A MATEMÁTICA FRACTAL E O GEOGEBRA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Sandra Eliza Vielmo – Francéli Dalberto
sandra.vielmo@ufsm.br – francelidalberto@gmail.com
Universidade Federal de Santa Maria – UFSM/ Brasil

Tema: V.5 - TIC y Matemática
Modalidad: T
Nivel educativo: Formação e atualização docente
Palavras-chave: Fractais; Recursos tecnológicos; Processo de ensino e aprendizagem.

Resumo

Os fractais constituem um campo de investigação da atualidade e apresentam propriedades capazes de ser compreendidas e fascinam pela sua beleza, seu aspecto fragmentado e pela característica conhecida como auto-semelhança, onde partes dos objetos se assemelham ao todo e a sub-partes. Considerando este tema gerador, serão desenvolvidas atividades computacionais e matemáticas, relacionadas particularmente aos Fractais Tapete de Sierpinski, Árvore Pitagórica e Sequência de Fibonacci. Em relação as atividades computacionais serão implementadas algumas iterações para a construção geométrica destes fractais, utilizando o software GeoGebra. A partir destas construções, serão propostas atividades matemáticas que propiciem escrever fórmulas gerais, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, trabalhar com progressões geométricas, funções exponencial e logarítmica, bem como seqüências de forma geral, somatórios e convergência. O objetivo principal desta oficina é contribuir no desenvolvimento de novas práticas e experiências pedagógicas, as quais se refletirão na melhoria da qualidade do processo de ensino e aprendizagem nos vários níveis de ensino.

Introdução

Os fractais constituem um campo de investigação da atualidade e apresentam propriedades capazes de ser compreendidas e fascinam pela sua beleza, seu aspecto fragmentado e pela característica conhecida como autossimilariade, onde partes dos objetos se assemelham ao todo e a sub-partes. As primeiras obras sobre fractais foram criadas por Mandelbrot nos anos 70 (Barbosa, 2005). Esta ciência trouxe consigo o ver ordens e padrões, onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, podendo explicar vários fenômenos da natureza e estruturas do corpo humano. Além disso, as propriedades da geometria fractal têm-se mostrado bastante úteis para a construção de filtros, superfícies seletivas em frequência, circuitos sintonizados e antenas, possibilitando soluções otimizadas para uma variedade de usos comerciais como, por exemplo, telefonia celular e aplicações militares.

Baier (2005), por sua vez, destaca a importância dos padrões que emergem nos processos iterativos que geram os fractais e estes são entendidos como uma alternativa para o ensino de Matemática na Educação Básica, baseada na ideia de que estamos inseridos em um mundo cercado por imagens, sons e movimentos que englobam a natureza, a informática, as relações humanas e suas organizações.

Já Barbosa (2005) evidencia que por meio dos fractais, conexões com várias ciências podem ser realizadas; deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza podem ser minimizadas; o despertar e desenvolver do senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais é possibilitado; e também é possível provocar a sensação de surpresa nos alunos diante da ordem na desordem. Além disso, afirma que a difusão e acesso às tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização têm ampliado as formas de se estudar fractais na sala de aula.

Os padrões, ao serem estudados em um sistema de geometria dinâmica ganham vida, no sentido de deixarem de ser estáticos. O aspecto visual dos padrões pode ser potencializado por meio da geometria dinâmica, devido às características de seus recursos. Assim, vários processos de iteração que um padrão sofre no decorrer dos níveis, podem ser explorados por meio de uma única construção. Nesse sentido, Maltempi (2008) afirma que:

> [...] As tecnologias ampliam as possibilidades de se ensinar e aprender, oferecendo novas e variadas formas para que esses processos ocorram, de forma que as idéias para trabalhos pedagógicos que antes eram inviáveis (por limitações de custo, tempo, recursos físicos, etc.) tornam-se factíveis com o uso de tecnologias. (MALTEMPI, 2008, p. 60).

Segundo Brandão (2002), a Geometria Dinâmica (GD) é a implementação no computador de construções com régua e compasso, na qual o estudante pode mover alguns objetos construídos, e a partir de uma única construção, efetuar um número considerável de testes. Isto seria praticamente impossível somente com régua e compasso, pois a GD é do tipo: uma construção, *n* testes; enquanto a geometria de régua e compasso é do tipo: uma construção, um teste.

Desenvolvimento

A partir da pesquisa de publicações relacionadas aos fractais e o ensino de conteúdos matemáticos e as discussões sobre o uso do computador no processo de ensino e aprendizagem, foram elaboradas algumas atividades. Os fractais utilizados foram

Espiral de Fibonacci, Árvore Pitagórica e Tapete de Sierpinski, devido a importância destes fractais na explicação de certos fenômenos da natureza e em formas encontradas no cotidiano. A seguir são explicitadas as atividades relacionadas a cada um destes três fractais:

1. Fractal Espiral de Fibonacci

Inicialmente consideremos a Sequência de Fibonacci, descrita pela sucessão dos números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …, onde a partir do terceiro, cada elemento é obtido através da soma de seus dois antecessores. Na antiguidade, Fibonacci mostrou que com essa sequência de números a matemática pode definir formas fractais existentes no universo. No entanto, o conhecimento mais detalhado desta área da geometria pode ser desenvolvido e melhor compreendido somente com o advento do computador.

Atividade 1: Construção da Espiral de Fibonacci no GeoGebra

Ao associar os números da sequência de Fibonacci as medidas dos lados de quadrados, dispostos de maneira apropriada, é possível traçar uma espiral, chamada Espiral de Fibonacci. Esta forma pode ser observada na natureza como, por exemplo, em sementes de flores e conchas dos náuticos. Este padrão pode ser observado na espiral obtido no GeoGebra (figura 1), onde em cada quadrado disposto foi traçado um arco circular.

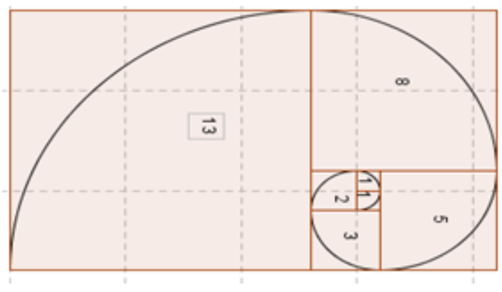


Figura 1 – Espiral de Fibonacci obtido no GeoGebra.

2. Fractal Árvore Pitagórica

A Árvore de Pitágoras ou Pitagórica é um fractal formado por quadrados, onde a cada trio de quadrados que se tocam há um ângulo reto, em uma configuração tradicionalmente usada para descrever o teorema de Pitágoras.

Atividade 2: Construção da Árvore Pitagórica no GeoGebra

A partir de um triângulo retângulo, é construído um quadrado cuja medida de seu lado é a medida da hipotenusa. Da mesma forma, em cada um dos catetos do triângulo é construído um quadrado. Este processo é realizado sucessivamente e sua construção no GeoGebra e mostrada na figura 2.

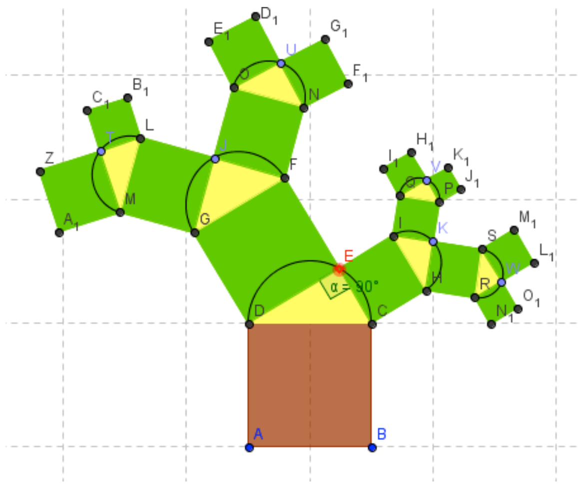


Figura 2 – Árvore Pitagórica obtida no GeoGebra.

Observamos que o ponto E, vértice oposto a hipotenusa do triângulo retângulo do nível 0, pode ser movido alterando as medidas dos catetos do triângulo retângulo.

Atividade 3: Relações matemáticas decorrentes do processo iterativo do fractal

Considerando um processo iterativo em que o nível zero é composto por um quadrado de lado L e que, a cada nível é obtido um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa de medida L e dois quadrados de lados das medidas dos catetos, explorar as seguintes questões:

i) Quantos quadrados existem em cada nível?

ii) Qual é o número total de quadrados ao final do n-ésimo nível?

iii) Qual é o comprimento do lado dos quadrados em cada nível?

iv) Qual é a área de cada quadrado em cada nível?

v) Qual é a área total dos quadrados ao final do n-ésimo nível?

Atividade 4: Teorema de Pitágoras decorrente do processo iterativo do fractal

Nesta atividade cada nível consiste na figura representativa do Teorema de Pitágoras, formada por um triângulo retângulo e os três quadrados representados sobre os lados, onde alguns níveis estão apresentados na figura 3. Qual é o número de figuras que representam o Teorema de Pitágoras no n-ésimo nível?

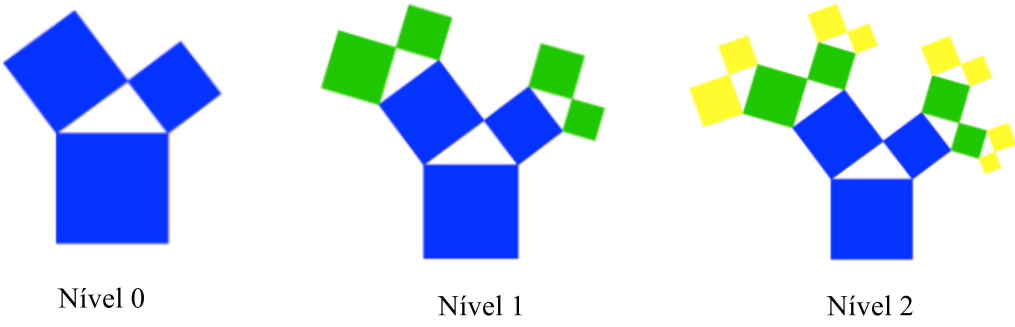


Figura 3 – Alguns níveis iterativos do fractal Árvore Pitagórica.

Fonte: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissetacoes/faria_rejane_me_rcla.pdf

3. Fractal Tapete de Sierpinski

A geometria deste fractal está sendo muito usada na área de telecomunicações, dadas as suas vantagens sobre a geometria Euclidiana no que concerne a fabricação de dispositivos leves e compactos e de melhor transmissão de dados como, por exemplo, chip de celulares como na figura 4.

Figura 4 – Fractal Tapete de Sierpinski nas telecomunicações.

Fonte: http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico9.php

Atividade 5: Construção do Tapete de Sierpinski no GeoGebra

Este fractal foi inicialmente descrito pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski e para sua obtenção é considerado um quadrado. A cada nível iterativo, o quadrado é dividido em nove quadrados congruentes e eliminado o quadrado central (figura 5).

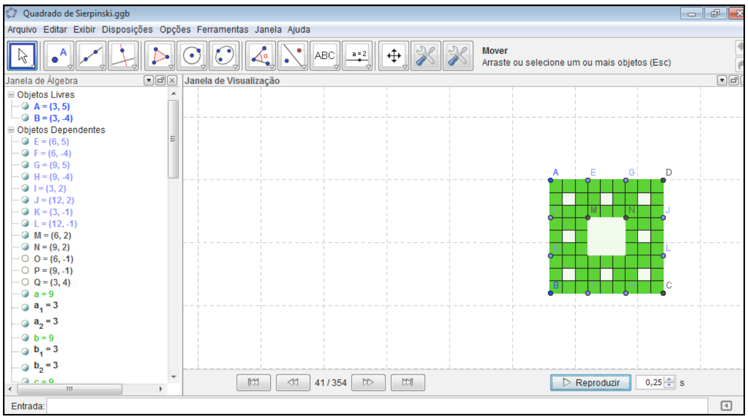
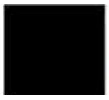
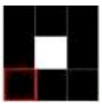
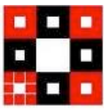
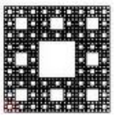


Figura 5 – Tapete de Sierpinski obtido no GeoGebra.

Atividade 6: Conteúdos matemáticas decorrentes do processo iterativo do fractal

A partir do processo iterativo acima, analisaremos as variáveis número de quadrados, comprimento do lado e área dos quadrados de cada nível, descritas no quadro 1.

Quadro 1: Processo iterativo do Tapete de Sierpinski.

Iteração	Nível	Número de quadrados	Comprimento do lado	Área
	0	$8^0=1$	L	$A_0 = L^2$
	1	$8^1=8$	$L\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$A_0\left(\frac{1}{9}\right)$
	2	$8^2 = 64$	$L\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$A_0\left(\frac{1}{81}\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	n	8^n	$L\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$A_0\left(\frac{1}{9^n}\right)$

Observando as ultimas três colunas do quadro 1, as sequências numéricas descrevem as progressões geométricas mostradas no quadro 2.

Quadro 2: Progressões geométricas decorrentes do processo iterativo.

Variável	PG	Razão
Número de quadrados	$(1,8,64,512,...8^n,...)$	$q=8$
Comprimento do lado	$\left(L,\frac{L}{3},\frac{L}{3^2},\frac{L}{3^3},...,\frac{L}{3^n},...\right)$	$q=\frac{1}{3}$
Área	$\left(A_0,\frac{A_0}{9},\frac{A_0}{81},...,\frac{A_0}{9^n},...\right)$	$q=\frac{1}{9}$

Do quadro 2 podemos observar que ao estendermos o caso discreto para o caso contínuo, teremos as funções exponenciais $T(x)=8^x$, $C(x)=L\left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $A_T(x)=A_0\left(\frac{1}{9^x}\right)$, que descrevem o número de quadrados, comprimento do lado e a área, respectivamente. A partir destas funções podemos levantar algumas indagações, como por exemplo, qual o número mínimo de iterações necessárias de modo que o número de quadrados seja superior a 64? Ou para que o comprimento do lado seja inferior a $0,1$? Estes questionamentos sugerem a introdução das respectivas funções inversas, $f^{-1}(x)=\log_8(x)$ e $g^{-1}(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x)$, e o comportamento gráfico destas, quando comparadas com as funções exponenciais. Os gráficos destas funções e sua simetria em relação a reta bissetriz *y=x* estão descritos na figura 6.

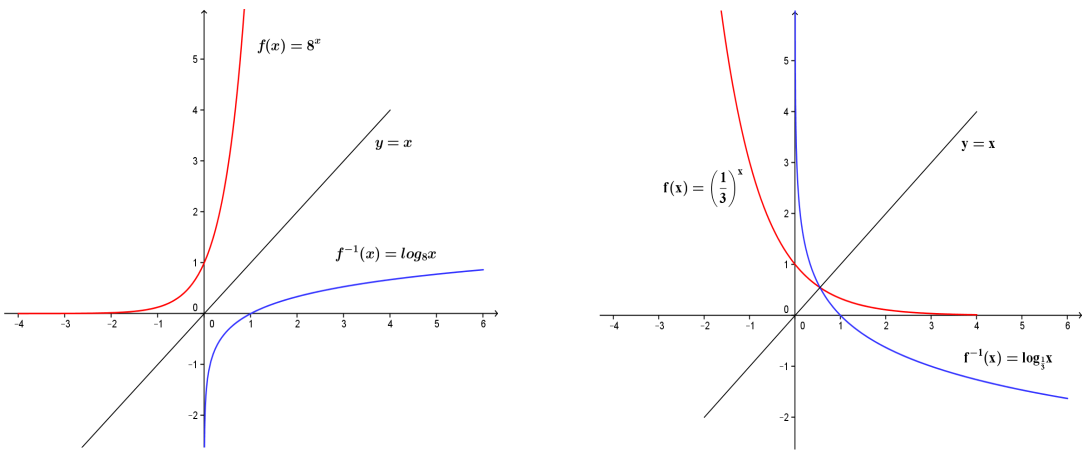


Figura 6 – Funções exponenciais e suas inversas.

Considerações Finais

A partir da implementação desta ação, pretende-se contribuir na melhoria da qualidade de ensino na Educação Básica, mais especificamente na melhoria da formação profissional de seus professores. As atividades desenvolvidas e implementadas estão direcionadas para a inserção de recursos tecnológicos, através do uso de aplicativos de Geometria Dinâmica, como uma ferramenta de apoio ao processo de ensino e aprendizagem em alguns conteúdos específicos da matemática. Espera-se também que os participantes possam servir de multiplicadores e que utilizem o aplicativo GeoGebra em outros conteúdos de matemática, possibilitando uma integração entre teoria e prática tanto nos aspectos do conhecimento matemático quanto no uso dos recursos tecnológicos no ensino.

Referências Bibliográficas

Baier, T. (2005) *O nexo "Geometria Fractal – Produção da Ciência Contemporânea" tomado como núcleo do currículo de Matemática do Ensino Básico.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro: Universidade Estadual Paulista – UNESP.

Barbosa, R. M. (2005). *Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Brandão, L. O. (2002). *Algoritmos e Fractais com Programas de GD.* Revista do Professor de Matemática, São Paulo: SBM, v. 49, p. 27-34.

Faria, R. W. S. (2010). *Uma Abordagem de Progressões Geométricas por meio de Fractais no Ambiente de Geometria.* Anais XIV EBRAPEM, Campo Grande, MS.

----------------- (2012). *Padrões fractais: contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: Universidade Estadual Paulista. Disponível em http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissetacoes/faria_rejane_me_rcla.pdf . Acesso: 28/07/2013

Maltempi, M. V. (2008). *Educação Matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente.* Canoas: Acta Scientiae, v.10, n. 1, p. 59 – 67.