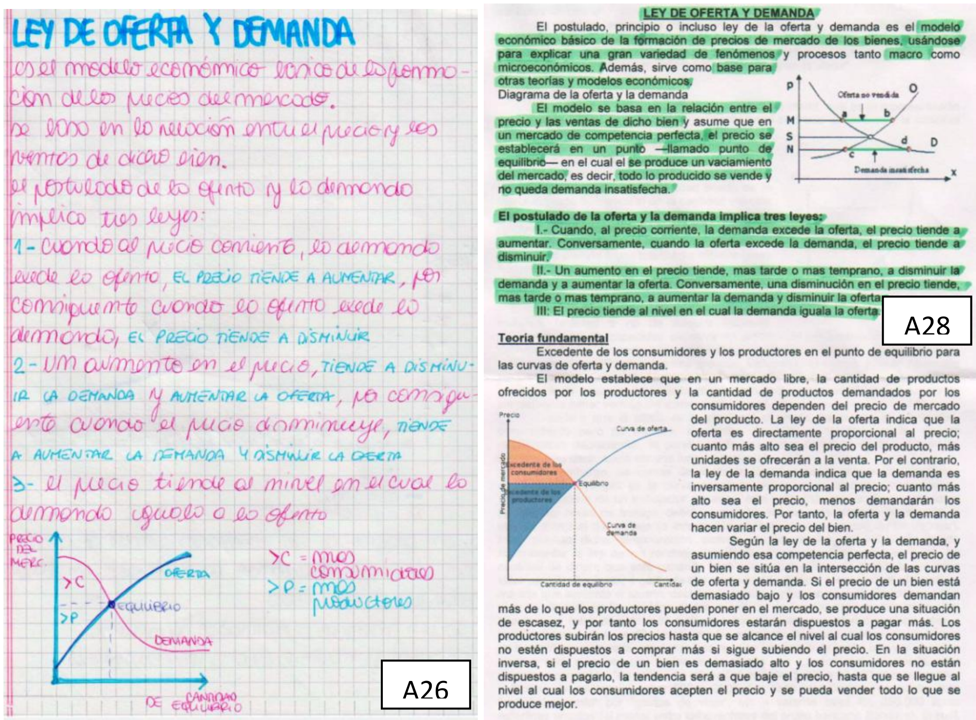


Figura 1: Materiales aportados por dos alumnos (A26 y A28) para investigar respecto a la cuestión Q_1

Por otra parte, la cuestión *¿Qué modelo lineal permitiría estudiar el comportamiento de la oferta y demanda en este mercado de venta de sorrentinos?* implicó salir de la cuestión para estudiar e investigar ¿qué es un modelo? ¿Qué es un modelo de mercado? ¿Cómo se comportan la oferta y la demanda? y por supuesto ¿cómo construir el modelo? Así, se tiene una salida al área de la microeconomía, pero también, al área de la matemática pues para construir el modelo debe estudiarse cómo hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos y cómo resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Una vez investigado y estudiado al respecto debió volverse a la cuestión inicial y construir una respuesta aceptable, al menos, por la comunidad de estudio (alumnos y profesor). La Figura 2 presenta las respuestas parciales aportadas por dos alumnos (A14 y A21).

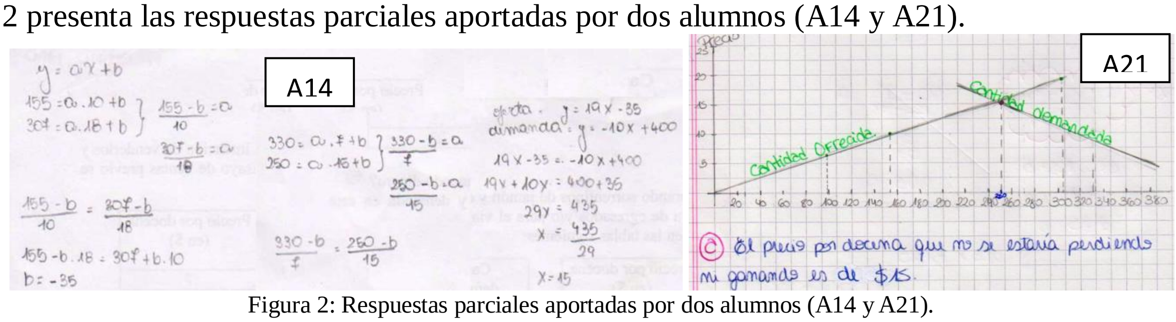
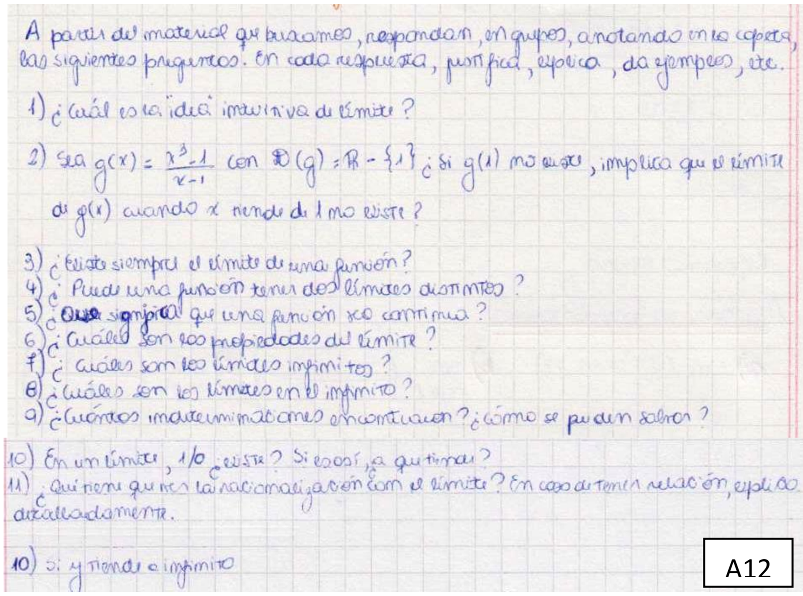


Figura 2: Respuestas parciales aportadas por dos alumnos (A14 y A21).

El estudio del límite de funciones es otras de las *salidas*, y se realiza a partir de la definición de la derivada de funciones, que se formuló para responder a las cuestiones relativas a la variabilidad del punto de equilibrio, respecto a la variabilidad de los parámetros del modelo (cuestiones Q_3, Q_4 y Q_5). Una vez considerado el límite de funciones se retomó el estudio de la derivada y luego, se volvió a la cuestión. Es una salida dentro de otra salida, que, complicó mucho el regreso al "tema". La Figura 3 presenta las cuestiones que permitieron recorrer la praxeología relativa al límite de funciones.



A partir del material que buscamos, respondan, en grupos, anotando en la carpeta, las siguientes preguntas. En cada respuesta, justificá, explicá, da ejemplos, etc.

1) ¿Cuál es la "idea" intuitiva de límite?

2) Sea $g(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ con $D(g) = \mathbb{R} - \{1\}$ ¿Si $g(1)$ no existe, implica que el límite de $g(x)$ cuando x tiende a 1 no existe?

3) ¿Existe siempre el límite de una función?
4) ¿Puede una función tener dos límites distintos?
5) ¿Qué significa que una función sea continua?
6) ¿Cuáles son las propiedades del límite?
7) ¿Cuáles son los límites infinitos?
8) ¿Cuáles son los límites en el infinito?
9) ¿Cuántas indeterminaciones encontraron? ¿Cómo se pueden salvar?

10) En un límite, 1/0 ¿existe? Si es así, ¿a qué tiende?
11) ¿Qué tiene que ver la racionalización con el límite? En caso de tener relación, explicá detalladamente.

10) Sí, y tiende a infinito

A12

Figura 3: Cuestiones formuladas para estudiar el límite de funciones

Conclusiones

Esta enseñanza por REI permitió cubrir parte del programa de estudios del curso con cuestiones de la Microeconomía. El saber matemático surgió como respuesta a las diferentes cuestiones, asociado a los modelos de oferta y de demanda de un único bien. También se pusieron en evidencia las dificultades de gestionar el REI, en este caso, una dialéctica esencial a la co-disciplinariedad del dispositivo. En el nivel meso genético, ingresaron al "medio" diferentes "medias" como búsquedas en Internet, libros de microeconomía, consultas a los profesores de economía, etc. Respecto a la topogénesis, los alumnos debieron hacerse cargo de las cuestiones a responder, en principio, con cierta resistencia. El profesor, ocupó el lugar de director del proceso de estudio que requiere una enseñanza por REI y abandonó el lugar de media universal y garante del saber así como su papel de profesor explicador. Con respecto a la cronogénesis, se confirma la dilatación del tiempo del reloj, para que la comunidad de estudio investigue y estudie durante un largo período de tiempo –muy superior a los tiempos de la enseñanza tradicional– una misma cuestión, manteniéndola "abierta" y "viva", y capaz de derivar el estudio de nuevas cuestiones.

Se advierten algunas limitaciones tales como: el nivel de profundidad con el que se estudian las praxeologías matemáticas reconstruidas en el aula, la dificultad de cumplir con el requisito de acreditación de los estudiantes, la amplitud de los programas de estudio – la mayoría de ellos abarcan muchas nociones matemáticas y las praxeologías asociadas a las mismas, entre otras. Los resultados permiten cuestionar la viabilidad de los REI co-disciplinares en los cursos tradicionales de la escuela secundaria actual, pues las restricciones institucionales limitan lo abierto que puede ser un REI y condicionan las cuestiones a responder.

Referencias Bibliográficas

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(2), pp. 221-266.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Recuperado el 7 de marzo de 2011 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers_une_didactique_de_la_codisciplinarite.pdf

Chevallard, Y. (2005). *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire*. Recuperado el 7 de marzo de 2011 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_place_des_mathematiques_vivantes_au_secondaire.pdf

Chevallard, Y. (2009). *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder.* Recuperado el 10 de febrero de 2011 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_l_EE_2009.pdf

Chevallard, Y. (2011). *Séminaires de recherche et de formation*. Recuperado el 23 de febrero de 2012 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=25

Fonseca, C.; Pereira, A.; Casas, J. (2011). Los REI en la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje. En M. Bosch et al. (Ed.). *Actas del III Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico: Un panorama de la TAD. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (1),* (pp. 671-684). Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

García, J.; Bosch, M.; Gascón, J.; Ruiz, L. (2005). *Integración de la proporcionalidad escolar en una organización matemática regional en torno a la modelización funcional: los planes de ahorro*. Recuperado el 15 de marzo de 2006 de http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Garcia_Bosch_Gascon_Ruiz.pdf

Gazzola, M.; Llanos, V.; Otero, M. (2011). Funciones racionales en la secundaria: primeros resultados de una actividad de estudio y de investigación (AEI). En R. Otero et al. (Ed.). *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (1)*, (pp. 493-500). Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Llanos, V.; Otero, M. (2011). Evolución de una AEI como producto de investigación al cabo de seis implementaciones consecutivas. En R. Otero et al. (Ed.). *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (1)*, (pp. 501-508). Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Llanos, V.; Otero, M.; Bilbao, M. (2011). Implementación de una AEI relativa al campo conceptual de las funciones polinómicas en la escuela secundaria: perspectiva didáctica y cognitiva. En R. Otero et al. (Ed.). *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (1)*, (pp. 486-492). Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Otero, M.; Llanos, V. (2011). La enseñanza por REI en la escuela secundaria: desafíos, incertidumbres y pequeños logros al cabo de seis implementaciones. En R. Otero et al. (Ed.). *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (1)*, (pp. 15-23). Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Parra, V.; Otero, M.; Fanaro, M. (2011). Los recorridos de estudio e investigación en la escuela secundaria: luces y sombras. En R. Otero et al. (Ed.). *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (1)*, (pp. 24-29). Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Parra, V.; Otero, M.; Fanaro, M. (2012). Enseñanza de la Matemática a partir de problemas de la Microeconomía: ejemplos de posibles Recorridos de Estudio e Investigación. *Números. Revista en Didáctica de la Matemática*, 82, pp. 17-35.

Ruiz, N.; Bosch, M.; Gascón, J. (2006). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa y F. García. (Ed.). *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (1)*, (pp. 635-660). Jaén: Publicaciones de la Diputación de Jaén.

Ruiz, N., García García, J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Relime*, 14(1), pp. 41-70.

Serrano, L.; Bosch, M.; Gascón, J. (2007). "Cómo hacer una previsión de ventas": propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. En A. Bronner et al. (Ed.). *Actas del II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico: difundir las matemáticas (y los otros saberes) como instrumentos de conocimiento y de acción (1)*, (pp. 835-857). Uzès: IUFM de l'académie de Montpellier.