

## **DISEÑO Y DESARROLLO ONLINE DE EJERCICIOS INTERACTIVOS DE MATEMÁTICAS CON ESTRATEGIA DE TUTORIZACIÓN AUTOMÁTICA**

Elena Álvarez Sáiz – M<sup>a</sup> Reyes Ruiz Cobo  
elena.alvarez@unican.es – reyes.ruiz@unican.es  
Universidad de Cantabria. España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: No específico

Palabras clave: Evaluación formativa, Evaluación automática, Matemáticas, TIC en la educación

### **Resumo**

*Teniendo en cuenta la incidencia de la evaluación en la enseñanza y el aprendizaje, se presenta un sistema de evaluación mediado por ordenador centrado en el proceso y no únicamente en el resultado. La estrategia adoptada promueve la autorregulación a través de actividades de autoevaluación online, planteando conflictos cognitivos basados especialmente en la gestión de errores. Se ha desarrollado para ello una herramienta que explota la posibilidad de intercambio de información entre dos programas muy utilizados en el ámbito de las matemáticas: DescartesJS y Geogebra. Esta ventaja ha facilitado la generación de actividades de evaluación multimedia que incorporan, entre otros elementos, videos interactivos, animaciones, representaciones gráficas, controles numéricos y gráficos así como evaluación de resultados por un CAS. A modo de ejemplo de su potencial, se presenta una muestra de los objetos de aprendizaje desarrollados.*

*La creación de la herramienta y su experimentación en el aula forman parte de los objetivos de un Proyecto aprobado en la III Convocatoria de Proyectos de Innovación Docente de la Universidad de Cantabria que se está desarrollando este curso académico en cuatro de los Grados que se imparten en la E.T.S.I. Industriales y de Telecomunicación.*

### **1. Introducción**

La evaluación adquiere un papel relevante en la enseñanza y en el aprendizaje debido, entre otras razones, a que facilita información trascendental para los estudiantes y para el propio docente. Bajo la concepción de la evaluación formativa, Black y William (1998) detallan un amplio estudio de estrategias exponiendo sus ventajas en el aprendizaje del estudiante. Sin embargo, este tipo de evaluación presenta obstáculos de aplicación en el caso de grandes grupos de estudiantes, siendo sus principales barreras las limitaciones de tiempo y de contexto y las dificultades para desarrollar actividades adecuadas (Hyunju Lee et al, 2012).

Por otro lado, las posibilidades que brindan actualmente las tecnologías favorecen la aplicación de iniciativas que promuevan el aprendizaje a través de la evaluación facilitando la retroalimentación

en los casos en que el número de estudiantes es elevado (Barbera, 2016). Así, la tecnología web, los gestores de contenidos o las plataformas de formación de aprendizaje como Blackboard o Moodle, proporcionan un retorno al estudiante de forma inmediata y personalizada siendo ampliamente utilizados como apoyo en la formación (Wang, 2007). Otros sistemas de evaluación automática en el ámbito de las matemáticas son: WebPa de la Universidad de Loughborough, el proyecto CAS-CAT de Alberta o WebAssign de la Universidad de Georgia (Pacheco et al., 2012). Entre las carencias que presentan estos sistemas se puede destacar que el tipo de matemáticas a evaluar es limitado, que se orientan fundamentalmente al resultado y que no permiten introducir fácilmente nuevos ejercicios y soluciones.

Al mismo tiempo, la posibilidad de utilizar sistemas de álgebra computacional (CAS) en cursos de matemáticas de nivel superior, ha posibilitado la exploración interactiva y la simulación como apoyo al aprendizaje de las matemáticas (Marshall et al, 2012). Este hecho ha motivado la utilización de estos sistemas como herramientas aplicables en la evaluación basándose en la idea de que las respuestas que pueda dar el estudiante sean evaluadas automáticamente por el CAS. Algunos ejemplos de sistemas que incorporan esta posibilidad son: STACK, que funciona dentro de un módulo Moodle, Mathletics, el sistema comercial Maple T. A., Wiris Quizzes o el entorno Digital Mathematics Environment (Sangwin, 2013).

Con objeto de ampliar las ventajas de estos sistemas integrándolos en actividades interactivas multimedia, se presenta en esta comunicación una herramienta de evaluación automática desarrollada como parte de un Proyecto de Innovación Docente en la III Convocatoria de la Universidad de Cantabria. Su utilización en la docencia de las asignaturas de Cálculo en varios Grados de Ingeniería que se imparten en la E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación, está permitiendo explorar sus posibilidades.

El artículo se estructura de la siguiente forma. En primer lugar se analiza las características de la herramienta desarrollada para posteriormente describir la metodología seguida para la creación y posterior aplicación en el aula. Seguidamente se muestra un ejemplo de las actividades desarrolladas. Para terminar se resumen las principales ideas expuestas y se presentan algunas de las líneas de trabajo futuras.

## **2. Sistema de evaluación formativa con tutorización automática**

Dado que en la actualidad los ordenadores constituyen herramientas cotidianas en el aprendizaje y la enseñanza, se debe potenciar también su integración en la evaluación teniendo en cuenta no solo los beneficios que proporcionan sino también algunas de sus limitaciones (Lawson, 2012). Es importante tener en cuenta que esta integración conlleva realizar una planificación completa de todo el proceso ya que los resultados de aprendizaje no podrán ser los mismos y, en consecuencia, tampoco podrá serlo su evaluación.

Según diferentes estudios (Barberá, 2016), la introducción de las tecnologías en el proceso de formación ha producido principalmente tres estrategias en las actividades de evaluación:

- Evaluación automática, principalmente mediante pruebas tipo test que utilizan bases de datos y ofrecen a los estudiantes una evaluación inmediata.
- Desarrollo de trabajos de investigación o de búsqueda de información gracias a las posibilidades que ofrece internet como fuente de información.
- Evaluación colaborativa a través de debates virtuales, foros de conversación y grupos de trabajo.

En este artículo se presenta una herramienta de evaluación automática basada en la posibilidad de comunicación de dos programas muy utilizados en el ámbito de las matemáticas: Descartes, que cuenta con un intérprete javascript llamado DescartesJS (<http://descartes.matem.unam.mx/>), y Geogebra (<https://www.geogebra.org/cms>). Descartes, nace a finales del siglo XX como una herramienta de autor para la creación de unidades didácticas interactivas que genera archivos html para ser visualizados en una página web. Permite incluir distintos espacios, elementos gráficos bidimensionales y tridimensionales y distintos tipos de controles: numéricos, de texto, de audio y de video. Geogebra es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculos numéricos y simbólicos. Su desarrollo comenzó en el año 2001 y sus construcciones son fácilmente exportables a páginas web. Ambas herramientas comparten que son software gratuito, que permiten generar contenido para dispositivos móviles y que cuentan con una gran comunidad de usuarios que produce contenidos trabajando de forma colaborativa.

La posibilidad de comunicación de Descartes con html, permite integrar construcciones Geogebra en Descartes de manera que se comparte bidireccionalmente la información que se genera en ambos entornos. El nivel de diálogo que se puede conseguir entre Descartes y Geogebra facilita

lograr objetos educativos con un alto nivel de interactividad, siendo el procedimiento totalmente transparente para el estudiante que lo utilice.

Para interactuar con aplicaciones Geogebra desde Descartes se aprovecha la posibilidad de comunicación javascript con los objetos Geogebra y la capacidad de incorporar espacios `htmlframe` en escenas Descartes. Esta comunicación se realiza en tres pasos:

1. Enviar comandos desde Descartes a una página html que contiene el objeto Geogebra.
2. Enviar este comando de la página html al applet Geogebra y obtener a través de la página html su resultado.
3. Enviar el resultado desde la página html a la escena Descartes.

Para el paso 1 y 3 se requiere que la escena “madre” incluya un espacio `HTMLIframe` que permita embeber la página html contenedora del objeto Geogebra. Para el paso 3 se utiliza el método `evalCommandCAS(string)` que envía el comando a ejecutar por el CAS de Geogebra en una cadena de caracteres y devuelve su resultado también en una cadena de caracteres.

### **3. Metodología**

La creación de esta herramienta y las actividades generadas con ella utilizadas en el aula han formado parte del desarrollo del proyecto: *Giematic UC: Diseño y desarrollo online de ejercicios interactivos de matemáticas con estrategias de tutorización automática* dentro de la III Convocatoria de Innovación Docente de la Universidad de Cantabria. En este momento se ha finalizado la experimentación en la asignatura básica de primer curso Cálculo I, que se imparte en el primer cuatrimestre en los Grados de Ingeniería Mecánica, Ingeniería de Tecnologías Industriales, Ingeniería Química e Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación de la E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación.

La estrategia evaluativa para la asignatura Cálculo I se ha diseñado considerando los siguientes aspectos:

- Los contenidos a abordar en las actividades evaluables. Esta decisión se tomó teniendo en cuenta por un lado el tiempo de desarrollo de la herramienta y, por otro, la idoneidad de los temas para aportar más valor al tratar aspectos con mayor dificultad de comprensión para el estudiante.
- La concreción de los contenidos principales a trabajar, priorizando las acciones en función de los objetivos a alcanzar.

- Los distintos niveles de complejidad de cada contenido asumiendo la siguiente clasificación: el nivel 1 para ejercicios que involucren recordar conceptos e identificar elementos, el nivel 2 para comprender relaciones simples y el nivel 3 para resolver problemas que exijan establecer relaciones e implicaciones.
- La formulación de una tabla de especificaciones en las que, en función de los objetivos de aprendizaje planteados, se explicitó el nivel de complejidad. Esta tabla ha facilitado elaborar posteriormente el banco de ítems con sus características (métricas y de contenido).

Se han creado pruebas de respuesta cerrada con ítems de respuesta múltiple para dos temas de la asignatura Cálculo I. En total se han preparado 60 ítems con sus métricas y su retroalimentación. Las actividades se presentan mediante una plantilla creada con la herramienta Descartes lo que ha permitido incorporar texto, imágenes fijas, animaciones, vídeo y sonido generando así escenas interactivas que se han utilizado en la retroalimentación a las respuestas que da el estudiante (en total 240 páginas html). Se ha generado también el modelo que permite incluir ítems de respuesta abierta para su corrección de forma automática. Esta plantilla genera la explicación a la respuesta dada por el estudiante de forma también automática utilizando distintos parámetros y cálculos matemáticos.

#### **4. Materiales**

Para el diseño y creación de las actividades de evaluación se ha adoptado como estrategia plantear conflictos cognitivos, reconociendo contradicciones, con el objetivo de intentar promover actividades de autoevaluación basadas especialmente en la gestión de errores. La experiencia docente del profesorado que participa en este Proyecto y los datos recabados en proyectos desarrollados con anterioridad, ha permitido contar con amplia información de errores habituales en la comprensión de conceptos y resolución de ejercicios de los temas seleccionados.

Como muestra de las actividades creadas, se describe brevemente uno de los ítems de evaluación de respuesta múltiple desarrollado en el que se puede apreciar el detalle de retroalimentación que se facilita al estudiante cuando su respuesta no es correcta.

Esta retroalimentación se ha diseñado en etapas o pasos. En la Figura 1 aparece el primero de la resolución de la actividad dando distintas posibilidades de elección que se muestran al estudiante de forma aleatoria. En caso de que se seleccione la opción correcta se avanzará al siguiente paso y

en caso contrario, se solicitará de nuevo que haga una nueva elección tras una justificación de la razón por la cual la respuesta elegida no es correcta (ver imagen de la derecha de la figura 1).

En el segundo paso, el ejercicio plantea al estudiante la descripción de un dominio regular en coordenadas polares facilitándole una herramienta multimedia interactiva de ayuda para que pueda explorar si lo considera conveniente. Una vez planteada la integral a realizar en el tercer paso, se finaliza resolviendo la integral. En este último paso se facilita también una nueva herramienta para la realización del cálculo. A la derecha de la figura 2 se muestran estas dos herramientas proporcionadas en el proceso.

**Puntuación: 1**

**Pregunta (11):** Una placa tiene la forma y las dimensiones que ves en la figura,

Colocada en los ejes como está en la figura, el valor de la densidad superficial en cada punto  $(x, y)$  es la suma de las distancias de  $(x, y)$  a los ejes  $Ox$  y  $Oy$ . Encuentra el valor del radio mayor,  $a$ , para que la masa de la placa sea  $M = 14$ .

A Ninguna de las anteriores

B  $a=3$

C  $a=5$

**Puntuación: 1** Terminar

**Resolución guiada**

**Paso 1**  
Saber qué integral debe hacerse. El cálculo de la masa de una placa es una de las interpretaciones de la integral doble más sencillas. Si  $d(x, y)$  es la función de densidad de la placa  $D$ , su masa es:

$$\text{Masa}(D) = \iint_D d(x, y) dA$$

Además la función densidad es en este caso ...

$d(x, y) = |x| + |y|$

$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$d(x, y) = x + y$

Elegida una opción:

**Resolución guiada**

**Paso 1**  
Saber qué integral debe hacerse. El cálculo de la masa de una placa es una de las interpretaciones de la integral doble más sencillas. Si  $d(x, y)$  es la función de densidad de la placa  $D$ , su masa es:

$$\text{Masa}(D) = \iint_D d(x, y) dA$$

Además la función densidad es en este caso ...

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

No es correcto; esa sería la distancia al origen

Figura 1. Ejercicio de autoevaluación: retroalimentación guiada por pasos

$d(x, y) = |x| + |y|$

En efecto, esa es la expresión de la densidad. Observamos que tanto la placa como la función de densidad que debemos integrar sobre ella son simétricas respecto del eje horizontal, es decir, la masa de la media placa correspondiente a  $y$  positivo es la misma que la masa de la media placa inferior, luego

$$\text{Masa}(D) = 2\text{Masa}(D_s) = 2 \iint_{D_s} d(x, y) dA$$

siendo  $D_s$  la media placa superior.

**Paso 2**  
Preparar el dominio de integración para poder calcular la integral doble. Dado que este dominio es una sección de corona circular, parece indicado el uso de coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Escribe el conjunto  $D_s$  mediante esas coordenadas y pulsa en 'Ver'

**Herramienta descripción dominio**

**Pasos a seguir:**

1. Representar el dominio
2. Describir el dominio regular
3. Plantear la integral iterada

**Descripción del dominio**

**Domino D1**

$0 \leq t \leq 1.57$

$2 \leq r \leq 2*(1+\cos(t))$

**Domino D2**

$1.57 \leq t \leq 3.14$

$2*(1+\cos(t)) \leq r \leq 2$

**Herramienta de cálculo integral**

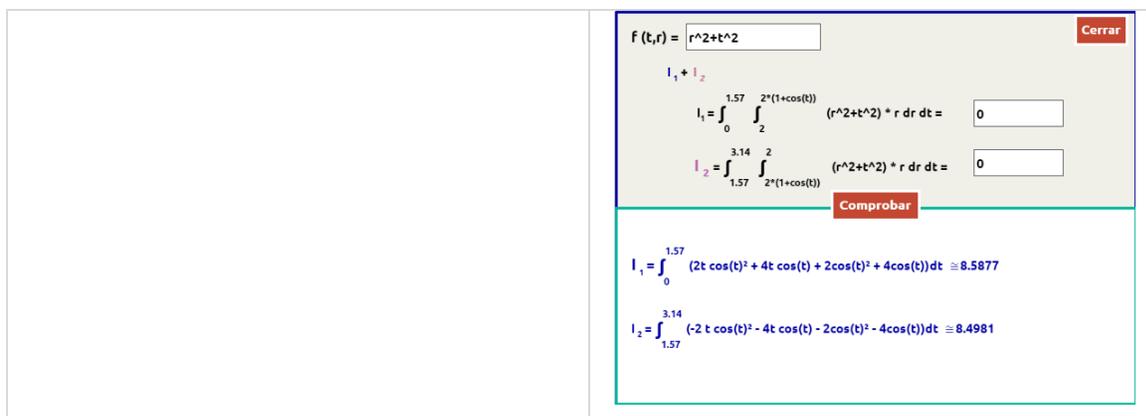


Figura 2. Ejercicio de autoevaluación: herramientas interactivas

## 5. Evaluación

En este momento, se ha concluido la primera experimentación planificada en el Proyecto permitiendo analizar inicialmente la experiencia realizada. El Proyecto continúa desarrollándose en la asignatura Cálculo II que se imparte en el segundo cuatrimestre en las titulaciones anteriormente citadas, por esta razón, una vez finalizado el curso se podrá realizar un análisis más completo.

El número de estudiantes que han participado voluntariamente en esta primera experiencia ha sido alto, un 72% de los 340 alumnos matriculados en las asignaturas implicadas. Finalizado el primer cuatrimestre se pasó una encuesta a los participantes para conocer la valoración sobre su satisfacción general con la experiencia, la facilidad de uso del material así como la utilidad, la claridad y la calidad del contenido. La figura 3 resume los resultados considerando una escala Likert de 1 a 5 (1 totalmente en desacuerdo - 5 totalmente de acuerdo).

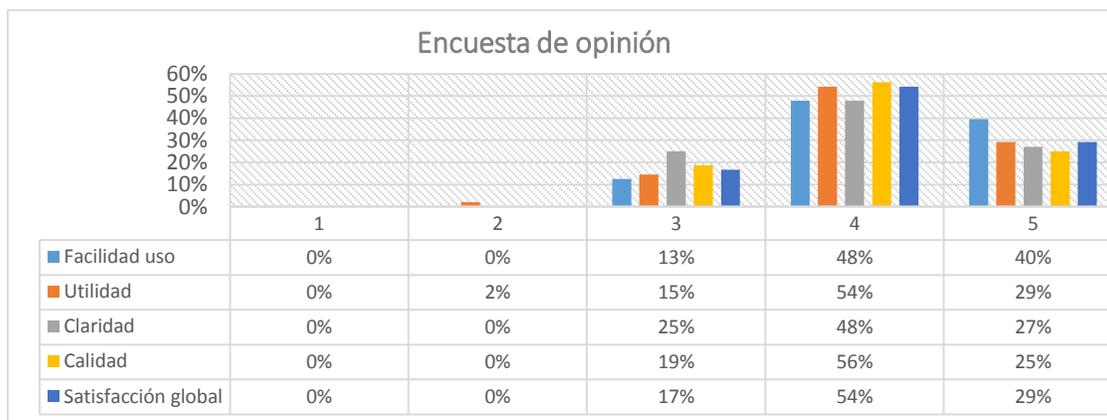


Figura 3. Satisfacción de los estudiantes

De esta consulta se ha obtenido también información muy valiosa a partir de las sugerencias que han transmitido los estudiantes para la mejora tanto de los contenidos como de la organización de la experiencia. Entre ellas, sugieren incluir explicaciones más detalladas de algunos aspectos, incorporar más elementos visuales, mejorar la navegación de la herramienta y ampliar la experiencia a otros temas de la asignatura.

## **6. Conclusiones y trabajo futuro**

La utilización de actividades de evaluación formativa constituye una interesante herramienta de información que promueven el aprendizaje y favorecen el desarrollo de conocimiento y habilidades. La incorporación de retroalimentación y el análisis de errores constituyen un pilar fundamental en la concepción de la evaluación continua como formativa.

En este artículo se ha presentado un ejemplo de actividad diseñada a partir de plantillas configurables que facilitan la evaluación formativa gracias a la posibilidad de comunicación de las herramientas de autor DesartesJS y Geogebra. Entre las ventajas de este tipo de evaluación se pueden destacar la mejora del aprendizaje, un trabajo más autónomo del estudiante y un cambio de actitud del alumnado respecto a la evaluación.

Estas actividades se han integrado dentro del proceso de aprendizaje y se han diseñado a partir de la información recabada en proyectos anteriores desarrollados por el grupo de profesores que imparten docencia en las asignaturas de Cálculo en los Grados de la E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación de la Universidad de Cantabria. Si bien el Proyecto no está concluido, se quiere destacar la valoración positiva de los estudiantes a esta iniciativa y sus aportaciones para la mejora de los materiales.

En el futuro se pretende explorar la inclusión de nuevas tecnologías en el desarrollo de actividades y facilitar la creación de actividades innovadoras mejorando las interfaces para el profesorado proporcionando también rúbricas que faciliten el automatismo en el registro de resultados.

## **7. Referencias bibliográficas**

- Barberá, E. (2016). Aportaciones de la tecnología a la e-Evaluación. *Revista de Educación a Distancia*, (50).
- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: principles, policy & practice*, 5(1), 7-74.
- Hyunju Lee, Allam Feldman y Ian D. Beatty, en su artículo Factors that affect Science and Mathematics Teachers's Initial Implementation of Technology-Enhanced Formative Assessment Using a Classroom Response System,

Lawson, D. (2012). Computer-aided assessment in mathematics: Panacea or propaganda?. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education (formerly CAL-laborate International)*, 9(1).

Marshall, N., Buteau, C., Jarvis, D. H., & Lavicza, Z. (2012). Do mathematicians integrate computer algebra systems in university teaching? Comparing a literature review to an international survey study. *Computers & Education*, 58(1), 423-434.

Pacheco-Venegas, N. D., López, G., & Andrade-Aréchiga, M. (2015). Conceptualization, development and implementation of a web-based system for automatic evaluation of mathematical expressions. *Computers & Education*, 88, 15-28.

Sangwin, C. (2013). *Computer aided assessment of mathematics*. OUP Oxford.

Wang, T. H. (2007). What strategies are effective for formative assessment in an e-learning environment?. *Journal of Computer Assisted Learning*, 23(3), 171-186