

## **UNA PROPUESTA DE CLASE CON GEOGEBRA: EL DOMINIO, RANGO Y LA TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES CONSTRUYENDO ANIMACIONES**

*Ricardo Rey Monroy, Sandra Rojas, William Jiménez*

Universidad Distrital Francisco José de Caldas e

Instituto pedagógico Nacional de Colombia

lordking\_28@hotmail.com

Nivel Universitario

**Palabras clave:** Software. Funciones. Transformación de funciones.

**572**

### **Resumen**

En éste documento se presentan algunos de los resultados obtenidos dentro del grupo de estudiantes para profesor de la educación básica con énfasis en matemáticas, en el curso de Didáctica de la Geometría en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, guiados por el estudio de los movimientos rígidos como translaciones y reflexiones, y transformaciones de compresión en representaciones gráficas de un sistema de coordenadas cartesianas en un plano real, haciendo énfasis en el estudio de los comportamientos del dominio y rango de las funciones. La propuesta se desarrolla dentro de la aplicación de una actividad que tiene como propósito hacer uso del software de geometría dinámica “GeoGebra” y sus herramientas, para construir animaciones visualmente atractivas, en donde se hiciera evidente el manejo de las transformaciones mencionadas anteriormente, pretendiendo una reflexión sobre su comportamiento.

### **Introducción**

En el año 2011 en la cátedra de Didáctica de la Geometría de quinto semestre del proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá, Colombia), se proponen actividades enmarcadas en la resolución de conflictos haciendo énfasis en el uso de las tecnologías en el aula como: software matemáticos e instrumentos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas. Una de dichas actividades se centró en el tema de “transformaciones de funciones en el plano real” haciendo uso del software de geometría dinámica “GeoGebra”. Se propuso una situación basada en la elaboración de animaciones creativas donde la representación gráfica en un sistema de coordenadas cartesianas de funciones, sus dominios y rangos, movimientos rígidos como translaciones, reflexiones, y transformaciones de compresión, fueron los elementos básicos para la construcción de la animación.

Para abordar la propuesta de clase se hacen necesarios algunos conceptos teóricos que abordaremos más adelante; sin embargo, es importante mencionar que la propuesta no tiene como objetivo la enseñanza de los conceptos sino su manipulación y reconocimiento de las características principales básicas para la creación de una animación visualmente atractiva.

### **Marco teórico**

En nuestros precedentes teóricos consideraremos algunos conceptos básicos como la función, su dominio y su rango, además de las trasformaciones de una función vistas como

movimientos rígidos. Dichos conceptos y procesos son los que se pretenden afianzar en la actividad propuesta mediante el uso de GeoGebra.

Llamaremos función de un conjunto  $A$  en un conjunto  $B$ , a toda relación  $R$  de  $A$  en  $B$  que cumpla la condición:

*Para todo elemento  $x \in A$ , existe un elemento  $y \in B$  y sólo uno tal que  $xRy$ .*

Llamaremos dominio y rango de la función  $f$  a los conjuntos  $D(f)$  e  $I(f)$  definidos así:

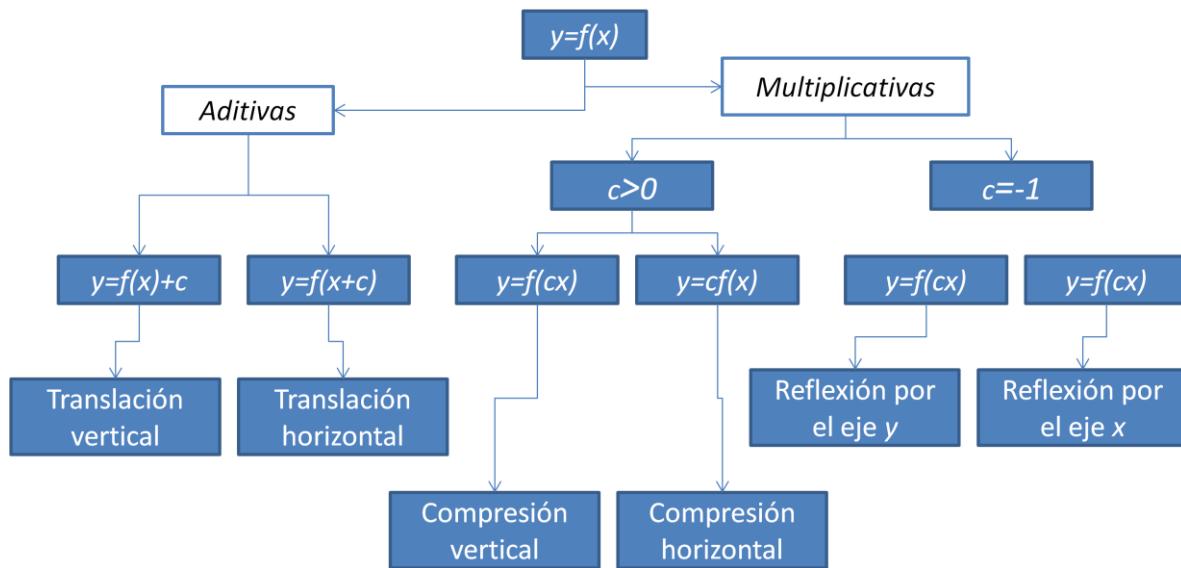
$$D(f) = \{x : x \in A \wedge xRy \text{ (para algun } y \in B)\}$$

$$I(f) = \{y : y \in B, \wedge xRy \text{ (para algun } x \in A)\}$$

(Muñoz, 2002)

Para nuestro caso particular, funciones en los reales ( $\mathbb{R}$ , tendremos que  $A$  y  $B \subseteq \mathbb{R}$ , en este caso es usual presentar la función con la notación  $y=f(x)$ ).

Las funciones reales pueden originar otras a través de trasformaciones de ésta haciendo operaciones aditivas o multiplicativas, los resultados al realizar estas se resumen en el *esquema 1* (Jiménez, Mayorga, Ahumada y Cuchigay, 2011)



Esquema 1. Resumen de las características de la transformación de funciones

### Consolidación

Lo primero es la aplicación de una de las herramientas de GeoGebra. La primera de ellas es el deslizador el cual se empleó para dar movimiento a las funciones, hacer variar un objeto con un cambio definido en intervalos de números racionales; es decir, se aplica el deslizador para comenzar a animar las representaciones gráficas de las funciones descritas anteriormente por ejemplo, en la figura 1 se muestra la función  $y = \sin(ax)$  para valores de  $a$  entre 0 y 5.

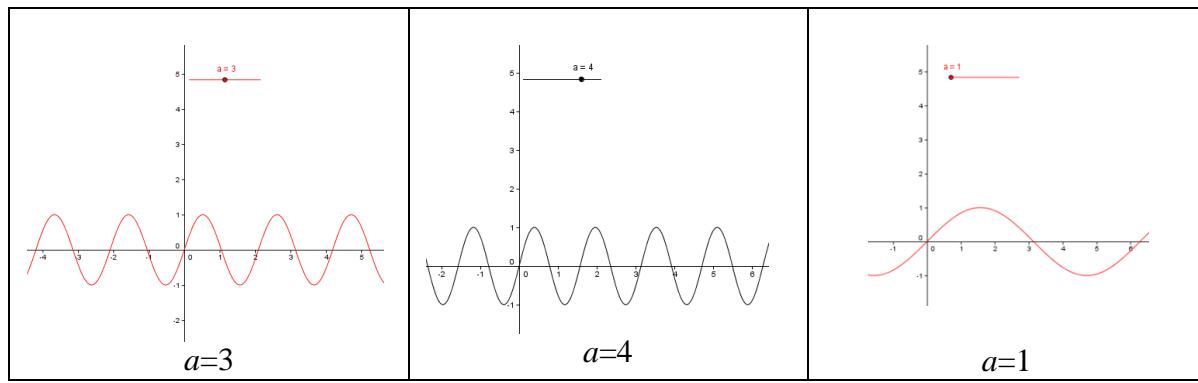
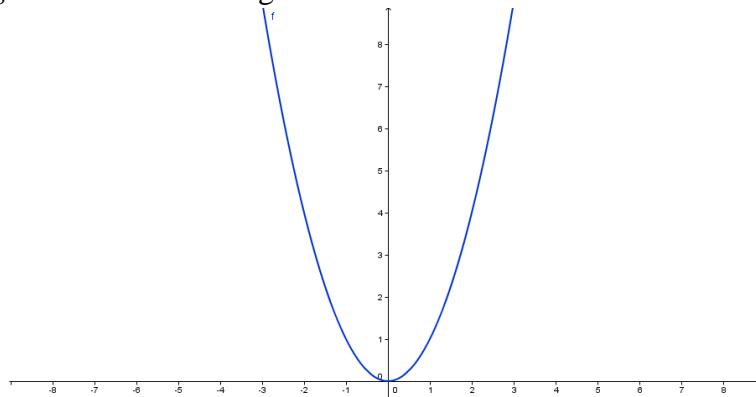


Figura 1

574

La actividad da inicio con la explicación de las diversas formas de graficar una función en GeoGebra; la primera de estas es el de la herramienta sin restricción o condicional “ $y =$ ” ó “ $f(x) =$ ” que sirven para graficar una función con dominio sin poner condición alguna puesto que el software mismo identifica el dominio de la función por ejemplo, en la función  $f(x) = \frac{1}{x}$  la gráfica reconoce que la función está definida para todo número real salvo para el cero. En la *figura 2* se muestra la gráfica resultante al escribir la función cuadrática.

Figura 2.  $f(x) = x^2$ 

La segunda forma para graficar una función es la herramienta condicional dada por la forma “*Si[<condicion>,<entonces>,<si no, entonces>]*” , que sirve para definir funciones a trozos, por ejemplo, para graficar funciones relacionadas con el valor absoluto que dependen de un intervalo para trazar el segmento de alguna función, se condiciona el dominio pro ejemplo para la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Se usaría la forma: *si*[ $x \leq 0, x^2, x$ ] (*Figura 3*)

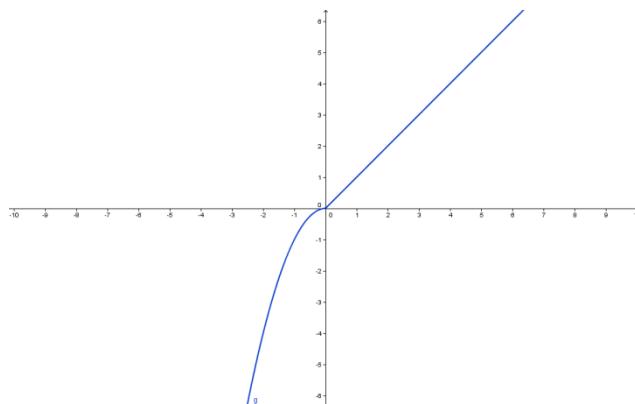
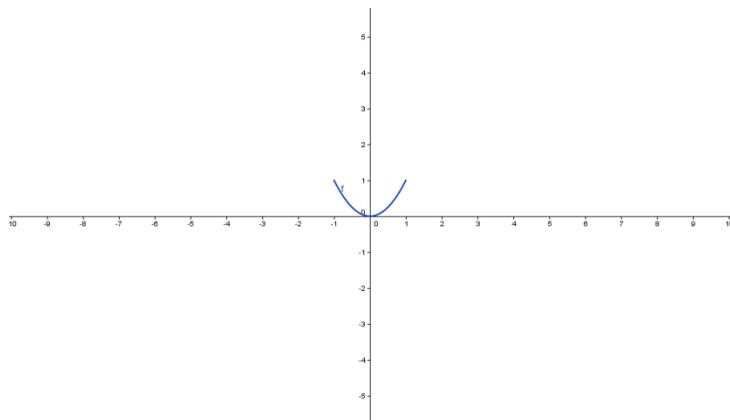
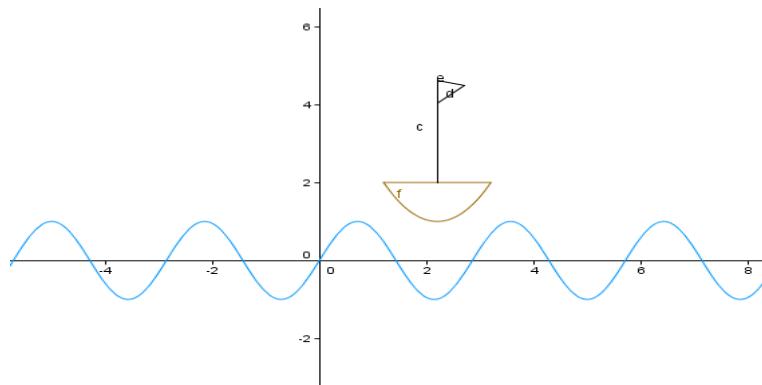


Figura 3

Y por último, la tercera forma: función con restricción dada por la forma “*Función[<función>,<valor inicial>,<valor final>]*” ésta sirve para restringir la función en un intervalo dado, donde se restringe el dominio para obtener solamente un trozo de la función (*figura 4*).

Figura 4. *Función[x^2, -1, 1]*

Haciendo uso de éstas formas y diferentes tipos de funciones, se procede a realizar la construcción de varias imágenes interesantes. Un ejemplo la construcción de una “barca” que esta sobre el agua, que se desplaza sobre el mar (*figura 5*), actividad que se propuso para que los estudiantes las replicaran. Cuando se les pide a ellos que re grafiquen la barca empiezan a aparecer los errores en las animaciones, un listado de estos es el siguiente:



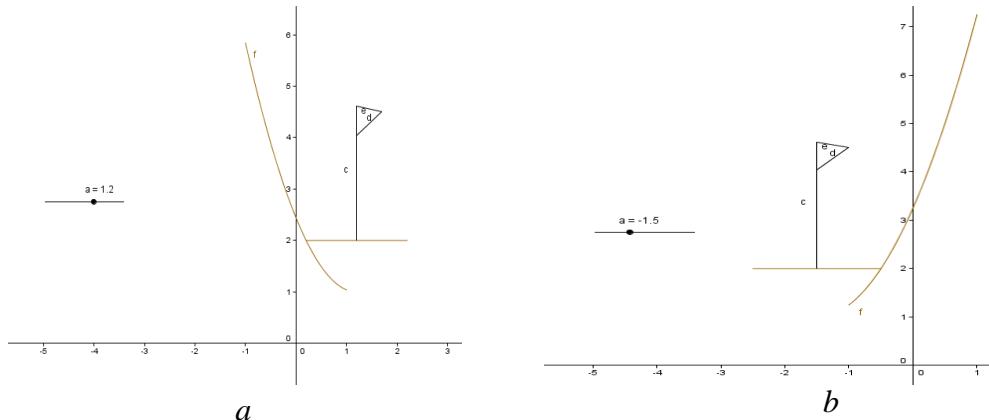
576

Figura 5. Gráfica de las funciones con las que se creó la barca

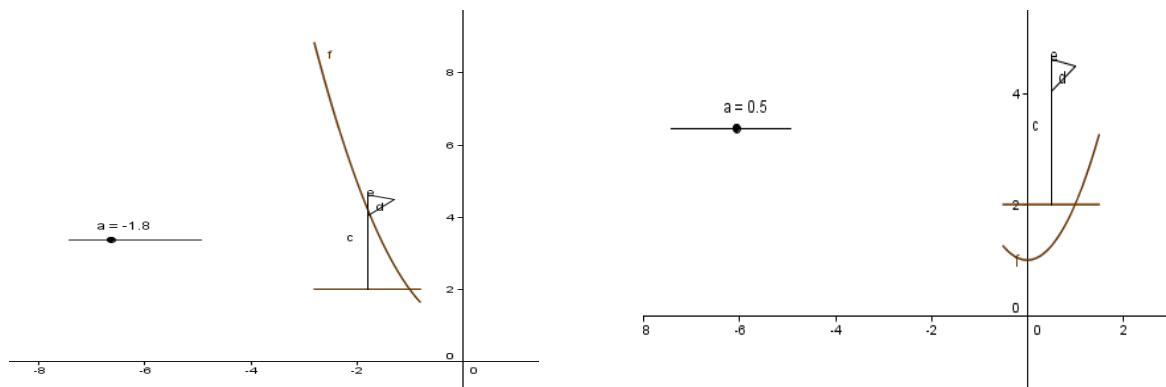
**Error 1:**

Desaparece y reaparece la función: se anima la función de la parábola y de la vela de la barca, pero no se anima el dominio, por tanto la barca se va a mostrar únicamente en el intervalo escogido (*figura 6*). La solución de éste error, es incluir el valor del deslizador al intervalo escogido en la función, para hacer que el dominio varíe junto con las funciones de la barca así:

$$\text{Función}[(x - a)^2 + 1, a - 1, a + 1]$$

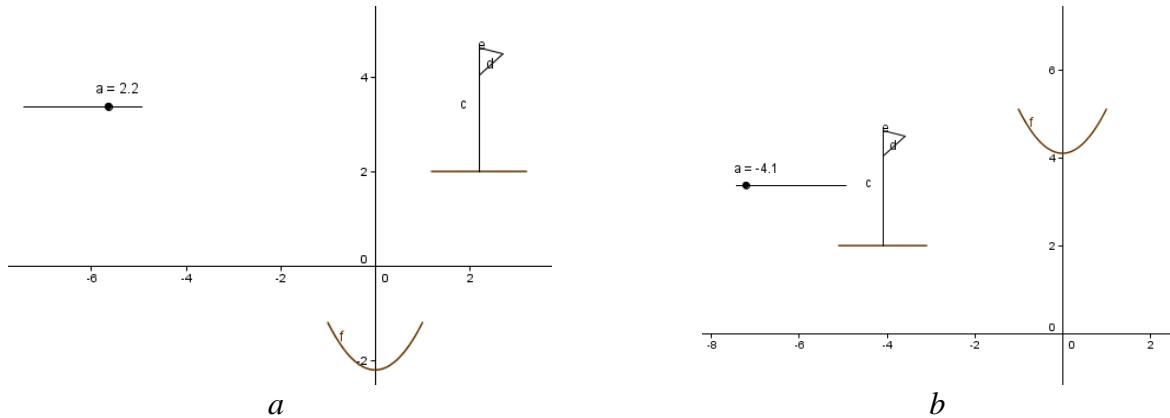
Figura 6.  $\text{Función}[(x - a)^2 + 1, -1, 1]$ **Error 2:**

El intervalo se mueve, pero la función no: en éste caso, se anima el intervalo con la inclusión del valor del deslizador, pero se olvida animar con el valor del deslizador las funciones de la barca (*Figura 7*).


 a Figura 7. Función  $[(x - a)^2 + 1, a - 1, a + 1]$ 
**Error 3:**

La barca no se mueve horizontalmente, por el contrario tiene movimientos verticales: el error sucede porque se hace mal la aplicación de la transformación aditiva de la función, entonces la función no se traslada como se desea (Figura 8), la corrección a éste error es aplicando la transformación:

$$f(x) = ((x - a)^2 + 1)$$


 Figura 8. Función  $[(x - a)^2 + 1, a - 1, a + 1]$ 

Una vez corregidos los errores que suceden al graficar funciones y animarlas, animamos los puntos con los que se construye la “vela” de la barca incluyendo el valor del deslizador en la coordenada, y graficamos la función  $f(x) = \sin(x)$  aplicando transformaciones de compresión para obtener una animación de agua en movimiento, obteniendo como resultado como resultado las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} &\text{Función}[(x - a)^2 + 1, a - 1, a + 1] \\ &\text{Función}[2, a - 1, a + 1] \\ &f(x) = \sin(ax) \end{aligned}$$

Arreglamos algunos detalles como los colores de las gráficas, ocultar rótulos, cambiar el color de los ejes y demás objetos que no se necesita hacer visible y obtenemos:

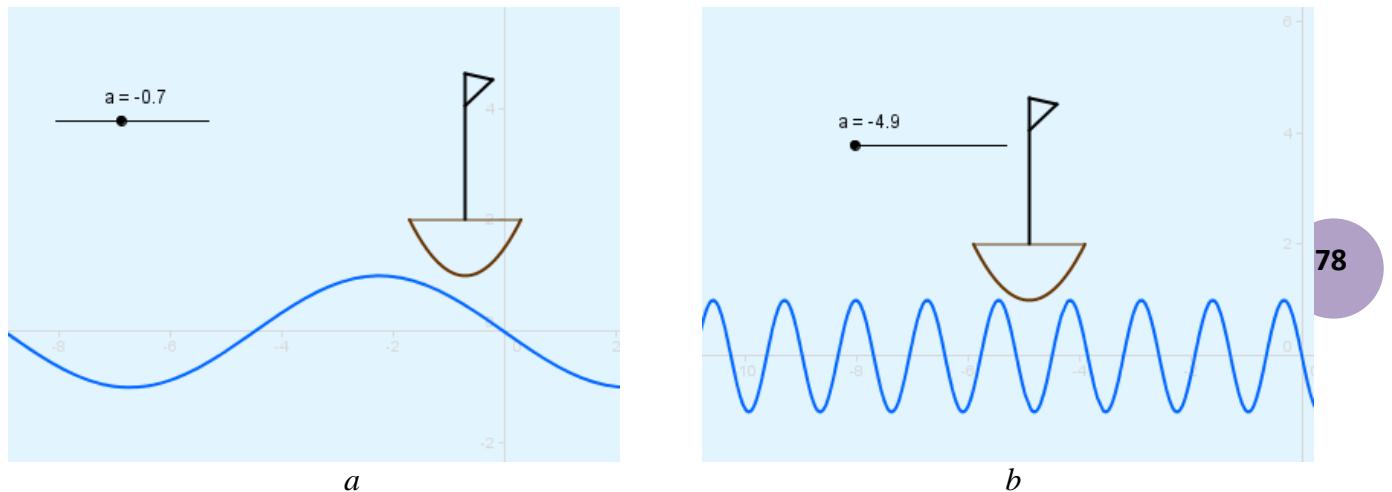


Figura 9. Animación de la barca

Finalmente se propone a los estudiantes que realicen su propia animación. Algunos ejemplos de las construcciones realizadas se muestran en las *figuras 10 y 11*.

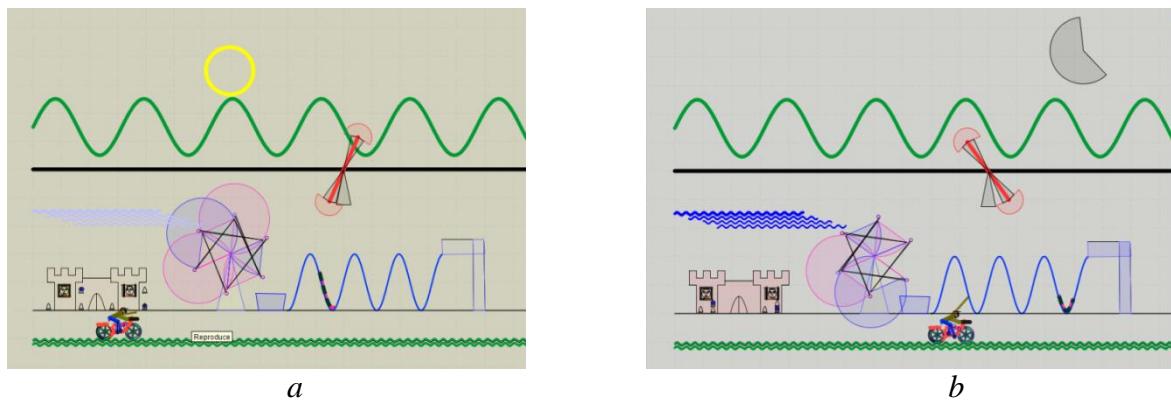


Figura 10. Proyecto 1

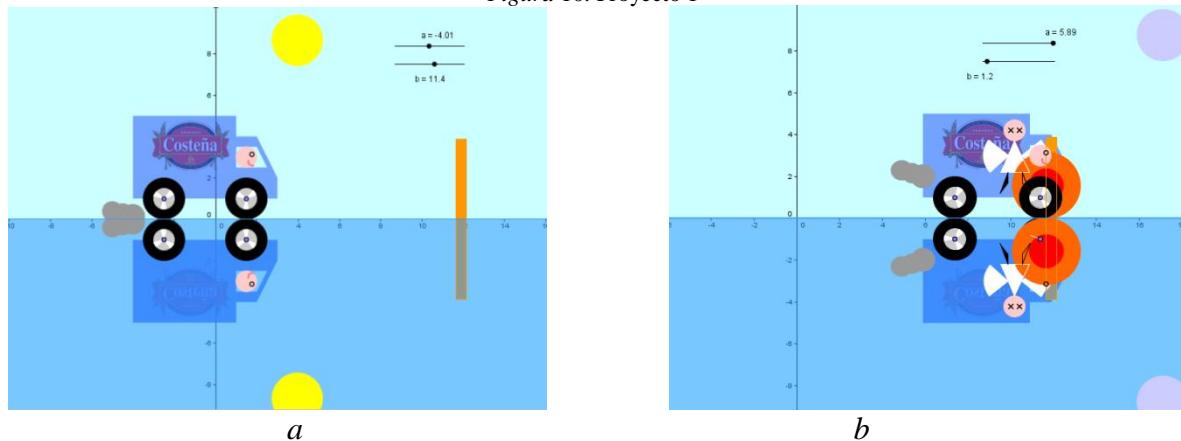


Figura 11. Proyecto 2

## **Conclusiones**

El tipo de actividad propuesta exige de parte de los estudiantes para profesor de matemáticas comprender los conceptos que se emplean en las animaciones como los son dominio, rango, transformaciones de funciones, entre otros, logrando establecer relaciones entre los diferentes sistemas de representación, en este caso, entre el algebraico y el gráfico.

Analizar los errores cometidos en las construcciones permite que los estudiantes reconozcan cuáles son los tipos de errores y dificultades que se presentan en este tipo de actividades e identifiquen cuáles de ellas son inherentes al concepto mismo y cuáles son generadas por el uso del software.

579

Finalmente, el proponer a los estudiantes para profesor este tipo de actividades les posibilita reconocer otro tipo de enfoque para la enseñanza de las matemáticas escolares, en el que la incentivación y el uso de software matemático y situaciones problemáticas dan sentido a la actividad matemática en el aula.

## **Referencias Bibliográficas**

- Jiménez W., Mayorga L., Ahumada J. y Cuchigay A. (2011). *Transformaciones de funciones en coordenadas polares*. Recuperado el 17 de marzo de 2012 de [http://www.uptc.edu.co/eventos/2011/enemes/programacion/documentos/memorias\\_2011.pdf](http://www.uptc.edu.co/eventos/2011/enemes/programacion/documentos/memorias_2011.pdf)
- Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Bogotá, ed. Universidad Nacional de Colombia.