II CEMACYC
II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
29 octubre al 1 noviembre. 2017
Cali, Colombia
REDUMATE
ii.cemacyc.org

Diseño de ecuaciones utilizando Geogebra

Camilo Adonay **Nucamendi** Albores
Escuela Normal Superior de Chiapas,
México.
camiloadonay@hotmail.com

Resumen

El presente trabajo es un apoyo didáctico para profesores de matemáticas de educación secundaria y de bachillerato, también puede apoyar la formación inicial de los estudiantes de los últimos semestres de la licenciatura en educación secundaria en la especialidad de matemáticas en la escuela normal superior. Aprender a diseñar una ecuación significa tener a la mano una situación didáctica que favorece ambientes de aprendizaje, el profesor anticipa los resultados y gradúa la dificultad de las ecuaciones a partir del conocimiento de sus raíces, usa una herramienta dinámica, ahora convertida en plataforma, Geogebra.

Palabras clave: educación, Geogebra, matemáticas, ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas, raíces, aprendizaje, diseño, tecnología.

Presentación

El modelo curricular que oferta la Escuela Normal Superior de Chiapas desde 1999 es pobre en la formación matemática de la licenciatura en Educación Secundaria en la especialidad de Matemáticas, por lo que es necesario diseñar talleres y cursos cortos como parte de la formación continua de los profesores en servicio con la intención de que puedan modelar los contenidos curriculares que atienden en la escuela secundaria, en este caso se pretende fortalecerlos en álgebra y geometría analítica, utilizando un software, Geogebra, para diseñar las ecuaciones y los problemas que utilizarán en su clase.

Propósitos

Al final del minicurso, los maestros de matemáticas participantes fortalecerán su competencia docente en el *diseño de ecuaciones lineales y cuadráticas utilizando modelos algebraicos y un software, el Geogebra.*

Los normalistas de la licenciatura en educación secundaria en la especialidad de matemáticas no tienen, en su formación inicial, el diseño de ecuaciones ni el análisis de las mismas, la Teoría de las ecuaciones tampoco ha sido motivo de su formación, por lo que es necesario fortalecerlos en esta competencia durante su formación continua, dado que serán temas que atienden en la clase, sólo así podrán modelar el diseño de sus actividades, sus consignas, en función de los conocimientos previos de sus alumnos, de esta manera se atienden los conocimientos previos de los estudiantes y el ambiente de aprendizaje se promueve, dado que, además de los saberes previos, se consideran al menos tres estilos de aprendizaje al utilizar un software dinámico como Geogebra.

Cuando los maestros tratan temas relacionados a ecuaciones y funciones lineales y cuadráticas, su principal obstáculo es el diseño de las ecuaciones y por ende, la elaboración de los problemas, por lo que este minicurso resulta significativo.

Las ecuaciones planteadas en los libros de texto no siempre resultan en el nivel de cognición de los estudiantes de secundaria o de preparatoria, por lo que los profesores no pueden ser rígidos en su aplicación, sino modelarlo y para esto, el diseño es su principal aliado. Cuando tratan estos temas en su situación de clase, toman las ecuaciones expuestas en algún libro de texto o en las lecciones propuestas por los programas vigentes, en muchos casos sin pasar por el proceso de apropiación necesario para la validación didáctica, por lo que el éxito de la clase queda en un porcentaje sostenido por el azar.

Si con las ecuaciones disponibles no logran los aprendizajes de sus alumno(as), el profesor se atreve a proponer ecuaciones que en algunas ocasiones resultan contraproducentes, ya sea porque sus raíces son irracionales, porque son imaginarias o porque son complejas, donde algunos métodos de solución no son posibles; en estos casos, el uso de ciertos métodos quedan restringidos y la modelación en la enseñanza se pone en riesgo o no se aplica. Si los profesores no disponen de las herramientas cognitivas necesarias para modelar su práctica, enfrentan serios obstáculos, sobre todo, cuando deben lograr aprendizajes relacionados con la solución de problemas donde se apliquen ecuaciones de primero o de segundo grado y el método en aplicación no lo permita.

Se acaban las ecuaciones que se disponen en los libros de texto y elaboran una sin la seguridad de su eficacia y funcionalidad. Lo primero que llega a la mente es la siguiente expresión *–¡se me acabaron las ecuaciones! Ya no tengo más libros para copiar y ponérselas a mis alumnos ¿ahora qué hago? –*

Este minicurso dinámico pretende ayudar a los profesores de matemáticas en la escuela secundaria a lograr el dominio de herramientas virtuales y algebraicas que les permita diseñar ecuaciones para construir sistemas dinámicos en ambientes de aprendizaje en su clase.

Diseño de ecuaciones

Diseño de ecuaciones de primer grado

Para el diseño de las ecuaciones de primer grado, vamos a considerar su forma general:

$ax + b = c, si: \ c = 0, entonces, ax + b = o$

$si: y = o$, es el eje de las abscisas en un plano cartesiano de dos ejes.

Al aplicar la propiedad transitiva de la igualdad en las expresiones algebraicas: $ax + b = o$ con $y = o$, encontramos que $ax + b = y$, lo que se define como función lineal y representa cualquier recta del plano que no sea vertical. Expresión algebraica que podemos utilizar para diseñar ecuaciones de primer grado.

Se parte de la definición de una recta, conociendo su pendiente y su ordenada al origen: $mx + b = y$, sólo se cambia una variable *m* por *a*, $(ax + b = y)$ porque de manera acostumbrada, no porque así debiera, $mx + b = y$ se utiliza como la expresión algebraica de una función lineal, es decir, ésta representa cualquier recta del plano cartesiano a excepción de las rectas verticales.

Por esta razón, la retomamos como herramienta en el diseño de una ecuación de primer grado, digo el diseño, porque vamos a construir ecuaciones a partir de su raíz y ésta, se puede graduar, con números naturales primero, luego con enteros negativos, enseguida con fracciones, tanto enteras como negativas, hasta donde se quiera plantear la complejidad de la ecuación. Así por ejemplo:

a) Si la raíz es 3, una de las ecuaciones se obtiene de la siguiente manera:

$m(3) + b = y, si\ m = 2\ y\ b = 5,$

$resultaría: (2)(3) + (5) = y,$

$resultando: y = 11,$

$por\ lo\ que\ una\ de\ las\ ecuaciones\ sería: 2x + 5 = 11$

b) Si $m = -4, b = 1, la\ otra\ ecuación\ se\ obtiene\ de\ la\ siguiente\ manera:$

$(-4)(3) + (1) = y, se\ obtiene - 12 + 1 = -11, \quad y = -11$

$por\ lo\ que\ una\ seguna\ ecuación\ sería: -4x + 1 = -11$

c) Si $m = \frac{2}{3}\ y\ b = -5,\ resulta\ \left(\frac{2}{3}\right)x + (-5) = y,$

$como\ x = 3, resulta: \left(\frac{2}{3}\right)(3) + (-5) = y,$

entonces $2 - 5 = y$

$donde - 3 = y,$

$por\ lo\ que\ una\ tercera\ ecuación\ sería: \frac{2}{3}x - 5 = -3$

d) Si $m = -\frac{2}{5}, b = \frac{1}{3},\ resulta\ \left(-\frac{2}{5}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right) = y,$

$como\ x = 3, se\ obtiene\ \left(-\frac{2}{5}\right)(3) + \left(\frac{1}{3}\right) = y,$

$-\frac{13}{15} = y,$

$por\ lo\ que\ una\ cuarta\ ecuación\ sería: -\frac{2}{5}x + \frac{1}{3} = -\frac{13}{15}$ o bien $-6x + 5 = -13$

La Tabla 1 resume los resultados obtenidos hasta ahora.

Tabla 1

Diseño de ecuaciones a partir de sus raices

Casos	Raiz	m	b	y	Ecuaciones posibles
a	3	2	5	11	$2x + 5 = 11$
b	3	-4	1	-11	$-4x + 1 = -11$
c	3	$\frac{2}{3}$	-5	-3	$\frac{2}{3}x - 5 = -3$ ó $2x - 15 = -9$
d	3	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{13}{15}$	$-\frac{2}{5}x + \frac{1}{3} = -\frac{13}{15}$ ó $-6x + 5 = -13$

Para continuar con el aprendizaje y valorar este modelo algebraico de diseño de ecuaciones de primer grado, se deja como ejercicio completar la siguiente tabla con los datos que el estudiante prefiera, modelando las ecuaciones de menos a más, las dificultades de su solución:

Tabla 2

Ejercicio para los estudiantes

Raiz	m	b	Ecuaciones posibles

La reflexión que es importante hacer, se apunta a que dada una raíz, se pueden diseñar infinitas ecuaciones. Trasladado al plano cartesiano se diría que por un punto dado pasan infinitas rectas.

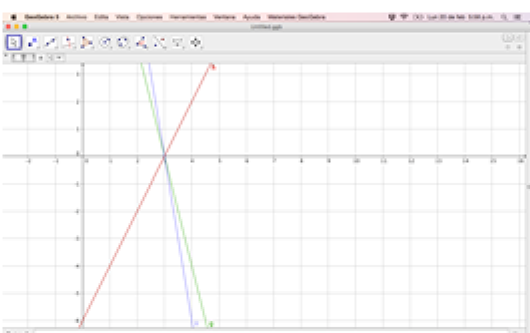

Figura 1. Diseño de ecuaciones en Geogebra a partir de una raiz dada

Otros ejemplos: ahora utilizando el Geogebra y permitiendo la vista algebraica se pueden observar algunas rectas que pasan por el punto (2, -3), de donde se pueden obtener las ecuaciones correspondientes. Transformando su forma general a su forma punto pendiente, de $ax + by = c$ a la expresión $mx + b = y$ para obtener las ecuaciones.

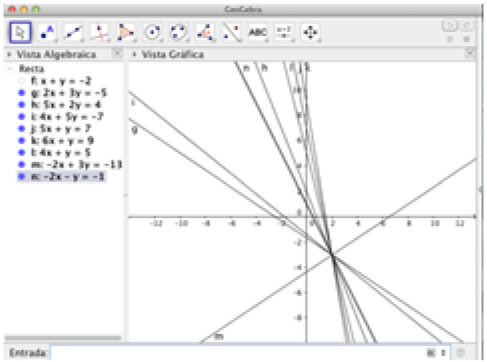

Figura 2: Algunas rectas que pasan por el punto (2, -3)

Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 3

Resultados de los ejemplos anteriores

Ecuaciones de primer grado con dos variables	Funciones lineales	Una de las posibles ecuaciones de primer grado con una variable por cada función
$x + y = -2$	$-x - 2 = y$	$-x - 2 = 0$
$2x + 3y = -5$	$-\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = y$	$2x - 5 = -7$
$5x + 2y = 4$	$-\frac{5}{2}x + 2 = y$	$-\frac{5}{2}x + 2 = -8$
$4x + 5y = -7$	$-\frac{4}{5}x - \frac{7}{5} = y$	$-\frac{4}{5}x - \frac{7}{5} = \frac{1}{5}$
$5x + y = 7$	$-5x + 7 = y$	$-5x + 7 = 12$
$6x + y = 9$	$-6x + 9 = y$	$-6x + 9 = -3$
$4x + y = 5$	$-4x + 5 = y$	$-4x + 5 = 1$
$2x + 3y = -13$	$\frac{2}{3}x - \frac{13}{3} = y$	$\frac{2}{3}x - \frac{13}{3} = -\frac{1}{3}$
$2x - y = -1$	$-2x + 1 = y$	$-2x + 1 = -3$

Observen que en estos casos las raíces de las ecuaciones no fueron el punto de partida, sino la recta planteada desde el Geogebra. Se arrastró y se giró para observar que existe una familia de retas que pasan por (2,0), si se arrastra hacia arriba se observa infinitas rectas paralelas que pasan por los puntos (2, y).

Si queremos diseñar ecuaciones con el valor de la raíz anticipada, basta con recordar que la raíz se encuentra donde la recta corta al eje de las abscisas, $y = 0$. Se encontrará también una familia de rectas haciendo un haz en el punto (2,0). Como se observa en la gráfica.

Si el proyecto es diseñar ecuaciones de primer grado con dos variables, necesariamente tendrán que ser dos ecuaciones para que tengan el significado de ser compatibles o incompatibles, es decir, con una solución común, con infinitas soluciones comunes o con ninguna solución común. El formato sería: $ax + by = c$ y al igual que en los casos anteriores, puede disponerse de lo que se requiera para la clase, en este caso todas son compatibles, por lo que diseñar un sistema de ecuaciones lineales en dos variables, sólo tomamos cualesquiera dos ecuaciones y listo. El Geogebra se convierte en una herramienta didáctica muy importante y significativa para el docente. Sobretodo ahora que la versión también se dispone en los celulares.

Como ejercicios para familiarizarse con esta herramienta, podemos experimentar:

1) Se arrastra y se gira para observar que existe toda una familia de retas que pasan por (2,0), si se arrastra hacia arriba se observa infinitas rectas paralelas que pasan por los puntos (2,y).

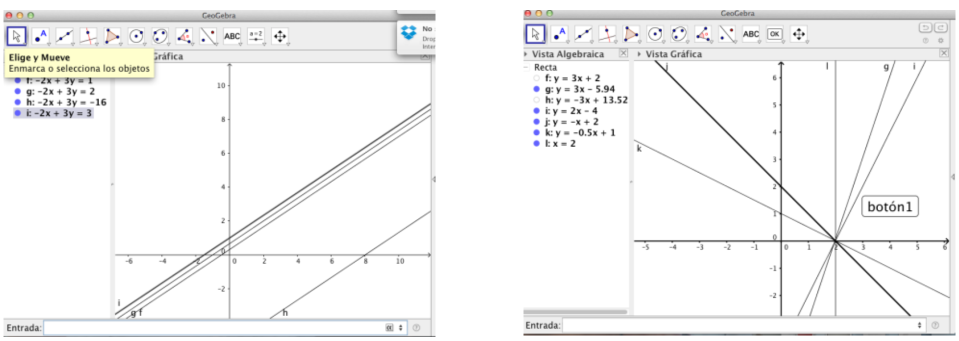

Figura 3. Visualización del ejercicio en Geogebra

2) Posteriormente se dejan fijos los valores de *a* y *c*, convirtiéndose en variables los valores de *x* e *y*.

Con lo que se observa y se toman nuevas decisiones cuando se arrastra la recta, dejando huella. Se han diseñado ecuaciones que tienen la misma pendiente, por lo que al tomar dos cualesquiera, resultan incompatibles, no tienen solución común.

3) A continuación se te presenta una tabla para que experimentes diseñar tus ecuaciones utilizando el Geogebra. Sólo hazlo y te divertirás

Tabla 4

Ejercicio para experimentar con Geogebra el diseño de ecuaciones

x	y	ecuaciones posibles	Gráficas virtuales
2	7		

Hasta aquí podemos concluir que podemos diseñar las ecuaciones lineales que deseemos para modelar nuestra enseñanza en función de las necesidades de aprendizaje de los alumnos, reconociendo que el arte de enseñar es el arte de aguantarse.

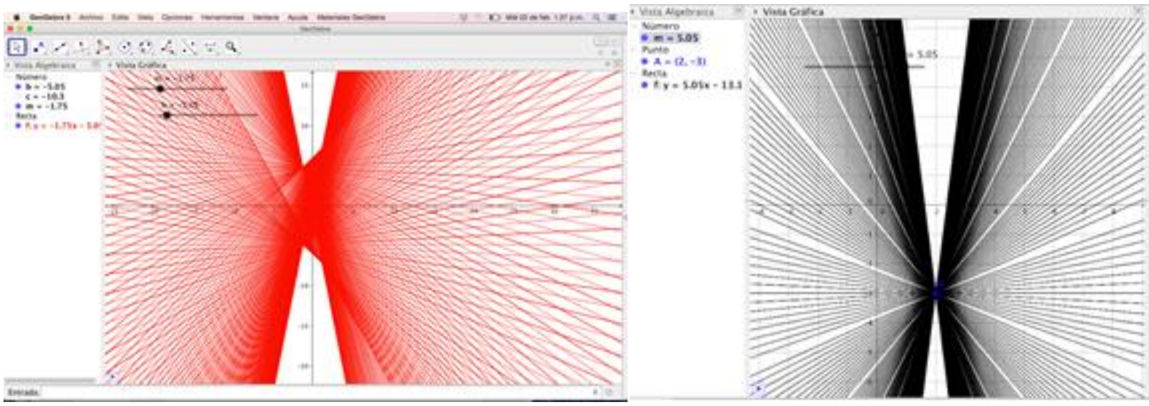

*Figura 4***.** Posibilidades de diseño de ecuaciones lineales con el Geogebra

Diseño de ecuaciones de segundo grado

Método algebraico

Para el diseño de las *ecuaciones cuadráticas o de segundo grado* se hace un procedimiento semejante al de las ecuaciones lineales, sólo que en este caso se teorizan un poco las ecuaciones.

a) Se define la forma algebraica de la ecuación de segundo grado como

$ax^2 + bx + c = 0$, si $a \neq 0$

b) Se resuelve la ecuación por el método de "Completar Trinomios Cuadrados Perfectos" para obtener sus raíces,

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

c) Estas raíces se suman y se multiplican, hasta encontrar que

$$\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$$

$$\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{c}{a}$$

Es decir:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$(x_1)(x_2) = \frac{c}{a}$$

lo que se relaciona con la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$ en su forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, encontrando que la suma de las raíces es el inverso aditivo del coeficiente del término lineal y su producto es equivalente al término independiente, por lo que conociendo las raíces se puede definir la ecuación.

Se presentan algunos ejemplos en la siguiente tabla

Tabla 5

Ejemplos de diseños de ecuaciones de segundo grado a partir de raíces

Raíces		Ecuación
x_1	x_2	
$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ $ax^2+bx+c=0$
3	3	$x^2-6+9=0$
2	-5	$x^2+3x-10=0$
-2	5	$x^2-3x-10=0$
-2	-5	$x^2+7x+10=0$
1	$\frac{2}{5}$	$x^2-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}=0$ $5x^2-7x+2=0$
1	$-\frac{2}{5}$	$x^2-\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}=0$ $5x^2-3x-2=0$
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$x^2-\frac{9}{10}x+\frac{2}{10}=0$ ó $10x^2-9x+2=0$
$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$x^2+\frac{9}{10}x+\frac{2}{10}=0$ ó $10x^2+9x+2=0$
$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$x^2+\frac{1}{10}x-\frac{2}{10}=0$ ó $10x^2+x-2=0$

Para que te demuestres lo que hasta ahora has aprendido, construye otra tabla con los datos de tu preferencia

Tabla 6.

Ejercicio para los estudiantes

Raíces		Ecuación
x_1	x_2	

El modelo algebraico que se presenta sólo resuelve casos de raíces reales y para trabajar métodos de solución utilizando su gráfica o la factorización, se recomienda trabajar raíces racionales.

El dominio de este modelo algebraico de diseño de ecuaciones de segundo grado favorece la competencia de la factorización como método de resolución de ecuaciones de este mismo grado. Al proponer una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, sabes que ax^2 y c son productos, por tanto se pueden factorizar, y el término independiente va ser la sumatoria de estos factores.

Método dinámico utilizando el Geogebra

Hoy en día el Geogebra es de uso gratuito y para todos, se puede instalar hasta en el celular, por lo que puede pensarse que está disponible en muchos lugares. Los maestros lo pueden disponer y sus alumnos también, así se convierte en una herramienta didáctica muy significativa.

Basta con saber usar los deslizadores para observar los parámetros que definen la ecuación y su parábola y viceversa. Definida la parábola encontrar su ecuación, sin embargo, en esta propuesta sólo se trata de diseñar ecuaciones para lograr aprendizajes autónomos y significativos.

El Geogebra se inserta como herramienta dinámica y visual para observar los movimientos de la parábola en función de *a*, *b* y *c*, de su ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$, si $a \neq 0$. Se pueden diseñar infinitas ecuaciones utilizando los movimientos de cada parámetro *a*, *b* o *c*, dos en movimiento o los tres a la vez, identificando como *a*, al coeficiente del término cuadrático, como *b* al coeficiente del término lineal y como *c* al término independiente. Esta herramienta permitirá atender al menos tres estilos de aprendizaje en el aula, por lo que se recomienda favorecer la inclusión en el aula.

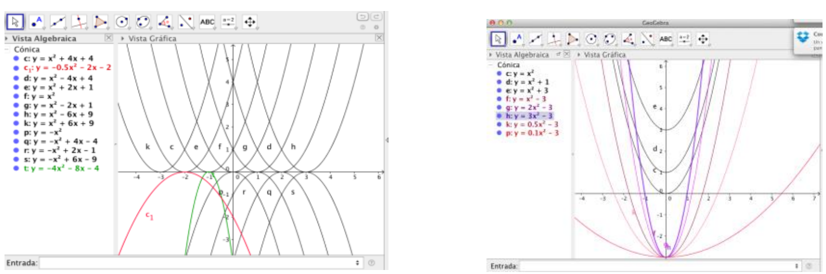

Figura 5. Visualización en Geogebra de los movimientos de la parábola en función de *a, b* y *c*

Buscando el debate en el aula con el propósito de elevar los niveles de aprendizajes, sólo haría falta diseñar problemas abiertos y con cierta incertidumbre para estimular el pensamiento matemático en los estudiantes.

El propósito es dar a los normalistas, a los maestros de secundaria y de la preparatoria, una herramienta didáctica que les permita atender la diversidad en su aula, promoviendo estrategias de aprendizaje inclusivas, innovando su enseñanza y atendiendo los estilos de aprendizaje de sus alumnos.

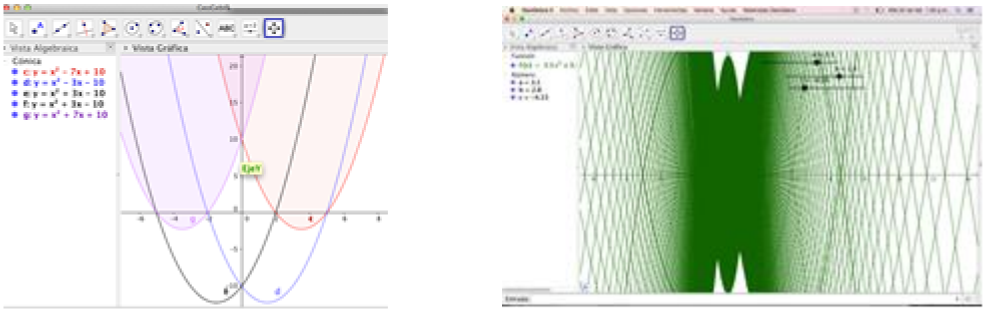

Figura 6. Imágenes del estudio de la parábola en Geogebra

Referencias y bibliográfía

Gobran, A. (1990). *Álgebra elemental*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Swokowski, E. (1970). *Álgebra Universitaria*. (XIII ed.) México: CECSA.

Wooton, W.; Beckenbach, F.; Fleming, F. (1979). *Geometría Analítica Moderna*. (VI ed.) México: Publicaciones Culturales. Recuperado de: http://saber9y11.edu.co/recursos/algebrabaldor.pdf