VISUALIZACIÓN GRÁFICA DE HIPÓTESIS Y DESARROLLO DE PENSAMIENTO GEOMÉTRICO EN ANÁLISIS NUMÉRICO, ALGEBRA LINEAL Y MATEMÁTICA II

Elisa S.Oliva, Miguel A.Montoya, María I.Ciancio, Susana B Ruiz
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Univ. Nac. de San Juan. Argentina
eoliva@iinfo.unsj.edu.ar, elisaoliva65@gmail.com
Nivel Universitario. Pensamiento geométrico

Palabras clave: Hipótesis gráficas. Pensamiento geométrico. Ceros de funciones. Subespacios de R2.

Resumen

Se presenta una propuesta para incorporar en asignaturas de matemática de las Lic. en Geofísica y Astronomía y Lic. en Geología de la UNSJ, prácticas con fuerte base geométrica- visual. Las gráficas son herramientas con las que el alumno desarrolla su razonamiento matemático, permiten argumentación, contribuyendo a mejorar la calidad de los resultados del aprendizaje.

Esta tarea involucró las cátedras de Análisis Numérico- Algebra Lineal- Matemática II , en la primera, se abordó: La determinación de raíces reales en ecuaciones trascendentes en R, con verificación gráfica de las hipótesis del Teorema de Punto Fijo; para la segunda se trató : La incorporación de la perspectiva geométrica del concepto de subespacios vectoriales de R^2 y R^3, y en la tercera se incluyó: La perspectiva geométrica en el cálculo del área de región plana y del volumen de sólidos acotados en R^3.

El desarrollo del pensamiento visual autónomo, es una vía para mejorar el pensamiento matemático, logrando un equilibrio entre los contextos gráficos, numéricos y algebraicos. El aprovechamiento en el aula de los recursos tecnológicos permite desarrollo de pensamiento geométrico. Se trabajó en estas experiencias con software científico de excelente resolución en paquete gráfico, para apoyar, y favorecer el proceso de investigación de los alumnos, para poder cumplimentar las metas propuestas.

El objetivo final de este trabajo, es el de mejorar la calidad de los resultados del aprendizaje, y de los procesos del quehacer académico, gracias a la posibilidad de obtener representaciones gráficas de alta calidad que afianzan contenidos, permitiendo experimentación.

Introducción

En el ser humano el pensamiento y el lenguaje se desarrollan por separado; pero muy pronto comienzan a asociarse, de modo que tal asociación entre pensamiento y lenguaje, adquiere una de sus formas más desarrolladas, es lo que se conoce como lenguaje racional o intelectual o pensamiento verbal. (Guétmanova, 1989) reconoce al pensamiento verbal, o lenguaje intelectual, o pensamiento abstracto como medio para la construcción de conocimiento, pero distingue otras formas de lenguaje no intelectual asociadas a pensamiento no verbal que pueden transformarse en pensamiento abstracto; entre ellas se destacan las formas de pensamiento asociadas a lenguaje figurativo (imágenes, diagramas, figuras, símbolos o representaciones en general) : a este pensamiento asociado a representaciones lo designaremos como pensamiento visual. Entonces el pensamiento visual puede convertirse en pensamiento abstracto, es decir también puede ser medio para la construcción de conocimiento.

Las gráficas han sido usadas desde la antigüedad hasta nuestras épocas como una forma de describir el movimiento de situaciones u objetos, la variación de fenómenos para caracterizar comportamientos, como una forma de interpretación de soluciones, como una forma de comunicar resultados para entender problemas o generar habilidades para resolverlos, como un registro que favorezca la optimización en procesos y favorecen la resignificación del conocimiento matemático (Buendía, 2010).

En el sistema educativo argentino, la enseñanza está centrada fundamentalmente en un enfoque axiomático deductivo y en la resolución de problemas que en muchas oportunidades se orientan a lo algorítmico. Es necesario el desarrollo del pensamiento visual autónomo en los estudiantes pues es una vía fructífera para mejorar el pensamiento matemático. Ello hará que la visualización se coloque en una posición de equilibrio al lado de los contextos numéricos y algebraicos en la matemática escolar.

En un escenario como el actual, en el que la tecnología ha cobrado cada vez un papel más central y en el que nuestros alumnos ven a la velocidad de los avances tecnológicos actuales como algo natural, es imprescindible el aprovechamiento en el aula de todos los recursos tecnológicos a nuestro alcance para poder obtener mejores modos de visualización y desarrollo de pensamiento geométrico. Las gráficas son herramientas con las que se desarrolla el razonamiento y permiten la argumentación en diversas situaciones de uso, contribuyendo al desarrollo de la forma de pensamiento matemático.

Implicadas en este proceso las cátedras de Análisis y Cálculo Numérico- Algebra Lineal- Matemática II de las Licenciatura en Geofísica y Astronomía y de la Licenciatura en Geología, de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la UNSJ, implementaron fomentar la visualización gráfica como fuente de conocimiento, elaborando un programa de prácticas con el uso de computadora, basada en los siguientes objetivos:

- Participación activa del alumno en la búsqueda de soluciones analíticas sobre bases gráficas a problemas planteados. Integración de conceptos del área matemática y computación.
- Generar una superación de la tradicional dicotomía entre la teoría y la práctica, con ayuda de un fuerte enfoque geométrico.
- Optimizar los resultados obtenidos con software, lo cual requiere una adecuada interpretación basada en el dominio de los contenidos teóricos de la asignatura, para la producción de respuestas.

Esta nueva formación que reciben nuestros alumnos, está basada en la idea de que saber matemática, es hacer matemática, mediante la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, las conexiones, la investigación y la exploración.

Metodología

El sistema educativo no puede mantenerse hoy en día al margen del uso de tecnología. Si pretende brindar una enseñanza de calidad, precisa incorporar el conocimiento y manejo de informática como uno de sus objetivos.

La popularización del uso de computadoras con progresivo aumento de memoria virtual, permite la difusión y acceso a paquetes de cálculo simbólico, que en otra época sólo estaban disponibles en grandes centros de investigación. Además, de que estos sistemas informáticos, hoy en día, no requieren costosos aprendizajes. Todo ello estimula el uso didáctico de la PC en el tratamiento de los temas habituales de Análisis Numérico, permitiendo a los alumnos dejar de ser pasivos espectadores en las clases, para convertirse en partícipes activos, generando su propia formación.

El presente trabajo que involucra temas de las cátedras de Análisis y Cálculo Numérico-Algebra Lineal- Matemática II, respecto de la primera asignatura, se abordó con el objetivo de incorporar la obtención de conclusiones desde la visualización gráfica con uso de software científico con excelente capacidad gráfica, numérica y simbólica, para el **Análisis y determinación de raíces reales en ecuaciones trascendentes de una variable, bajo la verificación desde la gráfica de las hipótesis del Teorema de Punto Fijo**. El mismo está basado en la condición de Lipschitz (Nakamura, 1997), fuente de otros resultados importantes para el Análisis Numérico.

Se pueden discutir los siguientes puntos:

- En Análisis Numérico se analiza y programa, una amplia gama de métodos numéricos que permiten hallar ceros de una función en una variable. Dedicando especial énfasis, en cada procedimiento, a las condiciones de aplicabilidad, eficiencia, razón de convergencia, estabilidad, etc.
- Los sistemas de álgebra por computadora permiten obtener los ceros de una función: ya sea en forma aproximada al trazar la gráfica y ver rápidamente donde se cruza al eje de abscisas, o su valor numérico a través de procedimientos integrados que poseen. Su uso puede ser limitado en problemas grandes del mundo real en general.

¿Por qué entonces la elección del Método de Punto Fijo, para ser trabajado?
Se focaliza la atención en la técnica iterativa de punto fijo o iteración funcional, pues por el grado de dificultad que presenta el algoritmo, es muy sencillo en su aplicación. Utiliza, además, contenidos de cálculo diferencial en el análisis de las premisas, que se pueden trabajar en forma fácil y práctica con los comandos y las librerías de Graficación y Desarrollo del Algebra Lineal, del software elegido.

Respecto a la Segunda asignatura Algebra Lineal, se abordó la propuesta de **Incorporar la perspectiva geométrica del concepto de subespacios vectoriales reales de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$**, la obtención de conclusiones gráficas de cuando un subconjunto es o no subespacio, con uso de software científico con excelente capacidad gráfica, numérica y simbólica.

Se puede discutir el siguiente punto:

- En Algebra Lineal el desarrollo de la fundamentación simbólica del análisis de axiomas es la base del logro de los conceptos de esta área matemática, pero al alumno le cuesta materializar en ejemplos concretos el concepto en estudio.

¿Por qué entonces la elección de Subespacios en R^2 o R^3, para ser trabajado?

Algunos conceptos importantes en álgebra lineal se entienden mejor observando su interpretación geométrica, por eso se da un fuerte énfasis a visualizar ideas, sobre una verificación algebraica rutinaria (Grossman, 1999), (Lay, 2007) y a que el alumno sea capaz de brindar nuevos ejemplos en R^2 o R^3.

Respecto a la Tercer asignatura Matemática II, se abordó la propuesta de **Incorporar la perspectiva geométrica del concepto de cálculo del área de una región plana y del volumen de sólidos acotados en $\mathbf{R^3}$**, la obtención de conclusiones gráficas de cuáles son los posibles límites de integración, con uso de gráficos con lápiz y papel o realizados con software científico con excelente capacidad gráfica, numérica y simbólica.

Se puede discutir el siguiente punto:

- En Matemática II, el desarrollo de los cómputos debe realizarse con suma precisión, pero la obtención analítica de los límites de integración para la determinación con uso de integrales dobles del cálculo del área de una región plana y del volumen de sólidos acotados en R^3, debe obtenerse con fundamentación simbólica del solución de sistemas de ecuaciones, para el logro de los mismos.

¿Por qué entonces la elección de Cálculo del área de una región plana y del volumen de sólidos acotados en R^3, para ser trabajado?
(Stewart, 1998) las gráficas estimulan el razonamiento y la comprensión visual del alumno y se permite poner en acción el movimiento reformista del cálculo infinitesimal de la Regla de Tres: los temas deben tratarse en forma numérica, gráfica y simbólica, cuando se puede.

Modelo de guías propuestas a los alumnos.
1-En la materia Análisis y Cálculo Numérico-***Guía para tarea en Laboratorio de Computación***.

Ej. 1.- Graficar la función $F(x) = x^3+2x-2$ y listar intervalos que contengan sus raíces.
Ej. 2.- Observe y responda si el intervalo [0 , 1] contiene alguna raíz de $F(x) = x^3+2x-2$
Ej.3.- Analizar si a la función del ejercicio 1, se puede aplicar el teorema de punto fijo para iterar con $x = f_i (x)$, siendo las posible funciones a trabajar en el intervalo [0 , 1], las siguientes :

$f_1(x) = 1- ½x^3$ $f_2(x) = \sqrt[3]{2-2x}$ $f_3(x) = \sqrt{\frac{2}{x}-2}$ $f_4(x) = \frac{2}{x^2+2}$ $f_5(x) = \frac{x+2}{x^2+3}$

Sugerencia: Con ayuda de la librería grafica, represente la función y la derivada para analizar si verifica las hipótesis del Teorema de Punto Fijo.

Ej. 4.- Liste para las funciones f_i del ejercicio anterior que premisa del teorema de punto fijo, no se cumple y porqué.
Ej. 5.- Liste cual de las funciones f_i del ejercicio 3, tiene convergencia más rápida. Analice la cota de la derivada en el intervalo de trabajo.
Ej. 6.- Graficar la función $F(x) = e^x - x-3$ y listar intervalos que contengan sus raíces.
Ej. 7.- Observe y responda si el intervalo [1 , 2] contiene alguna raíz de $F(x) = e^x - x-3$.

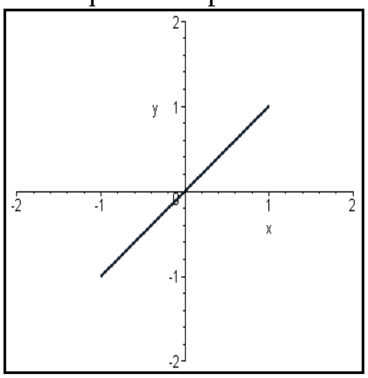
Ej. 8.- Analizar si a la función del ejercicio 6, se puede aplicar el teorema de punto fijo para iterar con x = f_i (x), siendo las posible funciones a trabajar en el intervalo [1 , 2], las siguientes : $f_1(x) = e^x - 3$ $f_2(x) = \ln(3 + x)$

Ej. 9.- Liste para la función f_i del ejercicio anterior que premisa del teorema de punto fijo, no se cumple y porqué.

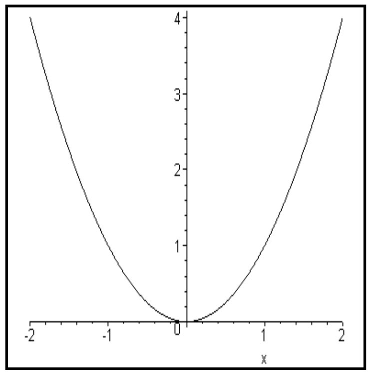
Ej. 10.- Determine en los ejercicios 3 y 8 la raíz con un error $\varepsilon < 10^{-5}$.

2- En la materia Algebra Lineal -***Guía de tarea en Práctica y en Laboratorio de Computación***.

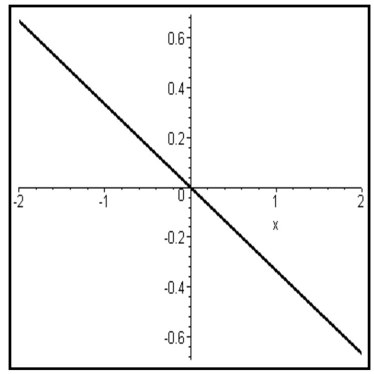
Ej. 1.- Indique cuales de los subconjuntos de las figuras son subespacios de $\Re^2$. Justifique su respuesta.



S$_1$



S$_2$

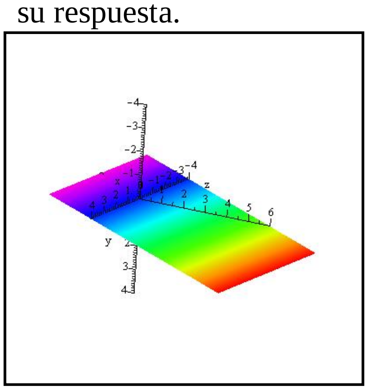


S$_3$

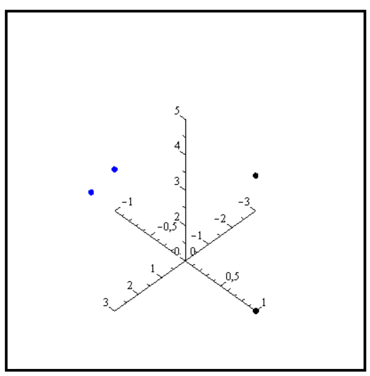
Ej.2.- a) Represente gráficamente 3 conjuntos que sean subespacios de $\Re^2$. Justifique algebraicamente por que son subespacios.

b) Represente gráficamente 3 conjuntos que no sean subespacios de $\Re^2$. Justifique algebraicamente por que no son subespacios.

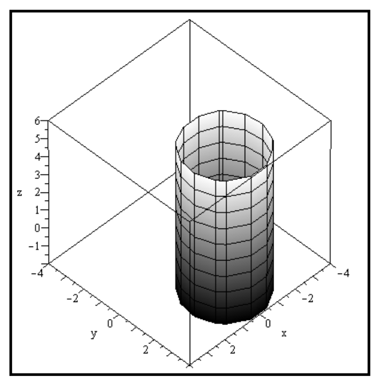
Ej. 3.- Indique cuales de los subconjuntos de las figuras son subespacios de $\Re^3$. Justifique su respuesta.



S$_1$



S$_2$



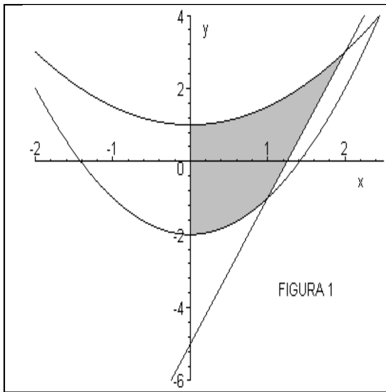
S$_3$

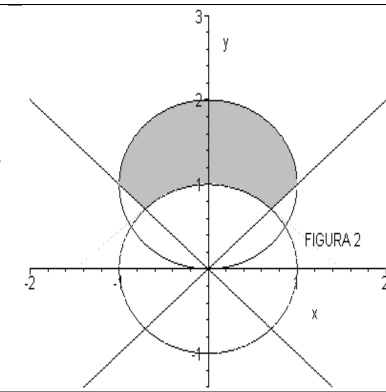
Ej.4- a) Represente gráficamente 2 conjuntos que sean subespacios de $\Re^3$. Justifique algebraicamente por qué son subespacios.

b) Represente gráficamente 2 conjuntos que no sean subespacios de $\Re^3$. Justifique algebraicamente por qué no son subespacios.

3- En Matemática II-***Guía para trabajo en Práctica y en Laboratorio de Computación***.

Ej. 1.- Con uso de integrales dobles, halle el valor del área de las siguientes regiones planas:





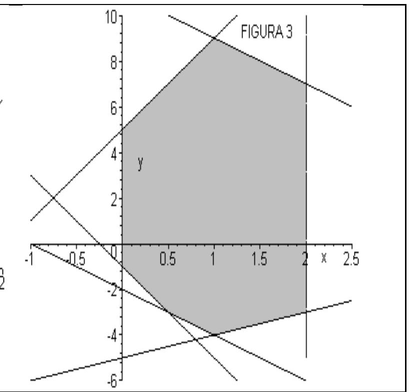
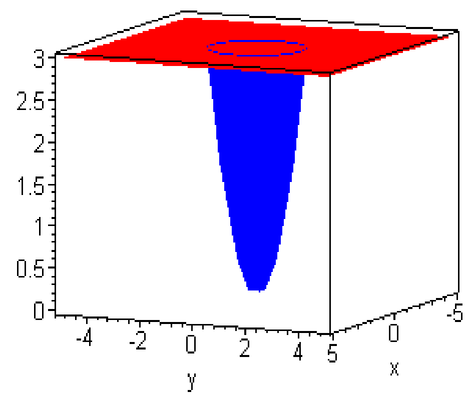
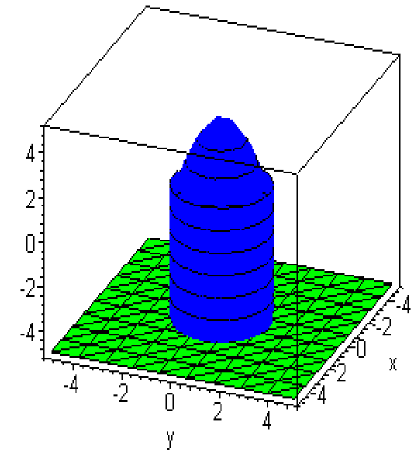


Figura **1, limitada por**	Figura **2, limitada por**	Figura 3**, limitada por**
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4x - 5 \\ y = 0{,}5x^2 + 1 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y = x \\ y = -x \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0, x = 2 \\ y = 4x + 5, \quad y = -4x - 1 \\ y = -2x + 11 \\ y = -2x - 2, \ y = x - 5 \end{cases}$

Ej. 2.- Visualice la gráfica de las siguientes regiones planas y luego determine con uso de integrales dobles el valor de su área:

Región 1, limitada por: $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = -4 \\ x + y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$ Región 2: $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y \leq 4 \\ y \geq \sqrt{3}\, x \end{cases}$ Región 3: $\begin{cases} y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \\ y \leq x^2 \end{cases}$

Ej.3: Determine con uso de integrales dobles el valor del volumen de los siguientes sólidos representados en las siguientes gráficas:

	
Sólido , limitado por $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 3 \end{cases}$	**Sólido , limitado por** $\begin{cases} z = -(x^2 + y^2) + 4 \\ z = -5 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Ej. 4.- Visualice la gráfica de las siguientes sólidos y luego determine con uso de integrales dobles el valor de su volumen:

S1: $\begin{cases} z^2 \le x^2 + y^2 \\ (z-4)^2 \le x^2 + y^2 \end{cases}$ S2: $\begin{cases} z^2 + x^2 + y^2 \le 16 \\ x^2 + y^2 \le 4 \\ z \ge 0 \end{cases}$

Breve descripción de los pasos que se realizaron para la solución de algunos ejercicios propuestos, para la asignatura de Análisis y Cálculo Numérico.

Dada una ecuación F(x) = 0 con una raíz en un intervalo [a , b], siempre se la puede rearreglar en la forma : F(x) = x - f(x), es decir puede expresarse como x = f(x) Teorema de Punto Fijo (Burden y Faires, 1992) : Si f es una f unción acotada en [a , b] x[a , b], continua en [a , b], entonces f tiene un punto fijo en [a , b]. Si además la derivada de f está acotada en [a , b] x[-L , L] con 0<L<1 (vista gráfica de la condición de Lipschitz), entonces f tiene un punto fijo único en [a , b].

- Para resolver los Ejercicio 3 y 4, se tiene en cuenta que el intervalo [a , b] = [0 , 1] y se sigue la siguiente secuencia de actividades:

- Para la función $f_1(x) = 1- ½x^3$, se establece al examinar la hipótesis gráfica que la función es acotada y continua en el intervalo (ver Figura A), y ver mediante la gráfica que su derivada no es acotada en la región [0 , 1] x [-L , L] con 0<L<1 (ver Figura B). Por lo tanto el alumno indica que falla la premisa de la derivada, por lo tanto, no es válido el Teorema de punto fijo.

> plot(1-0.5*x^3,x=0..1,y=0..1,color=black);

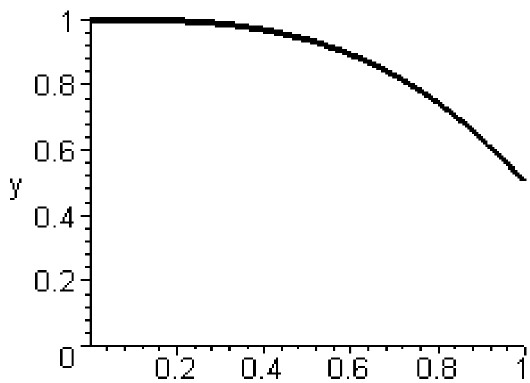


Figura A: Gráfica de la función f_1

> plot(diff(1-0.5*x^3,x),x=0..1,color=black);

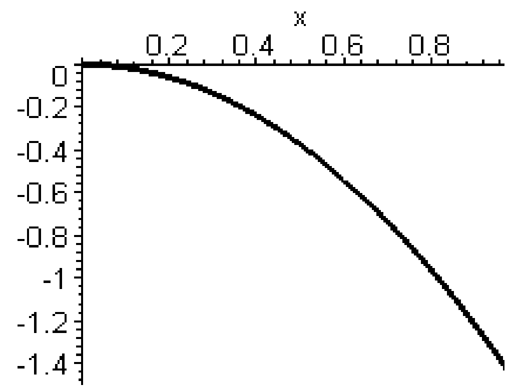


Figura B : Gráfica de la función derivada de f_1

- Para la función $f_2(x) = \sqrt[3]{2-2x}$, se concluye observando la hipótesis gráfica, que la función es no es acotada. El alumno indica que falla la premisa de la función esté contenida en el cuadrado [0,1]x [0,1] (ver Figura C), por lo tanto no es válido para esta función el Teorema de punto fijo en el intervalo de estudio.

```
>plot((2-
2*x)^(1/3),x=0..1,color=black);
```

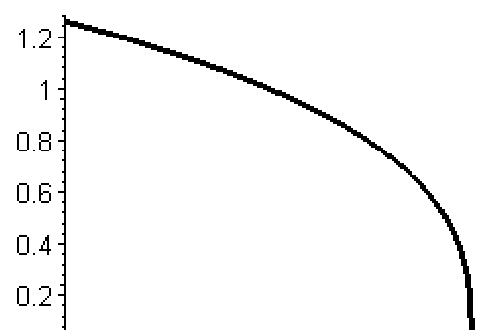


Figura C: Gráfica de la función f_2

- Para la función $f_3(x) = \sqrt{\frac{2}{x} - 2}$, se determina visualizando la hipótesis gráfica, que la función es no es acotada. El alumno indica que falla la premisa de la función esté contenida en el cuadrado [0,1]x [0,1] (ver Figura D), por lo tanto no es válido para esta función el Teorema de punto fijo en el intervalo de estudio.

```
>plot(((2/x)-
2)^(1/2),x=0..1,color=black);
```

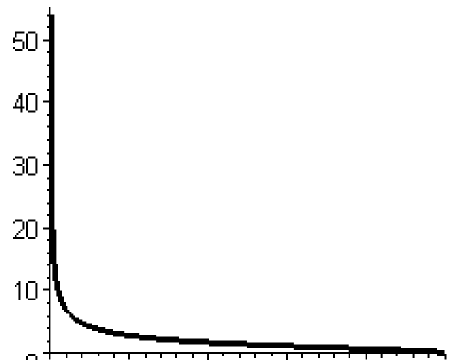


Figura D: Gráfica de la función f_3

- Para las funciones $y=f_4(x)$ e $y= f_5(x)$, se determina visualizando la hipótesis gráfica, que las mismas están acotadas en el intervalo de trabajo y que las gráficas de sus derivadas son acotadas en la región [0 , 1] x [-L , L] con $0<L<1$, por lo tanto si es válido para estas funciones el Teorema de punto fijo en el intervalo de estudio.

➢ Para resolver los Ejercicio 5 y 10, en el intervalo [0 , 1] y se itera con el algoritmo siguiendo el : $x_{n+1} = f_i (x_n)$, para i =4 , 5 .Como la razón de convergencia de f_5 es menor que la de f_4, se encuentra la raíz en un menor nº de iteraciones (Gerald y Wheatley, 2000) .

Conclusiones generales

Las gráficas son herramientas con las que el alumno desarrolla su razonamiento matemático, le permiten la argumentación en diversas situaciones de uso, contribuyendo a una forma de interpretación de soluciones, son una forma de comunicar resultados para entender problemas o generar habilidades para resolverlos, son un registro que favorecen la resignificación de conocimiento .

Nuestra experiencia docente indica que la utilización de este tipo de prácticas con fuerte base geométrica- visual, en el aula permiten mejorar la calidad de los resultados del aprendizaje, y de los procesos del quehacer académico. Los motivos principales de esta opinión están basados en la observación de los siguientes resultados:

➢ Estas actividades que se presentaron anteriormente para las cátedras de Análisis y Cálculo Numérico, Algebra Lineal y Matemática II, propiciaron en los alumnos de las Licenciatura en Geofísica y Astronomía y de la Licenciatura en Geología, la adquisición de conocimientos, fomentando la creatividad y el razonamiento. Además, la aplicación de interfaces computacionales permiten agilizar cálculos y obtener representaciones simbólica - gráficas que afianzan contenidos, evitando tener que repetir cálculos y permitiendo experimentación.

➢ La computadora permite la estimulación del pensamiento visual , pues el usuario puede acceder en forma instantánea a resultados e imágenes que facilitan la comprensión, estimulan, enriquecen, soportan cognitivamente y favorecen el proceso de investigación de los alumnos. La velocidad de trabajo de estos equipos permite dar importancia a razonar, abstraer y obtener resultados más generales, por disponer de más tiempo, dado que está liberado al no tener que resolver un gran volumen de cálculos manuales.

- Con este tipo de metodología de trabajo, se pretende mostrar al alumno que a la hora de visualizar hipótesis, explorar el cumplimiento de axiomas o funciones de trabajo para la aplicación de algoritmos, también se puede hacer rápidamente desde un gráfico, más aún cuando las relaciones provienen de la experimentación y su expresión simbólica es poco sencilla para hacer demostraciones analíticas.

Referencias Bibliográficas

Buendía, G. (2010). Una revisión socioepistemológica acerca del uso de las gráficas. En G. Buendía (Ed.) *A diez años del posgrado en línea en Matemática Educativa en el IPN* (pp.21-40). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC.

Burden, R.y Faires, J. (1992). *Análisis Numérico*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gerald, C. y Wheatley, P. (2000). *Análisis Numérico con aplicaciones*. México: Editorial Pearson Educación.

Grossman,S. (1999). *Algebra Lineal*. México: Editorial Mc Graw Hill.

Lay, D. (2007). *Algebra Lineal y sus aplicaciones*. México: Pearson. Addison Wesley.

Guétmanova, A. (1989). *Lógica*. Moscú: Progreso.

Nakamura, S. (1997). *Análisis Numérico y visualización gráfica con Matlab*. México: Prentice-Hall.

Stewart, J. (1998). *Cálculo*. México: Thomson.