



II CEMACYC

II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

29 octubre al 1 noviembre. 2017

Cali, Colombia

ii.cemacyc.org



CI AEM
CME
desde - since 1961



Enseñanza de la Estadística mediante la resolución de problemas

Luis Armando **Hernández** Solís

Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*, Ministerio de Educación Pública

Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Estatal a Distancia

Costa Rica

luis.hernandez.solis@mep.go.cr

lhernandez@uned.ac.cr

Resumen

La resolución de problemas y la enseñanza de la Estadística han ido ganando terreno en las investigaciones debido a su relación estrecha con el desarrollo de capacidades superiores asociadas a la competencia matemática; estas han sido incorporadas en los planes de estudio de varios países. Aquí se describirá una visión e interrelación entre estos componentes pedagógicos, usando el caso del currículo de Costa Rica que enfatiza la resolución de problemas en contextos reales y el estudio de la Estadística. Luego, a partir de un problema con medidas de dispersión se analizará el desarrollo de capacidades superiores que el mismo permite.

Palabras clave: Estadística, resolución de problemas, currículo matemático, educación matemática, reforma en matemáticas, didáctica de la Estadística.

Introducción

Para afrontar los retos de la vida cotidiana y del ámbito profesional, los conocimientos estadísticos se han convertido en una formación indispensable del ser humano. Con frecuencia las personas se ven “bombardeadas” por noticias con contenido estadístico ligado a situaciones sociales, científicas, políticas, económicas, entre otros contextos. Por eso es que Batanero (2000) indica que la Estadística permite acercar al estudiante con el mundo real creando oportunidades de “matematizar” su entorno y establecer las diferencias entre un modelo y la realidad, y además subraya el papel crucial de la resolución de problemas.

En este documento se presentarán algunos antecedentes de la resolución de problemas en la Educación Matemática y la incorporación de contenidos estadísticos en los currículos. Asimismo, se reseña la evolución de la enseñanza de la Estadística en la educación preuniversitaria costarricense, señalando el énfasis que se le da a la disciplina desde la aprobación del actual currículo en el 2012.

Asimismo, se brindarán algunos elementos teóricos referentes a la resolución de problemas y su relación con el currículo costarricense; y a su vez, se expondrán las indicaciones metodológicas y perspectiva concerniente a la enseñanza de la Estadística. Todo esto con el propósito de enmarcar teóricamente el análisis de un problema que introduce algunas medidas de dispersión y permite el desarrollo de capacidades matemáticas superiores.

Antecedentes

Un punto de partida para la resolución de problemas es la obra “*How to solve it*” desarrollada por George Polya en 1945. Por varias décadas fue un referente para diversas investigaciones como las de Shoenfeld, Stanic y Kilpatrick (Ruiz, 2013). Es parte central de currículos como los de Japón, Corea y Singapur. Según Isoda y Katagiri (2016): “En los años 60 fue señalado como el enfoque de enseñanza para desarrollar pensamiento matemático que se recomendaba en el desarrollo de pensamiento de alto nivel para la formación del carácter humano” (p.25). Existen varias formas de entender la resolución de problemas. Por ejemplo, el enfoque japonés tiene una orientación pragmática que influye directamente en la acción de aula, en otros casos la perspectiva es sobre todo el aprendizaje de estrategias resolutorias.

En Costa Rica, aunque desde 1995 se propuso dar prioridad a la “resolución de problemas” esto no trascendió en la acción de aula. Es hasta la aprobación de los nuevos programas que se colocó la resolución de problemas como enfoque principal del currículo nacional con un carácter metodológico que orientará la acción de aula y la estructura de la lección. Además, se da aquí un énfasis a los problemas con contextos reales, lo que brinda a la Estadística una mayor relevancia.

Pino y Estrella (2012) consideran a Nueva Zelanda líder mundial en la inclusión de la Estadística en el currículo escolar. Durante los últimos veinticinco años, Estados Unidos ha agregado la Estadística al currículo bajo el nombre de *datos y azar*. En Italia, la Probabilidad y la Estadística han sido incluidas desde 1979 en las escuelas secundarias, y desde 1985 en el de las escuelas primarias; y en España a partir del año 2006 se inserta la Estadística desde el primer ciclo de enseñanza (niños de 6 y 7 años). Singapur, por su parte, incluye Estadística y Probabilidad como uno de sus principales componentes en todos los niveles, con énfasis en la matemática aplicada.

Costa Rica incluyó en su currículo de 1995 algunos contenidos de Estadística, sin embargo de una forma tímida, con enfoque muy procedimental y de manera aislada de los diversos tópicos matemáticos (Chaves Esquivel, Castillo, Chaves Barboza, Fonseca y Loría, 2010). Esto fue una gran debilidad, ya que la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad debe centrarse en la comprensión, interpretación y análisis del comportamiento de la información (Chaves, 2016). Con la aprobación de los programas de estudio en 2012, el área de *Estadística y Probabilidad* adquirió un relieve mucho mayor y una orientación más cercana a la naturaleza de la disciplina (MEP, 2012). Darle un lugar notable a ésta área fue estratégico, ya que ésta permite articular las demás áreas del currículo y crear de forma natural relaciones con el entorno, y así contribuir a actitudes y creencias positivas en el estudiante (al vivenciar la Matemática como una herramienta que ayuda en la comprensión del mundo actual).

Marco teórico

La resolución de problemas como estrategia metodológica pretende que el estudiante se enfrente a una situación en donde se planteen interrogantes, y en el proceso de solución pueda compartir y discutir sus hallazgos y estrategias, logrando así una mayor interacción social y construcción de los significados. Para Cai y Lester (2010) enseñar Matemáticas a través de la resolución de problemas ayuda a los estudiantes para ir más lejos de adquirir ideas aisladas hacia el desarrollo de sistemas de conocimientos crecientemente conectados y complejos.

Un problema debe presentar un desafío, sin ser un problema inaccesible. MEP (2012, p. 29) lo define como “un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantil utilizando conceptos o métodos matemáticos”. Se debe tener claro que una tarea matemática, será un problema o ejercicio, dependiendo de los conocimientos previos del estudiante. Isoda y Olfos (2009) definen un problema de la siguiente manera:

El verdadero problema es aquel que pone al alumno en una situación nueva, ante la cual no dispone de procedimiento inmediato para su resolución. Por ende, un problema se define en cuanto a su relación con el sujeto que lo enfrenta y no en cuanto a sus propiedades intrínsecas. Un problema puede ser un ejercicio para un alumno de un curso superior y de hecho un enunciado que fue un problema para un alumno deja de serlo una vez que lo resuelve. (p.99)

En la literatura se encuentran diferentes propuestas referentes a los pasos a seguir por el individuo en la resolución de un problema. Prácticamente los modelos son muy similares y responden a las cuatro fases establecidas por Polya: “... la de comprensión del problema, la de trazado de un plan de acción, la de ejecución del plan y la de reconsideración o retrospección” (Isoda y Olfos, 2009, p.91).

Con una perspectiva que se aproxima al enfoque japonés, el currículo costarricense establece un estilo de acción de aula con una estructura que contempla cuatro momentos centrales: *propuesta de un problema, trabajo estudiantil independiente, discusión interactiva y comunicativa y la clausura o cierre.*

Este esquema de lección se emplea en dos etapas diferentes. En la primera se propone la introducción de nuevos tópicos a partir de la selección de un problema que emplee conocimientos previos, sin ser estos suficientes para la solución integral del mismo. La escogencia de este problema es transcendental, debe cumplir no solo con los propósitos de enseñanza, sino también tiene que promover el desarrollo de habilidades matemáticas nuevas. En una etapa posterior, se busca reforzar y ampliar el papel de los aprendizajes realizados más o menos mediante la misma secuencia de pasos.

En el currículo costarricense la resolución de problemas y el estilo de la lección tienen como propósito desarrollar conocimientos y habilidades asociadas a ellos pero especialmente capacidades cognitivas superiores y lo que se denomina *competencia matemática general*. Para el desarrollo de esta última, se promueve la activación de *Procesos matemáticos*:

Actividades cognitivas (o tipos de actividades) que realizan las personas en las distintas áreas matemáticas y que se asocian a capacidades para la comprensión y uso de los conocimientos. La realización sistemática de estos procesos transversales en la acción de aula apoya el progreso de diversas dimensiones de la competencia matemática. (MEP, 2012, p. 475)

Se han seleccionado como centrales los siguientes procesos, los cuales se asocian a capacidades cognitivas superiores: *Razonar y argumentar, Plantear y resolver problemas, Comunicar, Conectar y Representar*.

El currículo propone tres niveles de complejidad (*Reproducción, Conexión y Reflexión*), similares a los establecidos por la OCDE en el 2003, pero con una perspectiva más global que la evaluación de los aprendizajes. Cada nivel está íntimamente ligado al grado de activación de los procesos matemáticos.

Respecto al área de Estadística, se espera que cada estudiante desarrolle destrezas elementales vinculadas con los procesos de análisis de datos y sea capaz de reflexionar más allá de ellos, es decir, comprender el trasfondo de la información que se comunica por medio de los diferentes instrumentos de tratamiento de información. El currículo se distancia de la visión equivocada de una “Estadística escolar como colecciones de fórmulas y un manejo mecánico de esos instrumentos” (MEP, 2012, p. 55).

El problema y su análisis

Con base en el problema consignado en el apéndice A se introduce el tema de medidas de variabilidad, mediante medidas de posición, diagrama de puntos, entre otros conocimientos previos. Asimismo, se desea incorporar al análisis estadístico nuevas representaciones gráficas como el diagrama de cajas para resumir la información que comunican los datos.

La tarea matemática se ubica en un contexto científico, donde se plantea una comparación a partir del análisis de dos muestras de mediciones con dos *pirómetros* de diferente marca. Para realizar una escogencia se toma como criterios el grado de exactitud y de precisión de los dos instrumentos.

Aquí se pretende evidenciar la importancia de las medidas estadísticas tanto de posición como de variabilidad para hacer un análisis integral de los datos y poder así comparar dos grupos de mediciones y tener argumentos científicos para tomar una decisión.

Se presume que el estudiante puede partir del cálculo de medidas de tendencia central como el promedio, la mediana y la moda para realizar una primera comparación, sin embargo, se deberá impulsar a los estudiantes a realizar un análisis más completo de las distribuciones. En la fase de *Trabajo estudiantil independiente*, se pueden formular preguntas generadoras que propicien la utilización de otros conocimientos antes estudiados, por ejemplo:

- ¿Será suficiente solo conocer la tendencia central de los grupos de datos para responder las preguntas planteadas?
- ¿Las distribuciones de datos son simétricas o asimétricas?
- ¿Qué otras medidas de posición podrían ser útiles para un análisis más completo de la información?

A partir de estas preguntas, puede surgir la idea de elaborar un diagrama de puntos para cada grupo de datos y poder visualizar la simetría o asimetría de las distribuciones. Además este tipo de representación permite que el estudiante intuitivamente realice apreciaciones sobre la dispersión de los datos.

Asimismo, partiendo de estas preguntas, puede surgir la idea de determinar otras medidas de posición conocidas como el mínimo, el máximo y los cuartiles. De esto puede surgir cierto

tipo de exploración intuitiva y así obtener algunas percepciones referentes a la dispersión de las mediciones, que pueden ser expuestas en la fase de *Discusión interactiva y comunicativa*:

- Las mediciones realizadas por el pirómetro de la marca A van desde los 641,0 °C a 649,0 °C, es decir, hay una diferencia de 8 °C entre el dato máximo y el dato mínimo, en cambio el pirómetro de la marca B tiene tan solo una diferencia de 4°C.
- El 50% de las mediciones centrales realizadas por el pirómetro de la marca A van desde los 643,0 °C a 647,0 °C. Es decir, los datos centrales de la distribución tienen como máximo una diferencia de 4 °C, en cambio el pirómetro de la marca B tiene tan solo una diferencia de 1,5 °C.
- El 50% de datos centrales referentes a las mediciones realizadas con el pirómetro de la marca A se acerca al valor real, en un rango de ± 2 °C. En cambio, un poco más del 75% de los errores de las mediciones realizadas con el pirómetro de la marca B, se alejan en más de 2 °C al valor real.

Aunque este tipo de análisis exploratorio no representan medidas estadísticas de manera formal, son más relevantes que el cálculo de medidas, que refieren más a operaciones aritméticas que a la esencia de la Estadística como disciplina; ya que a partir de los conceptos de medidas de posición como el máximo y mínimo, la mediana y los cuartiles, el estudiante puede intuitivamente evidenciar patrones de variabilidad como el recorrido y el recorrido intercuartílico, sin precisar el concepto. Posteriormente en la fase *Cierre o clausura* se podrá formalizar estas medidas de variabilidad y otras como la varianza y la desviación estándar.

Asimismo, a partir de las medidas de posición calculadas por los estudiantes se puede introducir la representación gráfica del diagrama de cajas en donde se integre las dos distribuciones de datos en una sola representación. Esto facilitará la comparación y potenciará la generación de argumentos para la solución del problema. Sin embargo, aunque la reflexión a partir del análisis visual de diagramas de cajas resulta muy valioso desde un punto de vista descriptivo, en este caso es importante no dejar de lado el cálculo de medidas específicas, ya que por medio de un valor concreto se puede comparar la variabilidad de los datos.

Es por esto que se puede aprovechar el problema para introducir otras medidas de variabilidad que utilicen todos los datos para su cálculo, como por ejemplo la variancia y la desviación estándar. Aquí es importante señalar que se debe priorizar la interpretación de las medidas dentro de los análisis estadísticos, respecto a la obtención de las mismas, por lo que se puede hacer uso de la tecnología (calculadoras, hojas de cálculo, etc.) para el cómputo de las cantidades.

El nivel de complejidad del problema se considera de *Reflexión*, ya que se evidencia un alto grado de activación de todos los procesos matemáticos:

- *Razonar y argumentar*: Se deben elaborar argumentos basados en sus propias acciones al resolver un problema que pretende introducir las medidas de variabilidad como conocimiento nuevo. Además, los argumentos deben combinar e integrar las diferentes medidas (de posición y variabilidad) para dar una solución al problema.
- *Resolver y plantear problemas*: Se debe resolver un problema que involucra temas que no han sido estudiados (medidas de variabilidad) donde se seleccionan, comparan y evalúan diferentes estrategias.

- *Conectar*: Se evidencia una conexión entre el análisis estadístico que se debe realizar y la situación de contexto real planteada en el problema.
- *Comunicar*: En la solución del problema se debe emplear un lenguaje estadístico preciso para describir las acciones, resultados, razonamientos y conclusiones que ha efectuado en la resolución de un problema.
- *Representar*: En la solución del problema es necesario utilizar varias representaciones estadísticas (promedio, mediana, cuartiles, recorrido, etc.) para poder describir una situación de contexto real que no ha sido estudiada y es relativamente compleja porque los datos (errores simples) que se deben analizar no están dados de forma explícita. Además, para interpretar y modelar la situación planteada se tuvo que combinar diferentes representaciones estadísticas para la toma de decisiones.

El currículo adopta cinco ejes disciplinares que atraviesan de forma transversal el plan de estudios. En el desarrollo del problema se aprecia la presencia de cuatro de los ejes disciplinares:

- *La resolución de problemas como estrategia metodológica principal*. Se pretende generar aprendizajes nuevos (medidas de variabilidad y diagrama de cajas) a partir de conocimientos previos (medidas de posición) mediante la resolución de un problema.
- *La contextualización activa como un componente pedagógico especial*. Aquí se emplea un contexto científico en donde de manera transversal se desarrolla el concepto de exactitud y de precisión relacionándolo con el uso de medidas estadísticas conocidas.
- *El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales*. Debido a que el Currículo prioriza la interpretación de medidas estadísticas, más allá de su cálculo, para agilizar los cálculos, sobre todo de la variancia y la desviación estándar se puede promover el uso de una calculadora que tenga funciones estadísticas, o bien de una computadora mediante una hoja de cálculo o de un programa especializado.
- *La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las matemáticas*. El empleo de la Estadística para tomar una decisión en el campo de la ciencia potencia la confianza en la utilidad de las Matemáticas.

Conclusiones y recomendaciones

En general, la enseñanza de la Estadística permite crear de forma natural conexiones con situaciones cotidianas en diversos contextos; por lo que la resolución de problemas contextualizados como estrategia metodológica representa una alternativa acertada para el aprendizaje de la disciplina y desarrollo de capacidades superiores asociadas a esta.

Es importante que el docente plantee interrogantes cuyas respuestas permitan valorar la utilidad y los alcances de las medidas empleadas, así como la necesidad de recurrir a nuevas formas de representación para potenciar los análisis estadísticos. Por ejemplo, a partir del empleo de medidas de posición en la solución del problema propuesto, se puede introducir de forma natural medidas de dispersión básicas como el recorrido y el recorrido intercuartílico, así como el diagrama de cajas. Posteriormente, se puede aprovechar el análisis para introducir el cálculo de la variancia y la desviación estándar.

Se debe tener claro que la importancia de las medidas estadísticas es su uso e interpretación, dejando en un segundo plano el cálculo; por lo que se puede utilizar la tecnología como recurso de apoyo. El tiempo que se ahorra en los cálculos, se puede utilizar en darle más espacio al análisis.

Aunque el uso e interpretación de las medidas de posición y dispersión son fundamentales en el aprendizaje de la disciplina y en la resolución de problemas, se debe promover el uso de diferentes representaciones gráficas. Por ejemplo, una primera aproximación al problema se puede hacer con la construcción de diagramas de puntos, a partir de estos se pueden hacer conjeturas y reflexiones respecto a los patrones de variabilidad de los datos.

Es importante destacar la utilidad de los diagramas de cajas en los análisis estadísticos, ya que tienen la ventaja de relacionar las medidas de posición y variabilidad en una misma representación. Son útiles no sólo para visualizar de manera integral las medidas de posición de un grupo de datos, sino también, para realizar comparaciones entre dos o más distribuciones. Además, como se indicó en el análisis del problema, a partir de este tipo de representaciones se pueden hacer conjeturas respecto a la dispersión de los datos y explorar de manera intuitiva algunas medidas básicas como el recorrido y el recorrido intercuartílico.

De acuerdo a los elementos curriculares que se analizaron en el problema, queda claro la importancia de la selección del mismo; sobre todo si se quiere emplear para el desarrollo de conocimientos nuevos. Cabe señalar que deben tener algunas particularidades, por ejemplo debe ser un desafío inicial, provocar la indagación y permitir el desarrollo de habilidades matemáticas nuevas a partir de conocimientos previos.

El problema se ubica en un nivel de complejidad de *Reflexión*, esto ocurre porque para los propósitos del mismo, presenta un alto grado de activación en todos los procesos matemáticos. Sin embargo, este mismo problema podría ubicarse en un nivel de complejidad menor, si algunos conceptos estadísticos ya se hubieran estudiado. Es decir, un mismo problema puede servir para propósitos distintos de acuerdo al escenario.

Referencias y bibliografía

- Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 15, 2-13. Recuperado de <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/BLAIX.pdf>
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada, España: Grupo de Educación Estadística. Granada, España: Universidad de Granada.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Contreras, J.M. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 2(2), Recuperado de <http://www.ugr.es/~jmcontreras/pages/Investigacion/articulos/2011EmTEia.pdf>
- Cai, J. & Lester, F. (2010). Why is Teaching With Problem Solving Important to Student Learning? *NCTM: Reston. A Research Brief*. Recuperado de http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_and_Advocacy/research_brief_and_clips/Research_brief_14_-_Problem_Solving.pdf
- Chaves Esquivel, E., Castillo, M., Chaves Barboza, E., Fonseca, J. & Loría R. (2010). *La enseñanza de las Matemáticas en la secundaria costarricense: entre la realidad y la utopía*. Ponencia preparada para el Tercer Informe Estado de la Educación. San José, Programa Estado de la Nación. Recuperado de http://estadonacion.or.cr/files/biblioteca_virtual/educacion/003/Chavez_2010_Matematica.pdf
- Chaves, E. (2016). La enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11(15), 21-31. Recuperado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23880/24056>
- Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas*. Ediciones universitarias de Valparaíso. Valparaíso, Chile.
- Isoda, M. y Katagiri, S. (2016). *Pensamiento matemático: Cómo desarrollarlo en la sala de clases*. Centro de Investigación Avanzada en Educación, Universidad de Chile. Chile.

- Ministerio de Educación Pública (MEP) (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II Y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. San José: Autor.
- Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 49(1), 53-64. Recuperado de pensamientoeducativo.uc.cl/index.php/pel/article/download/483/1440.
- Ruiz, A. (2013, julio). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8, 7 - 111. Recuperado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/11151/11071>

Apéndice A

Problema: “Exactitud y Precisión”

Considere la siguiente información:

EXACTITUD Y PRECISIÓN

En ingeniería, ciencia, industria y estadística, *exactitud* y *precisión* no son equivalentes. *Exactitud* se refiere a cuán cerca del valor real se encuentra el valor medido. En términos estadísticos, la exactitud se puede relacionar con el error simple de la observación. Cuanto menor es el error de la observación, mayor es el grado de exactitud. Cuando se expresa la exactitud de un resultado, se puede expresar mediante el *error simple*, que es la diferencia entre el valor experimental y el valor real.

Precisión se refiere a la variabilidad del conjunto de valores obtenidos de mediciones repetidas de una magnitud. Cuanto menor es la variabilidad mayor la precisión.

Un grupo de científicos debe escoger entre dos marcas de pirómetros (también conocidos como termómetros sin contacto). Para esto realiza el experimento de realizar 20 mediciones repetidas a un objeto de temperatura constante en un ambiente controlado de laboratorio.

Tabla 1.
Mediciones de temperatura (en grados Celsius)
de los pirómetros de las marcas A y B.

Marca A	Marca B
642	642
649	641
641	640
641	641
645	640
643	643
645	640
644	643
644	641
643	642
645	642
646	642
645	640
646	642
646	644
648	644
649	642
649	643
648	642
641	641

Suponga que la temperatura del objeto fue medida con un termómetro de contacto que tiene un grado de exactitud diez veces mayor que los pirómetros convencionales, registrando una temperatura de 645°C. Asumiendo esta medición como la temperatura “real” del objeto, entonces responda lo siguiente:

- ¿Cuál marca de pirómetro presenta mayor exactitud?
- ¿Cuál marca de pirómetro presenta mayor precisión?
- De acuerdo a lo anterior, ¿cuál marca de pirómetro deberían escoger los científicos?

Puede utilizar calculadora o incluso la computadora para agilizar los cálculos.

Debido a que las muestras escogidas son relativamente pequeñas, parta del supuesto que las mediciones realizadas son suficientemente representativas del comportamiento de las dos marcas de pirómetros.