CB-272

JUEGOS NUMÉRICOS EN EL AULA: NÚMEROS PERFECTOS, AMIGOS Y SOCIABLES

Carlos Dorce
cdorce@ub.edu
Facultad de Matemáticas, Universidad de Barcelona, España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio o Secundario
Palabras clave: Historia de las Matemáticas, Factorización, Juegos numéricos, Números perfectos

Resumen

La invención de los números perfectos y de los números amigos se pierde en la antigua Grecia pitagórica y, si bien, su determinación está a la orden del día gracias a su relación con la búsqueda de nuevos números primos (muy necesarios en la criptografía moderna), pasan bastante desapercibidos en los currículos oficiales tanto de la educación primaria como de la educación secundaria. Estos tipos de números y el análisis de sus propiedades pueden ser los catalizadores de clases motivadoras e interactivas en las que se despierten la curiosidad y el interés del alumnado por su conocimiento. La excusa va a ser, en esta ocasión, la factorización numérica que muchas veces se explica en las aulas de forma magistral y no produce nada más que su aprendizaje como camino para poder determinar el m.c.d. y el m.c.m. de los números. La introducción de los números perfectos y, de paso, de los amigos, los felices y los sociables, nos va a permitir disponer de una serie de interesantes recursos de aula que permitirá tener al alumnado sumando, multiplicando, factorizando,... de manera natural, sin necesidad de tener que buscar contextos forzados en los que ubicar los cálculos.

Los conceptos de divisibilidad, múltiplos, divisores, factorización, números primos y compuestos, etc., están muy presentes en los currículos de la educación primaria y secundaria. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos que muchas veces realizan los maestros/as y profesores/as en las aulas, la correcta comprensión de estos conceptos queda muy lejos de lo que pretenden los objetivos curriculares. El motivo de la poca consolidación del aprendizaje de este tema clave dentro de las matemáticas modernas ha sido objeto de estudio en distintos trabajos realizados en los últimos años, tales como Brown, Thomas y Tolías (2002), Leinkin (2006), Bodí, Valls y Llinares (2007), y Castro y Molina (2011), donde se ha puesto de manifiesto la necesidad de profundizar en el aprendizaje de la teoría de números elemental y, particularmente, en todos aquellos conceptos relacionados con la divisibilidad y el teorema fundamental de la aritmética. En este sentido, son dos los puntos que se deberían mejorar para tener una correcta comprensión de la divisibilidad entre números naturales. Por un lado, Zazkis (2000) estableció que basar el aprendizaje en el léxico propio del tema como las palabras "múltiplo" y "divisor", "ser divisible", "factor", etc. muestra una comprensión incompleta del concepto de factor, ya que el alumnado tiende a asociar "divisor" con las divisiones y "múltiplo" con las multiplicaciones. Por otro lado, la comprensión de los números primos está relacionada con la representación decimal con la que expresamos los números y, muchas veces, se asocia el concepto de divisibilidad tan solo con la descomposición de un número en factores primos (Zazkis y Liljedahl, 2004). Así, la comprensión de la factorización numérica es clave en la correcta comprensión de la divisibilidad (Bodí, Valls y Llinares, 2005; Bodí, 2006).

Otro factor que no suma en este proceso cognitivo es la falta de un buen contexto en el que desenvolverse. Muchas veces, los contextos que se buscan para facilitar la introducción de ciertos temas en la clase de matemáticas no siempre nos dan los resultados previstos. Muchos de los ejemplos y ejercicios que nos encontramos en los libros de texto referentes a los temas de la divisibilidad, de la factorización, y de los cálculos del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo, son muy forzados y se convierten en un elemento más de una clase magistral. Además, estos temas son recurrentes en los currículos, y el alumnado se ve sometido a la realización de muchos ejercicios (tanto de consolidación como de ampliación) que no ayudan a conseguir que nuestros adolescentes estén motivados y sientan el gusto y la pasión por las matemáticas.

Aquí se pretende presentar un recurso que puede romper con la problemática planteada a partir de jugar con los números, sus divisores y sus factores primos: los números perfectos. La didáctica de este tema ya ha sido abordada anteriormente (Dorce, 2016) y ahora es el momento de sacar diversas conclusiones sobre su implementación en el aula.

Los números perfectos cumplen la propiedad de que son iguales a la suma de sus divisores excluyéndolo a él mismo. Por ejemplo, el 6 es igual a la suma de sus tres divisores propios 1, 2 y 3 y, consecuentemente, el 6 es un número perfecto. Si se considera la función $\sigma(N)=\sum_{d|N} d$, entonces un número N es perfecto si cumple la igualdad $\sigma(N)=2N$.

Un poco de historia

Los números perfectos tienen su origen en las matemáticas pitagóricas (Dorce, 2013), y no fue hasta el siglo III a.C. que Euclides los definió explícitamente en sus *Elementos*: "número perfecto es aquel que es igual a sus propias partes". Sin embargo, Euclides no se quedó aquí sino que también demostró en la proposición 36 de su noveno libro que si un número es de la forma $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$, con $2^n - 1$ primo, entonces N es perfecto. El tema se quedó en este punto hasta que Nicómaco de Gerasa (s. I-II d.C.) escribió su *Introducción a la Aritmética* donde, entre otros temas, se dedicó a estudiar este tipo de números. Teniendo en cuenta que los únicos números perfectos que conocía Nicómaco eran el 6, el 28, el 496 y el 8.128, el matemático griego llegó a cinco interesantes conclusiones:

1. Hay un número perfecto de una cifra, otro de dos, otro de tres y otro de cuatro. Por lo tanto, Nicómaco concluyó que tenía que haber un número perfecto para cada orden de cifras, es decir, además de los cuatro conocidos, uno entre el 10.001 y el 100.000, uno entre el 100.001 y el 1.000.000, etc.
2. Por lo tanto, Nicómaco supuso la existencia de un número infinito de números perfectos.
3. Y además, todos ellos pares.
4. Este tipo de generalizaciones también le llevó a afirmar que la última cifra de los números perfectos debía ser un 6 o un 8 y que estas se alternaban indefinidamente: 6, 28, 496, 8.128, ...6, ...8, ...
5. Finalmente, Nicómaco afirmó que los únicos números perfectos posibles debían seguir la fórmula dada por Euclides.

Con todas estas premisas, Nicómaco no fue capaz de encontrar el quinto número perfecto. Sin embargo, Ibn Fallūs (m.c.1250) escribió un comentario a la *Introducción a la Aritmética* en el siglo XIII donde calculó los casos n = 2, 3, 4, 7, 9, 11, 13, 17, 19 y 23 (Brentjes, 1987). En esta lista, Ibn Fallūs puso de manifiesto que en los casos n = 13, 17 y 19 se obtenía nuevos números perfectos (números 33.550.336, 8.589.869.056 y 137.438.691.328, respectivamente) y que si n = 9, 11 y 23, entonces $2^n - 1$ no es primo. Cabe decir que los números perfectos se habían dado a conocer en el mundo árabe de la mano de Thābit ibn Qurra (836–901) y que Ibn al-Haytham (965–1040) los estudió a conciencia, afirmando que si un número es perfecto, entonces tenía que ser necesariamente de la forma descrita por Euclides (Rashed, 1994).

Llegados al Renacimiento Europeo, la primera aparición del quinto número perfecto (caso n = 13) se remonta a un manuscrito anónimo fechado en el año 1458, y también a las anotaciones de Johanes Müller, también conocido como Regiomontano (1436–1476). En 1536, Hudalrichus Regius supo descomponer $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$ y encontró independientemente de los resultados anteriores que $2^{13}-1$ es primo. Sin embargo, estos apuntes históricos no pueden hacer sombra al *Tratado de los números perfectos* escrito por el italiano Pietro Cataldi (1548–1626) en 1603, en el que se dedicó a buscar todos los números primos menores que 750. A partir de esta lista demostró que $2^{17}-1$ y $2^{19}-1$ son primos y, así, redescubrió el sexto y séptimo números perfectos. Además, vaticinó que los casos n = 23, 29, 31 y 37 también debían arrojar números primos (como se puede ver, ya hacía tiempo que los matemáticos habían visto que para obtener un número primo de la forma 2^n-1, n también debía ser primo).

Los grandes matemáticos también aportaron su granito de arena a toda esta historia. Pierre de Fermat (1601–1665), por ejemplo, en una carta que envió en el año 1640 a Marín Mersenne (1588–1648), le mostró su estudio de los números del tipo 2^n-1, diciendo, entre otras premisas, que si n no es primo, entonces 2^n-1 tampoco lo es, y que si n es primo, entonces 2^n-2 es divisible por $2n$. En estos resultados, Fermat germinó su Pequeño Teorema, que afirma que si a es un número entero no divisible por p primo, entonces $a^{p-1}-1$ es divisible por p. Así, Fermat demostró que los casos n = 23 y 37 de Cataldi eran erróneos, ya que consiguió factorizarlos. Mersenne, por su parte, también decidió estudiar los números primos de la forma $M_n = 2^n-1$, los cuales han pasado a la historia como Números de Mersenne.

Como resultado importante, se debe señalar que en 1732, Leonhard Euler (1707–1783) demostró el recíproco de la regla de Euclides para los números perfectos pares, corroborando la quinta de las afirmaciones de Nicómaco, que suponía que el número perfecto inicial era par (Dickson, 1971).

Para terminar con toda esta historia, podemos decir que actualmente, se conocen tan solo 49 números perfectos, todos ellos pares. El último de ellos se corresponde con el caso n = 74.207.281, termina en 6 y tiene 44.677.235 cifras. El mérito de su descubrimiento es de Curtis Cooper, profesor en la Universidad Central de Missouri, y de su ordenador, los cuales dieron con el gran hallazgo el 7 de enero de 2016.

Presentación en el aula

Supongamos que para presentar el concepto de factorización de un número, presentamos el tema a partir del cálculo de los divisores del número $28 = 2^2 \cdot 7^1$:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \end{array}$$

7	7
1	

¿Cómo podemos calcular sus divisores? En primer lugar, el alumnado debe saber cómo calcular el número de divisores de un número:

> Si $N > 1$ es un número natural tal que su descomposición en producto de factores primos es $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$, entonces su número de divisores es igual a:

$$n = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1)$$

De este modo, el número de divisores del 28 es (2+1)·(1+1) = 3·2 = 6. Con ello, podemos empezar a resolver el problema recogido por López, Castro y Cañadas (2013), quines explican que maestros en formación, ante la descomposición $3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1$, no son capaces de distinguir si el 21 es divisor del número dado sin necesidad de realizar la división. Ahora, quedaría claro que el 1, el 3, el 5 y el 7 no son los únicos divisores ya que, en este caso, $3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1$ tiene (2+1) · (3+1) · (1+1) = 3 · 4 · 2 = 24 divisores.

Llegados a este punto, ya podemos enseñar a encontrar todos los divisores de un número. Volvamos al 28 y sigamos la descomposición factorial hallada:

	1	p_1	p_1^2
Multiplicado por 1:	1	2	4
Multiplicado por $p_2 = 7$:	7	14	28

¿Qué aporta este cálculo? ¿No hay el peligro de caer en la misma rutina que proponen ciertos libros de texto? Después de profundizar en las posibilidades establecidas en Dorce (2016), se vio la necesidad de escribir en la pizarra los seis divisores ordenados de menor a mayor:

1 2 4 7 14 28,

ya que, en la primera experiencia que se hizo, ninguno de los alumnos presentes se dio cuenta de que el 28 era perfecto. Esta vez, los 25 alumnos de 2º de la ESO de un instituto público de la periferia de Barcelona (13-14 años de edad) tuvieron delante los seis divisores ordenados y sí se dio el resultado esperado: un alumno observó que el número 28 es igual a la suma de 1+2+4+7+14. En ese momento, la pregunta fue: "¿y eso pasa más a menudo?". Respuesta: "Vamos a probar". Cada uno de los alumnos y alumnas de la clase escogió un número al azar y le calculó sus divisores (no sin producirse algún error de cálculo), con lo que se fue escribiendo en la pizarra todas las posibilidades obtenidas tras asegurarse de que no había ninguna repetición. Es decir, cada alumno iba escogiendo un número sucesivamente y no se podía repetir ningún número *N* de los que se iban escribiendo en la pizarra. El resultado obtenido fue el siguiente:

N	Divisores < *N*	Σ	*N*	Divisores < *N*	Σ	*N*	Divisores < *N*	Σ
15	1, 3, 5	9	100	1,2,4,5,10,20,25,50	117	24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12	36
2	1, 2	3	30	1, 2, 3, 5, 6,10,15	42	19	1	1
6	1, 2, 3	6	9	1, 3	4	40	1, 2, 4, 5, 8,10,20	50
8	1, 2, 4	7	50	1, 2, 5, 10, 25	43	63	1, 3, 7, 9, 21	41
11	1	1	17	1	1	12	1, 2, 3, 4, 6	16
25	1, 5	6	27	1, 3, 9	13	38	1, 2, 19	22
10	1, 2, 5	8	3	1	1	4	1, 2	3
14	1, 2, 7	10	18	1, 2, 3, 6, 9	21	42	1, 2, 3, 6, 7,14,21	54
---	---	---	23	1	1	---	---	---

Conclusiones a las que llega al grupo (en cursiva, las reflexiones del profesor):

1. El 6 es como el 28. *Cierto. ¿Eso qué puede significar?*
2. No hay muchos números que cumplan lo mismo que cumple el 28. *¿Y qué resultados se obtienen? ¿Podemos sacar alguna conclusión?*
3. Sí. Los que dan 1. Son primos. *Por lo tanto, los números primos sólo tienen un divisor distinto de él mismo. El 1. ¿Y el resto?*
4. Algunos dan mucho. *Se llaman números abundantes.*
5. ¿Y los que dan menos? *Números deficientes.*
6. ¿Y qué son el 6 y el 28? *Son números perfectos.*

La actividad puede continuar con la comprobación efectiva de que el 496 y el 8.128 son números perfectos.

Números amigos y sociables

Para seguir con el cálculo de divisores, se puede presentar en clase la pareja de números 220 y 284 y sugerir el cálculo de sus divisores siguiendo el patrón establecido:

$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$. Divisores < 220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110.

$284 = 2^2 \cdot 74$. Divisores < 284: 1, 2, 4, 71 y 142.

Bajo el paradigma de los números perfectos, el alumnado es invitado a comprobar si la suma de los divisores obtiene algún resultado sorprendente y así es, ya que se cumple que $\sigma(220) = \sigma(284) = 220 + 284 = 504$. En este caso, estamos delante de una pareja de números amigos. La experiencia provoca reabrir la curiosidad por una propiedad matemática y, como antes, se invita al alumnado a encontrar más parejas de este tipo. Se ha de señalar que, si bien se conocen actualmente millones de parejas de números amigos, es muy difícil que alguien (al azar) dé con una, ya que la segunda menor pareja de números amigos está formada por el 1.184 y el 1.210. Sin embargo, los distintos resultados son muy interesantes en sí mismos. Por ejemplo, supongamos que se escoge el 24: $\sigma(24) - 24 = 36$ y $\sigma(36) - 36 = 55$. Aunque no estamos delante de dos números amigos, podríamos mirar qué ocurre con el 55 y con todos los posibles resultados que se van obteniendo: $\sigma(55) - 55 = 1 + 5 + 11 = 17$ y $\sigma(17) - 17 = 1$. Todos los cálculos del alumnado van terminando en el resultado $\sigma(p) - p = 1$ con p primo y este hecho es aprovechable para conjeturar si es posible encontrar un ejemplo en el que esto no se cumpla, es decir, si existen números N_1, N_2, ..., N_k tales que $\sigma(N_j) - N_j = N_{j+1}$ para $1 \leq j < k$ y $\sigma(N_k) - N_k = N_1$. Estaríamos delante de una cadena de números sociables. La magnitud de los posibles ejemplos hace inviable su búsqueda pero los alumnos ven que las propiedades de los números son espectaculares. Si $k = 1$, los números son perfectos, y si $k = 2$, los números son amigos. En 1918, P. Poulet determinó el grupo de $k = 5$ números sociables 12.496, 14.288, 15.472, 14.536 y 14.264 (Poulet, 1918). También determinó que el número 14.316 era el primero de una cadena de $k = 28$ sociables y estas asociaciones fueron las únicas conocidas hasta que en 1970, H. Cohen encontró nueve grupos para $k = 4$ (Cohen, 1970).

Con todo, los alumnos y alumnas de la clase han estado calculando los divisores de los números que han ido saliendo y se ha conseguido romper el paradigma de que los únicos divisores de un número son sus factores primos. Como se ha visto, la descomposición factorial del número se ha convertido en un recurso para poder determinar las propiedades de ciertos números (tan interesantes como curiosas y, por qué no decirlo, bonitas). Además, el juego no se termina aquí. Por ejemplo, ¿qué ocurre si sumamos sucesivamente las cifras de un número perfecto mayor que 6? ¿Ocurre los mismo con el resto de números? ¿Y si sumamos los inversos de sus divisores? Es decir, Si los divisores del 6 son el 1, 2, 3 y 6, ¿cuál es el resultado de $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$? ¿Ocurre lo mismo con los demás números perfectos? ¿Y con otros números? Y si en lugar de sumar,

¿multiplicamos divisores? Puede verse un resumen de estas propiedades en Dorce (2016) pero las posibilidades que ofrecen este tipo de números a un nivel elemental parecen... infinitas.

Referencias bibliográficas

Bodí, S. D., Valls, J. y Llinares, S. (2005). El análisis del desarrollo del esquema de divisibilidad en N. La construcción de un instrumento. *Números*, 60, 3-24.

Bodí, S. D. (2006). *Análisis de la comprensión de la divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales*. Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Bodí, S. D., Valls, J. y Llinares, S. (2007). La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo. En R. Gras, B. Orús y B. Pinaud (Eds.), *Noveaux apports théoriques à l'analyse statistique implicative et applications: 4èmes recontres internationales d'analyse statistique implicative*, (pp. 99-110). Castellón: Universitat Jaume I.

Brentjes, S. (1987). Die ersten sieben volkommenen Zahlen und drei Arten befreudeter Zahlen in einem Werk zur elementaren Zahlentheorie vol Ismāʿīl b. Ibrahīm b. Fallūs. *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin*, 24, 1, 21-30.

Cohen, H. (1970). On Amicable and Sociable Numbers. *Mathematics of Computation*, 24, 423-429.

Dickson, L. E. (1971). *History f the Theory of Numbers*. Vol 1. Nueva York: Chelsea Publishers Co.

Dorce, C. (2013). *Història de la matemàtica. Des de Mesopotàmia fins al Renaixement*. Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.

Dorce, C. (2016). Nombres perfectes, amics i sociables. Una proposta per a l'aula. *Noubiaix*, 39, desembre 2016, 35-51.

López, A. y Cañadas M. C. (2013). Utilización del teorema fundamental de la aritmética por maestros en formación en tareas de divisibilidad. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro (pp. 59-66). Granada, España: Editorial Comares.

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2013). Utilización de la noción «ser múltiplo» por maestros de educación primaria en formación. Epsilon. Revista de Educación Matemática, 84.

Poulet, P. (1918). Question 4865. *L'interméd. des Math.*, 25, 100-101.

Rashed, R. (1994). *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Dordrecht, Boston, Londres: Kluwer Academic Publishers.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35 (3), 164-186.