LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA: ANÁLISIS DE SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y EVOLUCIÓN DE SIGNIFICADOS PERSONALES

Susana Peparelli, Nora Zón
Universidad Nacional de Río Cuarto - Argentina
speparelli@exa.unrc.edu.ar
Nivel universitario

Palabras clave: Demostración. Significados. Evolución.

Resumen
En este trabajo presentaremos un estado de avance del proyecto de innovación e investigación para el mejoramiento de la enseñanza de grado: *La enseñanza de la demostración matemática: análisis de significados institucionales y evolución de significados personales*
Este proyecto se desarrolla a partir de la idea compartida de que el paso de la enseñanza media a la universitaria es especialmente complejo y difícil de gestionar tanto para los docentes como para los alumnos que lo protagonizan.
En lo que respecta particularmente a los procesos de validación, si bien el desarrollo de la capacidad de efectuar demostraciones matemáticas constituye uno de los objetivos fundamentales de la educación matemática, la misma se presenta en una variedad de formas, apareciendo en los distintos niveles educativos diferentes tipos de argumentaciones. En los primeros ciclos de la EGB predomina una matemática informal y la argumentación prototípica es de carácter muy intuitivo. En el tercer ciclo de la EGB y en la EP, la matemática tiene como formas de argumentación la *prueba empírico-inductiva* y la *prueba deductiva informal*. En la educación universitaria, en cambio, es habitual el contacto con la *demostración deductiva* y los estudiantes han de familiarizarse con el hecho de que la argumentación deductiva es el método por el cual se establece la validación de los enunciados matemáticos.
En el primer año de estudios universitarios se hace necesario articular los distintos significados de la demostración matemática. Los esquemas informales de demostración no deben ser vistos simplemente como incorrecciones o errores sino como etapas en la apropiación de las prácticas argumentativas matemáticas.

Introducción
Es compartida la idea que el paso de la enseñanza media a la universitaria es especialmente complejo y difícil de gestionar tanto para los docentes como para los alumnos que lo protagonizan. Diferentes estudios realizados ponen de manifiesto la necesidad de problematizar y estudiar la escasa articulación percibida entre estos niveles.

Durante los últimos años, en el dictado de la asignatura Matemática Discreta, correspondiente al primer año de las carreras de Profesorado y Licenciatura en matemática, se han detectado algunos problemas que consideramos se deben fundamentalmente a la desarticulación entre las *prácticas* utilizadas en el nivel medio y las necesarias para lograr algún grado de destreza en el trabajo algebraico. Entre los indicadores de esta problemática podemos mencionar el significativo porcentaje de deserción y serias dificultades en:

- ✓ La traducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico.
- ✓ **Los procesos de validación y búsqueda de contraejemplos.**
- ✓ La utilización del recurso algebraico como herramienta útil en la resolución de problemas tanto externos como internos a la Matemática.

En lo que respecta particularmente a los procesos de validación, si bien el desarrollo de la capacidad de efectuar demostraciones matemáticas constituye uno de los objetivos fundamentales de la educación matemática, la misma se presenta en una variedad de formas, apareciendo en los distintos niveles educativos diferentes tipos de argumentaciones. En los primeros ciclos de la EGB predomina una matemática informal y la argumentación prototípica es de carácter muy intuitivo. En el tercer ciclo de la EGB y en la EP, la matemática tiene como formas de argumentación la *prueba empírico-inductiva* y la *prueba deductiva informal*. En la educación universitaria, en cambio, es habitual el contacto con la *demostración deductiva* y los estudiantes han de familiarizarse con el hecho de que la argumentación deductiva es el método por el cual se establece la validación de los enunciados matemáticos.

En el primer año de estudios universitarios se hace necesario, entonces, articular los distintos significados de la demostración matemática. Los esquemas informales de demostración no deben ser vistos simplemente como incorrecciones o errores sino como etapas en la apropiación de las prácticas argumentativas matemáticas. Por otra parte, la comprensión y dominio de la argumentación deductiva requiere, tal como sostiene Balacheff *"la adhesión a una problemática que no es la eficacia (exigencia de la práctica) sino la del rigor (exigencia teórica)"*.

En este trabajo presentaremos un estado de avance del proyecto de innovación e investigación para el mejoramiento de la enseñanza de grado *La enseñanza de la demostración matemática: análisis de significados institucionales y evolución de significados personales*, que estamos llevando a cabo en el ámbito de la asignatura Matemática Discreta.

Fundamentación

El abordaje de la enseñanza de la demostración matemática y fundamentalmente el análisis de significados institucionales y personales lo realizaremos tomando como marco teórico el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática desarrollado por Juan Diaz Godino,

El punto de partida de los trabajos realizados en este enfoque (Godino, 2002 a), (Godino, 2002 b) es considerar a la matemática desde un triple punto de vista:

- ✓ como actividad de resolución de problemas
- ✓ como lenguaje simbólico
- ✓ como sistema conceptual lógicamente organizado.

A partir de las ideas de *problema* y *campo de problemas*, se definen los conceptos de *práctica*, *objeto* (personal e individual) y *significado* (personal e individual), con el fin de considerar, por un lado, el triple carácter de la matemática y, por el otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático.

Los autores citados llaman *práctica* a toda actuación o manifestación realizada para resolver problemas matemáticos. En relación a un campo de problemas generalmente se utiliza más de una práctica diferente por lo que es posible hablar del *sistema de prácticas* asociadas a un campo de problemas.

En relación a las prácticas, los autores diferencian entre *prácticas personales* y *prácticas institucionales* según puedan variar de un sujeto a otro o sean compartidas socialmente en una misma institución.

Una *institución* esta constituida por personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. La institución matemática es el conjunto de personas que están comprometidas con la resolución de problemas matemáticos. Existen también instituciones como las escolares o las profesionales que podrían estar interesadas en un mismo campo de problemas pero utilizar prácticas diferentes para resolverlos. Esta diferenciación resulta interesante desde el punto de vista didáctico ya que permite recoger tanto los procedimientos y soluciones a los problemas que la institución considera correctos como los que considera incorrectos y que para los alumnos constituirían buenas soluciones al problema planteado.

A partir de la actividad de resolución de problemas y del sistema de prácticas asociadas a un campo de problemas, se produce en la institución la emergencia progresiva de ciertos objetos. El sistema de prácticas institucionales asociado al objeto se define como *significado institucional del objeto.*

Similarmente, el aprendizaje del sujeto se produce mediante la emergencia progresiva del *objeto personal* a partir del sistema de prácticas personales que pone en juego la persona para resolver el campo de problemas. Este sistema de prácticas personales constituye el *significado personal del objeto.*

En síntesis, de un mismo campo de problemas C que en una institución ha dado lugar a un objeto OI con significado S(OI), en una persona puede dar lugar a un objeto OP con significado personal S(OP). Desde el punto de vista de la institución las manifestaciones que se consideran correctas, es decir lo que la persona "conoce" o "comprende" del objeto OI, son concebidas como la intersección de los dos sistemas de prácticas.

Los objetivos que los autores persiguen con la elaboración de los constructos *objetos* y *significados* (personales e institucionales) son esencialmente: distinguir las entidades emergentes (objetos), de los sistemas de prácticas de donde provienen y las entidades psicológicas (personales) de las entidades epistemológicas (institucionales).

Descripción del proyecto

La implementación del proyecto contempla dos tipos de estudios, un estudio teórico y uno experimental.

Estudio teórico: Implica el estudio sistemático acerca de los diversos significados de la "demostración" y nociones relacionadas tales como la argumentación, validación, justificación, etc., en distintos contextos institucionales y la delimitación del significado institucional pretendido para la demostración matemática al finalizar el dictado de la asignatura Matemática Discreta.

Estudio experimental: Pretende caracterizar las prácticas argumentativas matemáticas de los ingresantes al profesorado y/o licenciatura en matemática, y la evolución de dichos esquemas ante la implementación de propuestas de intervención didáctica.

Los significados de la demostración matemática que se tomaran como significados de referencia para los distintos tipos de estudios son los considerados por Ángel Recio en su tesis doctoral *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática:*

- ✓ *Argumentación informal* (AI) suele usarse en la vida cotidiana, es situacional y dependiente del contexto. No da lugar necesariamente a verdades ya que se apoya en consideraciones que pueden tener solo un valor local. Las argumentaciones matemáticas informales son instrumentos validativos importantes ya que sirven de fundamento para la justificación intuitiva de conjeturas.
- ✓ *Prueba empírico-inductiva* (PEI) son las que utilizan la comprobación en casos particulares como una forma de aproximación a la validación genérica.
- ✓ *Prueba deductiva informal* (PDI) son formas de demostración matemática que se basa en razonamientos lógicos, deductivos pero con fuerte presencia de elementos intuitivos.
- ✓ *Prueba deductiva* (PD) es la prototípica de argumentación matemática, de carácter axiomática.

Objetivos del proyecto

General

Minimizar la distancia existente entre los significados personales y el significado institucional pretendido, en torno a los procesos de validación matemática

Específicos

- ✓ Analizar las diferencias de significados de demostración matemática en distintos contextos institucionales.
- ✓ Analizar significados personales de la demostración matemática.
- ✓ Elaborar propuestas de intervención didáctica que favorezcan la evolución de significados personales.

Acciones llevadas a cabo

El conjunto de acciones desarrolladas, por sus características, pueden ser agrupadas en: actividades de formación; investigación y actividades desarrolladas con los alumnos

Actividades de formación

Se realizaron seminarios en torno a investigaciones realizadas acerca de la problemática de la enseñanza del algebra y del trabajo sobre la validación matemática en el aula. Estos seminarios permitieron:

- ✓ la elaboración de actividades de diagnóstico para los años 2011 y 2012.
- ✓ delimitación de significados de la demostración matemática presentes en libros de texto tanto de la EGB como de la EP.
- ✓ diseño de clases en las que se trabaje en torno a *tareas* que posibiliten tanto la emergencia de significados personales como la negociación de los mismos

Actividades de investigación

En función de los objetivos del proyecto y de los seminarios se llevó a cabo

- ✓ un análisis de la currícula del nivel medio y de algunos libros de texto, en relación a los contenidos de la asignatura presentes en ese nivel, con el objetivo de determinar la dinámica de los saberes en cada institución. En los libros de textos el análisis estuvo centrado en las nociones de divisibilidad fundamentalmente en lo que se refiere a los procesos de validación; seleccionando para dicho análisis una editorial de uso habitual en nuestra región y revisando los textos de séptimo, octavo y noveno año, como así también el correspondiente al nivel polimodal.
  Los análisis realizados permitieron concluir que si bien todos los contenidos conceptuales, correspondientes a la temática abordada, están presentes en ambos niveles; el rol y significado que se le asigna a la prueba matemática es diferente.
- ✓ la primera delimitación del *significado institucional pretendido* al finalizar el dictado de la asignatura. Consideramos que dicho significado debería tener las características de una prueba deductiva, basada en razonamientos lógicos pero no necesariamente de carácter axiomática; de acuerdo a los significados propuestos por Recio el significado institucional delimitado toma características de las PDI y las PD

Actividades con los alumnos

Debido a que el ingreso a las carreras de la UNRC tiene como objetivo central plantear una reflexión crítica sobre la importancia de los procesos de lectura y escritura en el acceso al conocimiento y la construcción de la cultura universitaria, ya en los talleres para ingresantes a las carreras de matemática, se trabajó en torno a un conjunto de actividades que abordaban el *lenguaje matemático* y los *procesos de validación* y que se articularon con el dictado de la asignatura Matemática Discreta.

La implementación de dicha asignatura se organizó en 6 horas de carácter teórico-práctico y 2 horas semanales, con acciones propias del proyecto, donde el *objeto de estudio fue la validación matemática* a través de problemas que favorecieran el establecimiento de conjeturas, su demostración o refutación y que abordaran distintos contenidos conceptuales y procedimentales.

La intención, es lograr que el conjunto de acciones posibiliten la emergencia tanto de los sentidos construidos en la escuela media, en torno a las herramientas algebraicas y los procesos de validación, como de las dificultades en el aprendizaje de los distintos conceptos involucrados en la asignatura.

La organización de estas clases contempla un primer momento de trabajo individual por parte de los alumnos, para posteriormente reunidos en grupos de 3 o 4, acuerden una respuesta, la cual es comunicada, en algunos casos en forma oral por un integrante del grupo, seleccionado al azar, en otros redactando un afiche, que permita al resto de los grupos entender la solución encontrada. Las distintas formas implementadas para la comunicación de las producciones favorecieron la emergencia tanto del vocabulario específico como de las notaciones correspondientes y la necesidad del uso adecuado de los mismos. En todos los casos la clase finalizó con una puesta en común de las producciones y la defensa de las soluciones encontradas.

Concretamente, se trabajó en torno a las siguientes actividades:

Actividad 1: *El lenguaje algebraico*
El trabajo realizado estuvo centrado en crear la necesidad de utilizar el lenguaje algebraico y por ende la traducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico, los procesos de validación y búsqueda de contraejemplos. Las tareas presentadas abordaban las diferentes formas de razonamiento matemático y la importante vinculación que tiene este razonamiento con los distintos lenguajes involucrados en la actividad matemática.

Actividad 2: *Las conjeturas y la generalización*
El trabajo se realizó en torno a tareas que favorecían la detección de regularidades en una figura con el fin de facilitar la construcción de una fórmula. La puesta en común se llevó a cabo mediante la técnica del afiche para analizar y reflexionar sobre las estrategias utilizadas.

El problema seleccionado implicaba encontrar una fórmula para el paso ***n*** de una cierta colección que se construye iterativamente según un proceso que guarda una regularidad definida de un modo explícito y admitía distintas resoluciones, lo que favoreció el trabajo de equivalencia de fórmulas, favoreciendo un abordaje desde distintos planos:

- ✓ evaluar las distintas fórmulas en números particulares y constatar que den igual lo que lleva a una validación insuficiente pero no incorrecta
- ✓ apoyarse en las propiedades de las operaciones para analizar la igualdad de cálculos diferentes, para todo valor de n.

De esta manera la discusión en torno a las vinculaciones entre distintas fórmulas equivalentes posibilita la evolución en los procesos de validación, desde la constatación con casos particulares hasta la comprobación para todo valor ***n***.

Se presentaron también tareas en torno a los números figurados que posibilitaban el establecimiento de conjeturas y su validación por medio del Principio de Inducción Matemática

Actividad 3: *El signo igual*
Durante el abordaje de los distintos contenidos conceptuales y procedimentales de Matemática Discreta emergen distintos significados del signo igual tales como, la igualdad como una relación de equivalencia, la igualdad entre conjuntos como consecuencia de la antisimetría de la relación de inclusión, la igualdad entre números naturales a partir de la antisimetría de la relación de divisibilidad en IN y la limitación al extender a la divisibilidad en Z

Con el objetivo de poner en evidencia que el signo igual, como todo símbolo matemático, tiene un significado que no es unívoco, se trabajó en una serie de tareas que ponían en funcionamiento la igualdad como *operador*; como *expresión de una acción, de una equivalencia condicional, de una equivalencia* o *de una relación funcional*; como *definición de un objeto matemático*; y como *aproximación.*

Actividad 4: *Conteo*
Se abordaron tareas que favorecieran el surgimiento de distintas maneras de contar y permitieran la institucionalización del Principio General de la Multiplicación, las variaciones, permutaciones y combinaciones.

Actividad 5: *División entera, divisores y múltiplos de un número, relación de congruencia*
Se presentaron en clases sucesivas conjuntos de tareas. El objetivo fundamental del primer conjunto fue la distinción de la operación división entera y la relación de divisibilidad y sus complementariedades. En el caso de la segunda tarea, el propósito fue establecer vinculaciones, entre las relaciones de divisibilidad y congruencia.
El conjunto de problemas seleccionados tenían también el objetivo de hacer visible la diferencia entre el trabajo aritmético y el trabajo algebraico

Actividad 6: *La definición*
Se trabajó en torno a actividades orientadas al análisis de distintas definiciones de un mismo objeto matemático. Esta actividad surgió como necesidad de los propios alumnos, ante la presencia de “distintas definiciones” según la bibliografía consultada.

Significados personales. Diagnóstico: resultados
El conocimiento de los significados personales proporciona elementos para la elaboración de estrategias de intervención didáctica que favorezcan el desarrollo progresivo de los conocimientos y de esta manera posibilitar que los alumnos puedan progresar de una a otra forma de argumentación.

Al comienzo del cuatrimestre, con el objetivo de describir los significados personales acerca de la demostración matemática del grupo de alumnos, se elaboró e implementó un diagnóstico. Los tipos de respuestas dadas por los estudiantes fueron considerados como esquemas personales de demostración y pueden ser relacionados con los distintos tipos de argumentación matemática mencionados.

El diagnóstico constaba de dos partes. La primera consistió en una situación que implicaba el establecimiento de una generalización. La segunda contaba con tres ítems, uno que requería decidir la validez de ciertos enunciados, otro en el que se solicitaba una demostración y el tercero que indagaba acerca de que entienden los alumnos por "demostración" y algunas nociones relacionadas con ella. Todos los ítems presentados requerían de nociones elementales de la teoría de números, esta elección se debió, por un lado, a la vinculación con los contenidos de la asignatura Matemática Discreta y por otro, a que precisamente es en este ámbito donde los libros de textos del nivel medio presentan explícitamente algún tipo de demostración matemática así como el rol de los ejemplos en la refutación de un enunciado.

Para el análisis del diagnóstico las distintas respuestas, en el caso de la primera parte, se agruparon en los siguientes tipos:

Tipo 1: deficiente, falta de comprensión de la tarea propuesta.
Tipo 2: trabajo correcto solo con casos particulares.
Tipo 3: establecimiento de generalización pero con algunas dificultades.
Tipo 4: correcto.

De los resultados obtenidos se desprende que si bien el 65% de los alumnos establecen una generalización, solo el 30% de ellos lo hace de manera correcta.
En el caso de la segunda parte los tipos seleccionados para el análisis fueron:

Tipo 1: deficiente, falta de comprensión de la tarea propuesta.
Tipo 2: debido a que sólo se intenta explicar y/o describir pueden ser consideradas argumentaciones explicativas y por lo tanto formas elementales de argumentación informal.
Tipo 3: se realizan comprobaciones con ejemplos afirmando su cumplimiento en general. Pueden considerarse pruebas empírico-inductivas
Tipo 4: se utilizan esquemas lógicos pero más bien intuitivos. Pueden interpretarse como pruebas deductivas informales.
Tipo 5: se interpretan como formas elementales de demostraciones deductivas

Las respuestas obtenidas parecen sugerir que los esquemas de demostración dependen del conocimiento matemático. En la totalidad de los alumnos existió una marcada diferencia entre las argumentaciones utilizadas cuando se trataba de números naturales y se hacia referencia a las propiedades de ser par e impar, de las usadas en las actividades que involucraban conceptos de divisibilidad. En el primer caso el 55% de los alumnos presenta argumentaciones informales o pruebas empírico-inductivas y un 18% argumentaciones deductivas; si bien un número considerable de estas respuestas presentan problemas al operar; en el caso de la divisibilidad el 79 % o bien no contestan o bien presenta una respuesta deficiente.

Esta situación se contrapone con lo observado en los libros de textos de nivel medio analizados, donde, tal como lo indicáramos, es en el contexto de la divisibilidad donde se encuentran en mayor medida el uso del contraejemplo y de argumentaciones deductivas.

Conclusiones y Proyecciones futuras

Los resultados obtenidos permiten concluir que los alumnos ingresantes al Profesorado y/o Licenciatura en Matemática poseen un nivel básico de demostración matemática deductiva. Solo el 7% de los mismos manifiestan esquemas personales en torno a pruebas empírico-inductivas o pruebas deductivas informales.

Si se concibe la matemática, en relación a su enseñanza, como un *conjunto de prácticas* asociadas a un espacio de problemas que se constituyen a partir de un conjunto de conceptos con sus propiedades y que dichas prácticas se inscriben y escriben en un determinado lenguaje simbólico con leyes específicas que rigen la configuración de un conjunto de técnicas; el conjunto de indicadores obtenidos del trabajo realizado con dos grupos de alumnos, constituye un diagnostico de las dificultades y rupturas que implica el pasaje del nivel medio al universitario en términos del *significado* de cada noción construido en cada nivel a partir del *sistema de prácticas.*

Si pensamos, además, que la matemática discreta contribuye al desarrollo de ciertas capacidades fundamentales como: la de formalizar, razonar rigurosamente y representar adecuadamente algunos conceptos; consideramos que puede constituirse en el ámbito propicio para concebir un escenario didáctico en el cual los alumnos puedan elaborar criterios para validar sus producciones

Referencias Bibliográficas

Balacheff, N. (1987) *Processus de preuve et situation de validations.* Educational Studies in Mathematics. vol. 18, núm. 2, pp. 147-176.

Godino, J. (2002 a) *Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática.* XVI Convengo Nazionale: Incontri con la Matemática. Bologna. Italia

Godino, J. (2002 b) *Problemas de investigación basados en el enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación matemática". Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España

Recio, A. (1999) *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada. España