Universidad de Granada
Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE NÚMEROS Y OPERACIONES DE LOS ESTUDIANTES ESPAÑOLES DE MAGISTERIO EN TEDS-M

ARACELI GUTIÉRREZ GUTIÉRREZ
GRANADA, 2012

Universidad de Granada
Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE NÚMEROS Y OPERACIONES DE LOS ESTUDIANTES ESPAÑOLES DE MAGISTERIO EN TEDS-M

Trabajo de Investigación Tutelada presentado por Dª. Araceli Gutiérrez Gutiérrez para la obtención del título de Máster en Didáctica de la Matemática, bajo la dirección del Dr. D. Pedro Gómez Guzmán y del Dr. D. Luis Rico Romero.

Tutores:

Dr. D. PEDRO GÓMEZ GUZMÁN Dr. D. LUIS RICO ROMERO

GRANADA, 2012

Índice

RESUMEN

El propósito de este trabajo es estudiar el conocimiento didáctico en el subdominio de números que manifestaron los futuros profesores españoles en el estudio TEDS-M. Para ello, (a) he clasificado las 8 preguntas que se refieren a ese conocimiento dentro del cuestionario del estudio de acuerdo con diversos criterios; (b) he diseñado un esquema metodológico que se ha basado en el análisis conceptual de los enunciados de las preguntas, de sus guías de corrección y de la codificación de las respuestas; y, (c) con base en esos análisis, he formulado conjeturas acerca del conocimiento que los futuros profesores españoles manifestaron en el estudio.

Los resultados obtenidos me permiten caracterizar el conocimiento didáctico manifestado por los futuros profesores españoles en el estudio TEDS-M de la siguiente manera. Ellos (a) son capaces de reconocer las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos que se resuelven con una sola operación y de los problemas de proporcionalidad directa; (b) carecen del conocimiento matemático suficiente para operar con números mixtos, reconocer distintos algoritmos de la resta y ordenar fracciones con igual numerador sin reducir a común denominador, hecho que les impide abordar cuestiones didácticas relacionadas con estos temas; y (c) manifiestan deficiencias importantes en su capacidad didáctica para diagnosticar las concepciones erróneas o los errores en los que incurren los alumnos —en operaciones con números mixtos y decimales—, para representar gráficamente los conceptos y procedimientos matemáticos como instrumento útil para su aplicación en la enseñanza y en el aprendizaje —en operaciones con números decimales y en el significado de la división de fracciones—, y para reflexionar sobre el contenido de las matemáticas escolares y su aplicación a la enseñanza —al ordenar fracciones y al analizar los algoritmos de la resta—.

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es describir y caracterizar el conocimiento didáctico en el subdominio de números que manifestaron los futuros profesores españoles de primaria en el estudio TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics). TEDS-M es un estudio internacional comparativo sobre los planes de formación inicial y sobre los conocimientos que los futuros profesores de primaria y secundaria obligatoria debieran conseguir durante su preparación como profesores de matemáticas. Los datos se recogieron durante el año 2008. El informe internacional se acaba de publicar (Tatto, Sharon, Senk, Ingvarson y Rowley, 2012). Los equipos nacionales de algunos países han llevado a cabo publicaciones parciales del estudio (p. ej., Blömeke, Kaiser, y Lehmann, 2010) y el informe español se encuentra en fase de edición. TEDS-M presenta resultados generales sobre el conocimiento manifestado por los futuros profesores. Se han publicado algunos estudios secundarios sobre diferentes aspectos del estudio (Journal of Teacher Education, 62(2) y ZDM, 44(3)), pero aún no se ha profundizado en los conocimientos específicos (didácticos y en contenidos concretos). Este trabajo pretende contribuir en esa línea de investigación.

APROXIMACIÓN AL PROBLEMA

Desde mi experiencia como docente de secundaria soy consciente de la importancia, para la calidad de la enseñanza y del aprendizaje, de la formación inicial del profesor de matemáticas. El conocimiento didáctico y matemático de un profesor no se improvisa; depende, en buena medida, del aprendizaje que haya logrado en su paso por la universidad. Ante esto me pregunto: ¿cómo es la formación actual de los futuros profesores españoles de matemáticas?; ¿tienen el nivel de conocimiento matemático adecuado?; ¿tienen el conocimiento didáctico necesario para ser buenos profesionales? Estas inquietudes no son solo personales. La comunidad de investigación se interesa por saber cómo se están formando los futuros profesores de matemáticas y qué resultados se están obteniendo.

Tenemos evidencia de la deficiente formación matemática de los escolares. Estudios comparativos internacionales, como puede ser el caso del estudio Pisa, muestran que el conocimiento matemático en primaria y secundaria de los escolares es débil en muchos países, y en concreto en España; un resultado que puede ser, en parte, producto de la actuación del profesor en el aula. Esa actuación depende, entre otras cosas, de la formación inicial del profesor y por ello es relevante indagar acerca de esa formación.

Aunque los expertos pueden no ser capaces de establecer y medir todos los aspectos de lo que se necesita para enseñar bien, todos están de acuerdo en la importancia de determinar la materia objeto del conocimiento de los futuros profesores (Monk, 1994). De hecho, numerosos estudios indican que, con frecuencia, el contenido matemático y el conocimiento didáctico que los profesores aprenden no es el conocimiento más útil para la enseñanza de las matemáticas (Ball y Bass, 2000). Por ello es tan importante el estudio sobre el contenido y los resultados de los programas de formación docente.

Las reformas educativas afectan directamente a la preparación matemática y didáctica de los futuros profesores y al currículo. Estos cambios han dado lugar, en algunos casos, a sistemas poco coherentes de formación del profesorado y a un aumento de la incertidumbre acerca de lo que los profesores de matemáticas necesitan saber y cómo se puede ayudar desde la formación del profesorado a adquirir esos conocimientos (Tatto, Lerman, y Novotna, 2009).

En este marco de interés internacional en la formación inicial de los futuros profesores, se diseña el estudio TEDS-M, con objeto de estudiar cómo se están formando los futuros profesores de matemáticas y qué resultados se están obteniendo con esa formación. TEDS-M es el primer estudio comparativo internacional que aborda el problema de manera global, considerando buena parte de las variables que están implicadas en la formación de profesores. TEDS-M abre un panorama de investigación sobre la formación de futuros profesores haciendo reflexionar a la comunidad educativa a partir de resultados concretos. El conocimiento que TEDS-M proporciona tiene interés no solo desde el punto de vista teórico sino que puede tener una clara aplicación práctica en la elaboración y revisión de futuros programas de formación.

Puesto que el estudio TES-M proporciona información específica sobre el conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas, y sabiendo que España participó en el estudio TEDS-M sólo para la formación inicial de los futuros profesores de primaria, decidí elegir el subdominio de números dentro del campo de conocimiento didáctico como marco de mi investigación. Dado que este era mi primer acercamiento al conocimiento didáctico de las matemáticas en primaria, comencé por estudiar en profundidad la Didáctica de la Matemática que se impartía en la diplomatura de Magisterio referida a números y operaciones. Para ello utilicé como base el manual *Didáctica de la matemática en educación primaria* de Castro (2001), los libros de la colección Síntesis y distintos artículos de investigación relacionados con los distintos temas de cada pregunta (la bibliografía correspondiente se encuentra dentro del análisis de cada pregunta para facilitar la lectura de este trabajo). De esta forma, pude analizar conceptualmente las distintas preguntas con las que TEDS-M quería evaluar el conocimiento didáctico de los futuros profesores de primaria para el subdominio de números. También en este sentido estudié el currículo español de primaria.

ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO

Comenzaré por describir el estudio TEDS-M, sus preguntas de investigación, la participación española en este estudio y las conclusiones generales que se obtuvieron. A continuación, definiré el marco conceptual de mi investigación, estableceré los objetivos de esta investigación, y describiré el método con el que pretendo analizar e interpretar los resultados de los futuros profesores españoles en las preguntas que el estudio TEDS-M clasificó como de conocimiento didáctico para el subdominio de números. Haré un análisis conceptual de cada pregunta con el propósito de identificar los conocimientos tanto matemáticos como didácticos que los futuros profesores deben poner en juego para contestarla correctamente. Y, con base en este conocimiento necesario, interpretaré los resultados obtenidos por los futuros profesores españoles de primaria. De esta forma, estableceré el conocimiento didáctico y matemático que ellos manifestaron en cada pregunta. A continuación, sintetizaré e interpretaré esos resultados, para dar cuenta del conocimiento didáctico manifestado por dichos futuros profesores españoles en las preguntas del subdominio de números del estudio TEDS-M. Por último resumiré el trabajo, expondré las conclusiones a las que he llegado y señalaré algunas de las carencias o limitaciones que he encontrado en el estudio TEDS-M así como algunas vías de investigación abiertas.

El estudio TEDS-M

El TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics) es un estudio internacional comparativo sobre los planes de formación inicial y sobre los conocimientos que los futuros profesores de primaria y secundaria obligatoria debieran conseguir durante su preparación como profesores de matemáticas. El estudio fue patrocinado por la IEA y surgió de la constatación de las diferencias y deficiencias en el rendimiento matemático de los escolares de los distintos países, de acuerdo con los resultados proporcionados por el estudio internacional TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) y otros estudios anteriores. Se basa en el supuesto de que un factor importante que puede explicar esas diferencias tiene que ver con la variedad de aproximaciones a la formación inicial del profesorado de matemáticas en esos países (Rico, Gómez, y Cañadas, 2009).

Preguntas de investigación de TEDS-M

El objetivo de TEDS-M era la generación de conocimiento útil para las políticas de contratación y formación de una nueva generación de profesores que sean capaces de enseñar eficaz y eficientemente las matemáticas escolares (Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley, 2008). Para ello se establecieron las siguientes preguntas de investigación.

1. ¿Cuáles son las políticas educativas que subyacen al conocimiento de las matemáticas y su enseñanza que logran los futuros profesores de primaria y secundaria obligatoria?
2. ¿Cuáles son las oportunidades de aprendizaje que se ofrecen a los futuros profesores de primaria y secundaria para desarrollar su conocimiento sobre las matemáticas y su enseñanza?

3. ¿Cuál es el nivel y profundidad del conocimiento matemático y de su enseñanza que logran los futuros profesores de primaria y secundaria al final de su programa de formación?

Muestra y datos

El equipo de TEDS-M seleccionó muestras representativas de la población nacional de instituciones que ofrecían formación a la población objetivo de futuros profesores que se estaban preparando para enseñar matemáticas en primaria y secundaria obligatoria. En el estudio TEDS-M participaron 17 países. A nivel internacional se seleccionaron 483 instituciones. Se incluyeron todos los programas de formación de profesores de matemáticas de primaria y secundaria de las instituciones seleccionadas, para un total de 751. Se encuestó a una muestra de 7398 formadores y 13871 futuros profesores de estas instituciones y programas. Todas las muestras se seleccionaron, en su caso, de manera aleatoria. El estudio de campo se realizó durante la primavera de 2008.

Participación española

España participó en TEDS-M a través del Instituto de Evaluación. La Universidad de Granada participó en el estudio por medio del grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* (FQM-193) del Plan Andaluz de Investigación (PAIDI), siendo el Dr. L. Rico coordinador nacional de la investigación, por designación del Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el Profesorado. La coordinación con las universidades y la gestión de los datos estuvo a cargo de la Secretaría General del Consejo de Coordinación Universitaria.

Por diversas razones España participó en este estudio solo para evaluar la formación inicial del profesorado de primaria como futuros profesores de matemáticas. Los motivos por los que España participó en TEDS-M eran:

1. analizar y caracterizar, sobre una sólida base empírica, cómo es la formación inicial del profesorado de matemáticas de primaria en España;

2. compararla con la de otros países y establecer posibles líneas de acción que contribuyan a mejorar dicha formación inicial; y

3. beneficiarse de que el estudio abre oportunidades para llevar a cabo investigaciones sobre el sistema de formación del profesorado español de primaria y aprender de los enfoques con que esta se aborda en otros países.

El estudio TEDS-M definió un esquema de muestra aleatoria dependiente del tamaño que, en el caso de España, sirvió para seleccionar una muestra de 50 instituciones que participarían en el estudio a partir de la población de 73 instituciones que ofrecían formación inicial de profesores de primaria. España participó con 48 instituciones —dos instituciones de las 50 seleccionadas declinaron participar en el estudio—, 574 formadores y 1263 futuros profesores de primaria (Gómez, 2007).

La población objeto de estudio en el caso de España fue la constituida por aquellos futuros profesores que, estando en el último año de su formación en el curso 2007-2008, cumplían las siguientes dos condiciones:

1. estar matriculado en al menos 30 créditos;

2. caso de aprobar las asignaturas en que se encuentra matriculado, terminar su carrera en ese mismo curso académico.

Descripción de los cuestionarios

El equipo de investigación de TEDS-M diseñó los ítems y el instrumento que se iba a usar para poder responder a las preguntas de investigación. Así se elaboraron unos cuestionarios que constaban de cuatro partes:

1. La parte A, la más breve, recoge información sobre la formación preuniversitaria del futuro profesor, el nivel cultural familiar y su motivación para la docencia.

2. La parte B se ocupa del programa de formación que, para enseñar matemáticas, ha recibido o está recibiendo el futuro profesor, y contempla la formación disciplinar, pedagógica y didáctica, así como la experiencia práctica.

3. La Parte C, constituye la prueba propiamente dicha, con la que se evalúan los conocimientos sobre matemáticas y su didáctica. Es la parte con más tiempo asignado: 60 de los 90 minutos totales, de los cuales, dos tercios se dedican a las preguntas sobre conocimientos matemáticos y el resto a los de didáctica.
4. La Parte D está dedicada a recabar información sobre las creencias que tienen los futuros profesores sobre la naturaleza de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

RESULTADOS DEL ESTUDIO TEDS-M

Como ya mencioné en el capítulo de introducción, algunos países han publicado algún estudio parcial; el informe internacional se acaba de publicar (Tatto et al., 2012) y el informe español se encuentra en fase de edición. La puntuación media obtenida por los futuros profesores españoles en didáctica de las matemáticas (492,2) es ligeramente superior, y por lo tanto más próxima a la media internacional, que la obtenida en conocimientos matemáticos (481,3). Estos resultados obtenidos por los futuros profesores españoles están por debajo de la media internacional (500) tanto en conocimientos matemáticos como en didáctica de las matemáticas.

Para la comparación internacional de los resultados, se incluye a España en el grupo de países con programas de formación de profesorado generalista. Teniendo en cuenta que en España la duración de los estudios de magisterio es inferior a la de la gran mayoría de estos programas, los resultados españoles se sitúan en el límite inferior de las puntuaciones de su grupo.

En el informe internacional se señala la dificultad que se ha tenido para elaborar conclusiones generales sobre la formación de los futuros profesores de matemáticas, dada la variación de contextos y políticas de los países participantes en el estudio, así como la gran variedad de instituciones de formación docente y diversidad de programas educativos de distinta duración, con varios grados de especialización en matemáticas enfocados a formar profesores para diferentes niveles educativos. No obstante, un resultado concreto sobre el conocimiento se refiere al hecho de que aquellos países que tienen programas para especialistas de primaria en Matemáticas obtienen buenos resultados tanto en el campo del conocimiento matemático como en el didáctico. En el ámbito de las creencias también se encuentran distintos enfoques dependiendo de los países, y lo mismo ocurre con las oportunidades de aprendizaje que los programas de formación docente ofrecen. Las conclusiones que se pueden obtener del estudio TEDS-M, en definitiva, no son representativas de todos los países del mundo. En su lugar, podría considerarse una interesante submuestra de la que se puede aprender mucho.

En las conclusiones del informe internacional (Tatto et al., 2012, p. 208) se manifiesta la especial contribución de TEDS-M al estudio de la formación del profesorado de matemáticas y cómo ofrece sugerencias concretas para seguir trabajando en esta área. Los resultados pueden servir a los países participantes y a las instituciones educativas como una base desde la cual llevar a cabo una mayor investigación para plantear, por ejemplo, cambios en el currículo que puedan conducir a un mejor rendimiento; también pueden animar a las autoridades a investigar vías con las que alentar a los alumnos de secundaria con buen expediente a elegir la enseñanza como una carrera; o bien para estudiar la duración y contenido de los programas de formación de los futuros profesores sirviendo como ejemplo los países que han obtenido mejor puntuación en conocimiento matemático y didáctico.

TEDS-M sienta las bases para que en el futuro pueda seguir desarrollándose una rigurosa investigación internacional sobre la formación del profesorado, después de haber puesto a disposición de la comunidad de investigación una terminología común, los métodos de muestreo apropiados para la formación del profesorado, y los instrumentos y análisis que pueden ser adaptados y mejorados para su uso en posteriores estudios de formación del profesorado, ya sea en matemáticas o otras áreas del currículo. TEDS-M también ha servido para proporcionar una sólida base de estudio en los países que participaron, contribuyendo a una nueva línea de investigación al permitir que investigadores de todo el mundo puedan llevar a cabo análisis secundarios.

Marco conceptual

Este estudio se enmarca dentro de la pregunta de investigación que plantea TEDS-M: "¿Cuál es el nivel y profundidad del conocimiento matemático y de su enseñanza que logran los futuros profesores de primaria y secundaria al final de su programa de formación?" (Tatto et al., 2008, p. 14). Tatto et al. (2012) afirman que estudiar el conocimiento que tienen los futuros profesores es importante por dos razones. Primero, porque el conocimiento de las matemáticas de los profesores influye en el de los estudiantes (Baumert et al., 2010; Hill, Rowan, y Ball, 2005). Segundo, porque el conocimiento que esos futuros profesores han adquirido hasta su último año de formación puede servir como indicador del éxito que van a tener en su tarea educadora como profesores.

El marco conceptual de TEDS-M, siguiendo las ideas de Shulman (1987), considera que el conocimiento matemático para la enseñanza está compuesto por dos factores: el conocimiento del contenido matemático y conocimiento pedagógico de contenido. TEDS-M se basó en el marco conceptual elaborado para TIMSS 2007 (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias) para evaluar el conocimiento matemático de los futuros profesores. Determinó cuatro subdominios de contenidos matemáticos —números y operaciones, geometría y medida, álgebra y funciones, y análisis de datos y azar—.

El desarrollo del marco conceptual de Didáctica de la Matemática fue informado por el estudio de viabilidad para TEDS-M (Schmidt y otros, 2007) y el trabajo de otros investigadores en el campo (Ball y Bass, 2000; Hill, Rowan, y Ball, 2005; Hill, Schilling, y Ball, 2004) así como por la retroalimentación de los grupos de expertos de TEDS-M. TEDS-M estableció unos subdominios y acciones para caracterizar el conocimiento en Didáctica de las Matemáticas. Distinguió tres subdominios: conocimiento curricular matemático, conocimiento de la planificación y conocimiento de la implementación de la enseñanza. Estos subdominios se caracterizan con base en un conjunto de acciones, como describo a continuación.

Currículo

Este subdominio se refiere al conocimiento curricular en matemáticas e incluye las siguientes acciones:

- establecer objetivos de aprendizaje adecuados,
- conocer diferentes formas de evaluación,
- seleccionar posibles vías o conexiones con el currículo,
- identificar las ideas claves en los programas de aprendizaje y
- conocer el currículo de matemáticas.

Planificación

Este subdominio se refiere al conocimiento de la planificación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con anterioridad a la actividad del alumno. Sus acciones serían:

- planificar o seleccionar actividades apropiadas,
- elegir formas de evaluación,
- predecir respuestas típicas de los estudiantes, incluidas las concepciones erróneas,
- planificar métodos apropiados para la representación de ideas matemáticas,
- vincular los métodos didácticos y los diseños de la instrucción,
- identificar los diferentes enfoques para resolver los problemas matemáticos y
- planificar la enseñanza matemática.

Implementación

Este subdominio se refiere al conocimiento para la implementación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esta actividad es desarrollada por el profesor después de la acción del alumno o bien interactuando con él. Incluye las siguientes acciones:

- analizar o evaluar las soluciones o los argumentos matemáticos de los estudiantes,
- analizar el contenido de las preguntas de los estudiantes,
- diagnosticar las respuestas típicas de los estudiantes, incluidas las concepciones erróneas,
- explicar o representar los conceptos matemáticos o los procedimientos,
- generar preguntas fructíferas,
- responder a inesperados problemas matemáticos y

- realizar una retroalimentación adecuada.

Los distintos subdominios prestan atención a la dimensión temporal del proceso de enseñanza y aprendizaje. Aunque en un primer momento en el marco conceptual que elaboró TEDS-M para el conocimiento didáctico se fijaron las acciones que hemos detallado anteriormente (Tatto et al., 2008, p. 39), en el informe internacional (Tatto et al., 2012, p. 131) estas acciones se describen como ejemplos del subdominio correspondiente, manifestando así que estas acciones no son las únicas posibles dentro de cada uno de los subdominios.

De las 70 preguntas del cuestionario de TEDS-M que evaluaban los conocimientos de los futuros profesores, 34 correspondían al conocimiento didáctico. Estas preguntas se clasificaron de acuerdo con los cuatro criterios que se muestran en la tabla 1: dificultad, dominio conceptual del contenido, dominio del conocimiento didáctico y tipo de respuesta.

Tabla 1
Clasificación de preguntas sobre conocimiento en Didáctica de la Matemática

	Dificultad		
Novel	Intermedio	Avanzado	
	Dominio conceptual del contenido		
Números	Geometría	Álgebra	Datos
	Dominio del conocimiento didáctico		
Currículo	Planificación	Implementación	
	Tipo de respuesta		
Opción múltiple	Opción múltiple compleja	Abierta	

Para las preguntas de respuesta abierta, TEDS-M elaboró una guía de corrección con la que se clasificaron las distintas respuestas de los futuros profesores, distinguiendo entre respuestas correctas, respuestas parcialmente correctas, respuestas incorrectas y respuestas ilegibles o en blanco. Se establecieron, en cada caso, los distintos subtipos dentro de cada categoría que se consideraron convenientes.

Marco conceptual para el conocimiento didáctico en el subdominio de números

Mi estudio se centra en la parte C del cuestionario de los futuros profesores. En concreto, voy a considerar las preguntas que se refieren al conocimiento didáctico del subdominio de números. Por ello, en este apartado estableceré el marco conceptual donde se encuadra cada pregunta de contenido didáctico del subdominio de números y trataré de determinar así el cocimiento en Didáctica de la Matemática y en su caso, el conocimiento matemático que necesita tener el futuro profesor para poder contestarlas correctamente.

El cuestionario de TEDS-M incluye 8 preguntas correspondientes al conocimiento didáctico para el subdominio de números. TEDS-M ha liberado 4 de ellas —enunciados y guías de corrección—. He nombrado las 8 preguntas de este estudio en función del contenido conceptual matemático al que se refieren y las he numerado consecutivamente. En la tabla 2 se indica el número de la pregunta —columna 1—, el contenido matemático al que se refiere —columna 2— y si está o no liberada —columna 3—.

Tabla 2
Preguntas de conocimiento didáctico en el subdominio de números

Número de pregunta	Tipo de contenido	Liberada
1	Problemas aritméticos de una sola operación	Sí
2	Proporcionalidad directa	Sí
3	Números decimales	Sí
4	Representación de números decimales	Sí
5	Ordenar fracciones	No
6	Significado gráfico de la división de fracciones	No
7	Operaciones con números mixtos	No
8	Algoritmos de la resta	No

Cada una de estas preguntas fue clasificada por TEDS-M —como el resto de las preguntas de contenido didáctico del cuestionario— de acuerdo con su dificultad, el dominio del conocimiento didáctico al que corresponde y el tipo de respuesta que requiere. No obstante considero que la clasificación que TEDS-M hace para el dominio del conocimiento didáctico de las preguntas —currículo, planificación e implementación— es demasiado amplia de cara a describir el conocimiento didáctico manifestado por los futuros profesores. Por este motivo, haré una clasificación más precisa para mi estudio y estableceré el conocimiento didáctico concreto que se requiere para responder correctamente a cada pregunta. Para facilitar la lectura de este trabajo, presentaré el análisis conceptual de las preguntas en el capítulo de resultados. En dicho capítulo, estableceré el conocimiento matemático y didáctico necesario para contestarlas de forma correcta. Para establecer ese conocimiento didáctico, he tomado fundamentalmente como base el manual *Didáctica de la matemática en la educación primaria* de Castro (2001). De esta forma, pude determinar qué conocimientos son usuales que se impartan a los futuros profesores en la universidad. Por tanto, en este apartado solo describiré —sin detallar su fundamentación— la clasificación que he producido para clasificar las preguntas analizadas en relación con el conocimiento didáctico requerido por parte del futuro profesor para contestarlas correctamente. Esta clasificación surge empíricamente de las 8 preguntas analizadas. Las acciones que evaluaré en los futuros profesores serán las siguientes.

1. Reconocer los errores en los que incurren los alumnos al realizar una actividad —acción de diagnosticar las respuestas de los estudiantes, en concreto reconocer las concepciones erróneas—.
2. Distinguir los elementos que afectan a la dificultad de un problema —acción que capacita a los futuros profesores para planificar o seleccionar actividades apropiadas para los alumnos de primaria—.
3. Representar gráficamente los conceptos o los procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza.
4. Conocimiento del contenido matemático de las matemáticas escolares desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje.

Con la cuarta acción pretendo determinar aquel conocimiento de un concepto o procedimiento de las matemáticas escolares desde un punto de vista avanzado —más allá del requerido para resolver una tarea que involucra el concepto o procedimiento— que permite establecer la relación del concepto o procedimiento con otros conceptos y procedimientos, reconocer por qué es relevante conocer el concepto o procedimiento, y contribuir a abordar la planificación de estrategias de instrucción (Shulman, 1986, p. 9).

En la tabla 3 presento la clasificación de las preguntas del subdominio de números de acuerdo con los cuatro criterios que he mencionado: el nivel dificultad —novel, intermedio y avanzado—, el tipo de respuesta —abierta, múltiple y múltiple compleja—, el subdominio del conocimiento didáctico asignado por TEDS-M —currículo, planificación e implementación— y el conocimiento didáctico concreto que establecí para cada pregunta.

Tabla 3
Clasificación de las preguntas del subdominio de números

	Dificultad		Respuesta			Subdominio			Conocimiento didáctico			
P	In	Av	Ab	M	MC	C	P	I	Dif	RE	Rep	CCM
1		✓	✓			✓			✓			
2	✓		✓				✓		✓			
3	✓		✓					✓		✓		
4		✓	✓					✓			✓	
5	✓			✓		✓						✓
6	✓				✓		✓				✓	
7	✓			✓				✓		✓		
8	✓			✓				✓				✓
T	6	2	4	3	1	2	2	4	2	2	2	2

Nota: P = número de la pregunta; In = intermedio; Av = avanzado; Ab = abierta; M = múltiple; MC = múltiple compleja; C = currículo; P = planificación; I = implementación; RE = Reconocen los errores en los que incurren los alumnos al realizar una actividad o sus concepciones erróneas sobre un tema determinado; Dif = Distinguen los elementos que afectan a la dificultad de un problema; Rep = Representan gráficamente los conceptos o los procedimientos matemáticos para su aplicación en la enseñanza.; CCM = Conocen el contenido matemático del tema desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje; T = total.

La mayoría de las preguntas analizadas son de nivel intermedio —solamente dos son de nivel avanzado—. Cuatro preguntas son de tipo de respuesta abierta y solamente una es de tipo de respuesta múltiple compleja. Las dos preguntas del subdominio de currículo se refieren a la dificultad de los problemas y el conocimiento del contenido matemático del tema; las dos preguntas del subdominio de planificación se refieren a la dificultad de los problemas y la representación gráfica de conceptos; y las cuatro preguntas en el subdominio de implementación se refieren al reconocimiento de errores —2—, la representación gráfica de conceptos y el conocimiento matemático del tema. Hay 2 preguntas para cada uno de los conocimientos didácticos concretos establecidos.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo general de este trabajo es describir y caracterizar el conocimiento didáctico en el subdominio de números manifestado por los futuros profesores españoles de primaria en el estudio TEDS-M.

Para lograr este objetivo general haré un análisis conceptual de cada una de las ocho preguntas con el fin de:

1. Establecer los conocimientos matemáticos y didácticos necesarios para responder correctamente a cada una de ellas.
2. Interpretar los resultados de los futuros profesores españoles en términos de esos conocimientos necesarios.

   Y, con base en la información anterior,

3. Sintetizar e interpretar esos resultados.

MÉTODO

En este capítulo, presento el método que voy a utilizar para describir e interpretar el conocimiento en Didáctica de la Matemática que los futuros profesores españoles manifestaron en el subdominio de números. Es una investigación del tipo descriptivo cuantitativo a partir de datos obtenidos a través de un cuestionario.

POBLACIÓN, MUESTRA Y FUENTES DE INFORMACIÓN

La población y muestra del estudio están descritas con detalle en el capítulo que trata el estudio TEDS-M, en concreto dentro del apartado del mismo sobre la participación española en el estudio. La población son los futuros profesores españoles de la titulación de magisterio en su último año de formación. La muestra corresponde a los 1263 futuros profesores que participaron en el estudio TEDS-M.

Los datos proceden de la codificación de las respuestas al cuestionario de TEDS-M de los futuros profesores españoles de primaria que participaron. Puesto que mi estudio se refiere al conocimiento didáctico que manifestaron estos futuros profesores en el subdominio de números, he seleccionado las 8 preguntas de las 70 que TEDS-M consideraba que evaluaban este subdominio. En el capítulo del marco conceptual he presentado la clasificación de estas 8 preguntas de acuerdo con varios criterios. Para cada pregunta establecí el contenido matemático al que se refiere, si está liberada o no, el nivel de dificultad y el subdominio del conocimiento didáctico que le fue asignado por TEDS-M, su tipo de respuesta y el conocimiento didáctico concreto que requiere para ser contestada correctamente. También dispongo de las guías de corrección que TEDS-M elaboró para las preguntas con respuesta abierta. En estas guías de corrección se clasifican las distintas respuestas de los futuros profesores, distinguiendo entre respuestas correctas, respuestas parcialmente correctas, respuestas incorrectas y respuestas ilegibles o en blanco.

MÉTODO

Analizaré los datos de los que dispongo en dos fases. En la primera fase, analizaré en detalle cada pregunta. En la segunda fase, resumiré los resultados que surjan de la primera fase.

Análisis de las preguntas

Realizaré el análisis de cada pregunta siguiendo los siguientes pasos:

1. Estableceré el marco conceptual donde se encuadra la pregunta y determinaré el conocimiento en Didáctica de la Matemática y, en su caso, el conocimiento matemático que necesitaba tener el futuro profesor para poder contestarla correctamente.
2. Analizaré las guías de corrección con el propósito de formular conjeturas sobre el conocimiento didáctico y matemático que los futuros profesores pudieron poner en juego para contestar de manera incorrecta o parcialmente correcta a cada pregunta.
3. Interpretaré los resultados de los futuros profesores españoles para cada pregunta. Con base en la información anterior, formularé una interpretación de los resultados obtenidos por los futuros profesores españoles en la pregunta concretando en cada caso el conocimiento didáctico y matemático que manifiestan según su tipo de respuesta.

Interpretación de los resultados españoles para el subdominio de números

Con base en la interpretación de los resultados de todas las preguntas analizadas, formularé una interpretación de los conocimientos que los futuros profesores españoles manifestaron para el subdominio de números. En la caracterización de los conocimientos que se ponen en juego distinguiré entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico.

En el análisis de cada pregunta, describiré el conocimiento manifestado por los futuros profesores desde dos perspectivas:

1. Analizando los porcentajes de futuros profesores que contestan correctamente a las preguntas y, por tanto, interpretando el conocimiento tanto matemático como didáctico que han puesto en juego para hacerlo.

2. Analizando los porcentajes de los futuros profesores que no contestan de forma correcta, atendiendo al conocimiento parcial, tanto matemático como didáctico, que manifestaron y a los errores en los que pudieron incurrir.

Un análisis pormenorizado de las preguntas puede dar lugar a descubrir carencias o limitaciones tanto en el cuestionario como en las guías de corrección que acompañan a las preguntas de respuesta abierta. En este estudio me voy a limitar a estudiar la información que surge de los instrumentos y datos proporcionados por TEDS-M. No obstante, al final del trabajo incluiré un análisis crítico del estudio TEDS-M en lo referente al subdominio de números.

RESULTADOS

En este capítulo presentaré los resultados del análisis de las ocho preguntas del estudio TEDS-M que evaluaban el conocimiento didáctico de los futuros profesores para el subdominio de números. De estas ocho preguntas, TEDS-M ha liberado cuatro de ellas —enunciados y guías de corrección—. Haré un análisis detallado de la pregunta 1, como ejemplo de pregunta liberada de respuesta abierta y de la pregunta 5, como ejemplo de pregunta no liberada de respuesta múltiple. Para el resto de las preguntas, me limitaré a exponer en este capítulo el análisis conceptual y los resultados españoles junto con su interpretación. El análisis detallado de todas las preguntas aparece en el anexo.

Reproduzco a continuación la tabla 2 con la lista numerada de las preguntas correspondientes a este estudio de cara a facilitar la lectura de este capítulo.

Tabla 2
Preguntas de conocimiento didáctico en el subdominio de números

Número de pregunta	Tipo de contenido	Liberada
1	Problemas aritméticos de una sola operación	Sí
2	Proporcionalidad directa	Sí
3	Números decimales	Sí
4	Representación de números decimales	Sí
5	Ordenar fracciones	No
6	Significado gráfico de la división de fracciones	No
7	Operaciones con números mixtos	No
8	Algoritmos de la resta	No

También incluyo la tabla 4 con la clasificación de las preguntas según los criterios de TEDS-M en orden a dificultad, tipo de respuesta y contenido didáctico, incluyendo también la caracterización de las preguntas establecida en el marco conceptual. La columna 1 muestra el número de pregunta. Las columnas 2, 3 y 4 muestran la clasificación de la pregunta según

TEDS-M distinguiendo el nivel de dificultad, el tipo de repuesta y el subdominio de conocimiento didáctico. Y en la columna 5 identifico el conocimiento didáctico concreto —de acuerdo con la clasificación anterior— que he determinado que necesita el futuro profesor para contestar a la pregunta correctamente.

Tabla 4
Clasificación de las preguntas del subdominio de números

Pregunta	Nivel de dificultad	Tipo de respuesta	Conocimiento didáctico (TEDS-M)	Conocimiento didáctico concreto
1	Avanzado	Abierta	Currículo	Distinguir los elementos que afectan a la dificultad
2	Intermedio	Abierta	Planificación	Distinguir los elementos que afectan a la dificultad
3	Intermedio	Abierta	Implementación	Reconocer el error en el que incurre el alumno
4	Avanzado	Abierta	Implementación	Representación gráfica de los conceptos
5	Intermedio	Múltiple	Currículo	Conocimiento del contenido matemático
6	Intermedio	Múltiple compleja	Planificación	Representación gráfica de los conceptos
7	Intermedio	Múltiple	Implementación	Reconocer el error en el que incurre el alumno
8	Intermedio	Múltiple	Implementación	Conocimiento del contenido matemático

Pregunta 1. Problemas aritméticos de una sola operación

La figura 1 presenta el texto de esta pregunta, tal y como aparece en el cuestionario de los futuros profesores.

Una profesora de 1º de primaria pide a sus alumnos que resuelvan los cuatro problemas contextualizados siguientes, de la forma que ellos quieran, incluso usando materiales si lo desean.

Problema 1: José tiene 3 paquetes de pegatinas. Hay 6 pegatinas en cada paquete. ¿Cuántas pegatinas tiene José en total?

Problema 2: Jorge tenía 5 peces en su pecera. Le dieron 7 más en su cumpleaños. ¿Cuántos peces tenía después?

Problema 3: Juan tenía algunos coches de juguete. Perdió 7 coches de juguete. Ahora le quedan 4. ¿Cuántos coches de juguete tenía Juan antes de perder ninguno?

Problema 4: María tenía 13 globos. 5 de ellos se le reventaron. ¿Cuántos globos le quedaron?

La profesora se percata de que dos de los problemas son más difíciles para sus alumnos que los otros dos.

Identifique los DOS problemas que presumiblemente son más DIFÍCILES de resolver para alumnos de 1º de primaria.

Problema_____ y Problema______

Figura 1. Pregunta sobre problemas aritméticos

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre el grado de dificultad en la resolución de problemas verbales, donde entran en juego las operaciones aritméticas de adición, sustracción y multiplicación. TEDS-M clasifica esta pregunta dentro del dominio de currículo y la considera de nivel avanzado; es de respuesta abierta y tiene guía de corrección para clasificar las posibles respuestas.

Dar solución a esta pregunta supone asumir un marco determinado sobre el aprendizaje de la aritmética. El aislamiento de determinantes clave de la dificultad de los problemas ha sido tema de investigación en resolución de problemas a nivel internacional (Castro, 2008). Me baso en la clasificación de las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos propuesta por Castro, Rico y Castro (1995). Estas variables no agotan todas las posibles variables que se pueden tener en cuenta a la hora de determinar la dificultad de un problema. No obstante, considero que son suficientes para determinar los dos problemas que presentan mayor dificultad. También me baso en Castro (2001); Castro, Rico y Gil (1992), y Puig y Cerdán (1988**)** para el análisis de los tipos de problemas de estructura aditiva y multiplicativa.

Analizo cada uno de los cuatro problemas que se presentan en la pregunta de acuerdo con las siguientes variables: (a) estructura, (b) estructura semántica, (c) tamaño de los datos, (d) contexto de la información, (e) orden de los datos, (f) existencia de datos superfluos, (g) posición de la pregunta; (h) tipo de sentencia e (i) si se puede resolver o no el problema con ayuda de recursos auxiliares.

En los cuatro problemas, el sentido de la pregunta se integra de modo coherente en el contexto informativo y en todos intervienen números naturales, por ello no consideraré estos elementos como diferenciadores de la dificultad de los problemas.

La tabla 5 presenta el resultado del análisis de los cuatro problemas según las variables establecidas.

Tabla 5
Análisis de los problemas según tipo de variables

Tipos de variables	Problemas 1	2	3	4
Estructura	Multiplicativa	Aditiva	Aditiva	Aditiva
Estructura semántica	Proporcionalidad Simple	Cambio aumentado	Cambio disminuyendo con comienzo desconocido	Cambio disminuyendo
Tamaño de los datos	Pequeños	Datos pequeños	Pequeños	Datos grandes (13>10)
Contexto de la información	Cercano al alumno	Cercano al alumno	Cercano al alumno	Cercano al alumno
Orden de los datos	Ordenados	Ordenados	Ordenados	Ordenados
Existencia de datos superfluos	No existen	No existen	No existen	No existen

Tabla 5

Análisis de los problemas según tipo de variables

Tipos de variables	Problemas 1	2	3	4
Posición de la pregunta	Al final del problema	Al final del problema	Al final del problema	Al final del problema
Tipo de sentencia	a x b = ? a+a+a+…=?	a + b = ?	? - a = b	a - b = ?
Recursos auxiliares	Sí	Sí	No es posible realizar un modelado directo de los momentos planteados en el problema	Sí

A continuación profundizo en el análisis de cada problema, según el orden en el que aparecen en el currículo de primaria español.

Problema 2

> *Jorge tenía 5 peces en su pecera. Le dieron 7 más en su cumpleaños. ¿Cuántos peces tenía después?*

Maza (2001) afirma que incluso los niños de cuatro o cinco años se han podido enfrentar a este tipo de problemas en su experiencia fuera de la escuela, a pesar de no haber aprendido aún la operación aritmética de la adición, y pueden llegar a resolverlo utilizando cualquier estrategia informal. Además, la pregunta sugiere la posibilidad de usar materiales que facilitan la implementación de estas estrategias informales. Podemos concluir que este problema es el de menor dificultad para los alumnos de primero de primaria.

Problema 4

> *María tenía 13 globos, 5 de ellos se le reventaron. ¿Cuántos globos le quedaron?*

En este caso, se da la dificultad de que María tiene 13 globos, número mayor que el número de dedos de las manos. Para facilitar la resolución, se da la posibilidad de utilizar recursos auxiliares. No obstante, sería necesario el dominio del conteo regresivo de números o del manejo de la operación de la sustracción para resolverlo (Maza, 2001). Por consiguiente, valoro que este problema es más difícil que el problema 2, de cambio aumentado.

Problema 3

> *Juan tenía algunos coches de juguete. Perdió 7 coches de juguete. Ahora le quedan 4. ¿Cuántos coches de juguete tenía Juan antes de perder ninguno?*

El análisis de la tabla 5 lleva a concluir que este problema es más difícil que los dos anteriores. La estructura semántica del problema es de cambio disminuyendo con comienzo desconocido, por ello su formulación lingüística puede inducir a pensar que el problema se resuelve mediante una sustracción. Calcular el dato desconocido en la proposición ($? - b = c$) es significativamente más difícil que en el resto de proposiciones en que interviene la sustracción (Carpenter y Moser, 1984).

Como aparece en la tabla 5, preciso que este problema no se puede resolver mediante un modelado directo de los momentos planteados en el problema (Maza, 2001). No considero, por tanto, que las distintas estrategias de ensayo y error que puedan llevarse a cabo con materiales auxiliares para resolver el problema sean un modelado directo de los momentos planteados en el problema.

Problema 1

> *José tiene 3 paquetes de pegatinas. Hay 6 pegatinas en cada paquete. ¿Cuántas pegatinas tiene José en total?*

Este problema presenta una situación de proporcionalidad simple que se resuelve mediante la multiplicación. Es un problema simple de estructura multiplicativa (Castro, 2001). Se trata de un contexto en el que hay que reiterar una cantidad un número de veces; es decir, se requiere de una adición repetida.

Hay que tener en cuenta que es posible utilizar materiales por parte de los escolares para la resolución del problema. Podrían resolverlo mediante la unión repetida de tres conjuntos de 6 unidades cada uno, quizás de forma más intuitiva que el problema de cambio disminuyendo con comienzo desconocido (problema 3). Este contexto es familiar a los niños y es el primero que se trata en el currículo escolar para introducir la multiplicación. No obstante, tradicionalmente la multiplicación y la división han sido consideradas como más difíciles de aprender que la adición y sustracción, aconsejándose que la multiplicación no sea introducida hasta que los alumnos dominen la adición (Castro, 2001). Por estas razones, considero que el problema 1 es más difícil que los problemas 2 y 4.

Tipos de respuestas y guía de corrección

La guía de corrección establece 4 tipos de respuestas que resumo en la tabla 6.

Tabla 6

Tipos de respuesta en la guía de corrección

Tipo de respuesta	Problemas
Correcta	Los problemas 1 y 3 son los más difíciles
Parcialmente correcta	Sólo el 1 correcto (con o sin los problemas 2 y 4) Sólo el 3 correcto (con o sin los problemas 2 y 4)
Incorrecto	Como mínimo un problema seleccionado pero ni el 1 ni el 3 O ilegible
En blanco	

Me baso en los análisis del apartado anterior para interpretar estos tipos de respuesta.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas correctas

Se puede afirmar que los futuros profesores que contestan correctamente a esta pregunta:

- ♦ son capaces de identificar las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos de la pregunta;
- ♦ conocen el currículo de primero de educación primaria; y serían capaces de establecer objetivos de aprendizaje adecuados para los alumnos de este curso;
- ♦ han hecho una adecuada lectura del problema atendiendo a todas sus premisas.

Puede haber otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente. No tengo en cuenta estos motivos en el análisis.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas parcialmente correctas

La guía de corrección agrupa en un solo código diferentes respuestas de los futuros profesores que han contestado de manera parcialmente correcta (ver tabla 6). En todo caso, me he interesado por estudiar qué conocimientos han manifestado estos futuros profesores, en qué errores han podido incurrir, y cómo podemos interpretar sus respuestas. En este sentido, formulo conjeturas sobre los conocimientos manifestados por los futuros profesores cuya respuesta incluye uno de los dos problemas más difíciles, pero no los dos. Presento estas conjeturas en la tabla 7.

Tabla 7

Conjeturas sobre los conocimientos manifestados en las respuestas parcialmente correctas

Respuesta	Conocimientos	Otras razones
3 y 4	▤ Identificar la dificultad de la posición de la incógnita y ▤ Percibir la dificultad de los números mayores de 10 ⊙ No reconocer la dificultad de la multiplicación o valorar positivamente el uso de materiales auxiliares	Azar No abordar los problemas desde la perspectiva de los escolares Lectura incorrecta de la pregunta
3 y 2	⊙ No reconocer los problemas de cambio aumentado como más fáciles	
Sólo 3	⊙ No distinguir las variables que afectan a la dificultad de los otros problemas	
1 y 4	▤ Reconocer la dificultad de la multiplicación para 1º de primaria ▤ Percibir los números mayores de 10 como una dificultad para los alumnos ⊙ No reconocer la dificultad de la posición de la incógnita en un problema ⊙ No valorar positivamente el uso de materiales	Azar No abordar los problemas desde la perspectiva de los escolares Lectura incorrecta de la pregunta
1y 2	⊙ Considerar la adición como más difícil	
Sólo 1	⊙ No distinguir las variables que afectan a la dificultad de los otros problemas	

La tabla 7 pone de manifiesto la multiplicidad de posibilidades acerca del conocimiento que los futuros profesores pudieron poner en juego al responder de manera parcialmente correcta a la pregunta. Estos profesores reconocen la dificultad ya sea de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido y de la multiplicación, pero no simultáneamente, al mismo tiempo que pueden poner en juego otros conocimientos (parciales) que los llevan a escoger otro problema como más difícil. Con base en estos análisis interpreto los resultados de los futuros profesores españoles.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 8 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en un resumen de los análisis anteriores. En la caracterización de los conocimientos que se ponen en juego al responder de manera parcialmente correcta, incluyo en la tabla 8 únicamente aquellos que necesariamente deben activar para dar esa respuesta. Esos conocimientos se pueden matizar con las conjeturas adicionales que he presentado en la tabla 7. En la primera columna de la tabla 8 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 8
Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 1

%	Respuesta	Conocimientos
80,4%	Correcta	▤ Identifican las de las variables que afectan a la dificultad de estos problemas ▤ Conocimiento del currículo de 1º de primaria para poder establecer objetivos de aprendizaje adecuados ▤ Valoran positivamente el efecto facilitador del uso de materiales en la ejecución de los problemas. ▤ Adecuada lectura del problema
15,5%	P. Correcta 3 y otro	▤ Reconocen la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido y ⦿ no reconocen la dificultad de la multiplicación

Tabla 8

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 1

%	Respuesta	Conocimientos
2,9%	P. Correcta 1 y otro	▤ Reconocen la dificultad de la multiplicación para primero de primaria y ⊙ no reconocen la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido
0,7%	Incorrecta	⊙ No distinguen las variables que afectan a la dificultad de los problemas
0,5%	Ilegibles o en blanco	
0%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados

Estos resultados sugieren que una proporción importante de los futuros profesores españoles son capaces de distinguir las variables que afectan a la dificultad de los problemas: un 80,4% es capaz de distinguir los elementos que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos que se resuelven con una sola operación, de tal forma que está en condiciones de proponer a los alumnos de primero de primaria objetivos de aprendizaje adecuados. Entre aquellos que responden de manera parcialmente correcta, destaca la diferencia en porcentaje entre los que reconocen la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido, pero no reconocen la dificultad de la multiplicación, y aquellos que reconocen la dificultad del problema de estructura multiplicativa, pero no reconocen la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo aumentado.

PREGUNTA 5. ORDENAR FRACCIONES

En esta pregunta no liberada, TEDS-M plantea al futuro profesor que interprete cuál es la idea matemática que una profesora pretende trabajar con sus alumnos a los que propone tres parejas de fracciones sencillas con igual numerador para que los ordenen de menor a mayor. Les propone cuatro opciones: las opciones A y B son afirmaciones sobre fracciones que no siempre son ciertas para todas las fracciones y no hacen referencia a fracciones con igual numerador; la opción C manifiesta la idea de que es esencial reducir a común denominador antes de comparar fracciones diferentes; y la opción D dice que cuando dos fracciones tienen el mismo numerador, entonces es necesario comparar los denominadores.

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre la comparación de fracciones. TEDS-M clasifica esta pregunta dentro del subdominio de currículo; la considera de nivel intermedio; y es de respuesta múltiple y no necesita guía de corrección para clasificar las posibles respuestas. En primer lugar, puesto que esta pregunta se enmarca dentro del subdominio de currículo, hay que destacar que en el currículum de educación primaria español se contempla el estudio de fracciones sencillas, sus operaciones y el orden de las mismas. El tratamiento de este tema tiene por objeto proporcionar al alumno un aprendizaje significativo del concepto mediante la utilización de modelos para el estudio de las fracciones. Se recomienda su aplicación en la resolución de problemas, debiéndose fomentar en la enseñanza estrategias de cálculo mental para la ordenación y las operaciones con fracciones (Castro y Torralbo, 2001).

Como veremos a continuación, para contestar correctamente a esta pregunta basta tener el conocimiento matemático suficiente. En concreto, responder correctamente a la pregunta requiere:

1. reconocer que las fracciones tienen el mismo numerador (la opción D de la pregunta orienta en este sentido);
2. saber que, entre fracciones con igual numerador, es mayor la que tiene menor denominador;
3. percibir, por tanto, que en este caso no hay necesidad de reducir a común denominador para comparar las fracciones propuestas.

En este problema el análisis de la pregunta tiene que ver con el conocimiento matemático y con los procedimientos usuales en el tema de comparación de fracciones. No obstante, las distintas opciones de respuesta a la pregunta no nos hablan necesariamente sobre si el futuro profesor conoce la fundamentación o no de los procedimientos para comparar fracciones. Es decir, en esta pregunta podría darse el caso de futuros profesores que contestaran correctamente que la solución de esta pregunta es la opción D porque de manera mecánica sepan que "de dos fracciones con igual denominador es mayor la que tiene menor denominador", sin reparar en su fundamentación. No obstante, establezco que el profesor que contesta correctamente esta pregunta manifiesta un conocimiento del tema que va más allá de la aplicación sistemática de un algoritmo. En cuanto al conocimiento didáctico que puede manifestar un profesor que contesta correctamente podríamos decir que en esta pregunta se realiza un análisis del contenido de las matemáticas escolares al planificar una estrategia de instrucción.

Tipos de respuestas

Me baso en el análisis del apartado anterior para interpretar los distintos tipos de respuesta que pueden darse.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas correctas

La respuesta correcta implica elegir la opción D. Se puede afirmar que los futuros profesores que contestan correctamente a esta pregunta:

- reconocen que se trata de fracciones sencillas con igual numerador; y
- saben que entre dos fracciones con igual numerador es mayor la que tiene menor denominador; es decir, saben que cuando dos fracciones tienen el mismo numerador, entonces es necesario comparar los denominadores.

Puede haber otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente. No tengo en cuenta estos motivos en el análisis. No puedo afirmar, puesto que la pregunta no lo pide expresamente, que los futuros profesores que contestan de forma correcta conozcan el currículo de primaria y reconozcan la importancia de proponer a los alumnos en esta etapa problemas que puedan resolver con el uso de sus propios procedimientos sin necesidad de recurrir a algoritmos (Llinares y Sánchez, 1988), o que valoren positivamente la utilización del significado de fracción como partes de un todo (Castro y Torralbo, 2001). No obstante, entiendo que la intencionalidad de la pregunta que propone TEDS-M es identificar las ideas claves en los programas de aprendizaje como parte del conocimiento curricular.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas incorrectas: se elige la opción C

Dependiendo de la opción que el futuro profesor haya elegido como idea matemática que se resalta en la actividad propuesta, se pueden intuir los errores en los que el futuro profesor ha podido incurrir o en los conocimientos que ha puesto en juego para elegir esa opción. En principio, los futuros profesores que eligen la opción C saben qué tienen que hacer para ordenar cualquier tipo de fracción de una manera puramente algorítmica y lo harían correctamente reduciendo a común denominador aquellas fracciones que les pidan ordenar. Pero el enunciado de esta opción utiliza la palabra “esencial”, es decir, quiere hacer reflexionar al futuro profesor sobre si es imprescindible en cualquier problema, como el que se propone, el reducir a común denominador. Como hemos visto en el análisis de la pregunta, esto no siempre es necesario cuando trabajamos con fracciones con igual numerador y menos aún cuando son parejas de fracciones con números naturales. Por tanto, dentro de esta opción podemos agrupar a los futuros profesores en tres categorías:

1. Los que no perciben que se trata de fracciones con igual numerador (esta opción es difícil que se dé puesto que el enunciado de esta opción induce al futuro profesor a fijarse en los numeradores).
2. Los que perciben que se trata de fracciones con igual numerador pero no saben ordenarlas sin recurrir a reducir a “común denominador”. A estos futuros profesores les faltaría un conocimiento matemático sobre las fracciones y sus propiedades.
3. Los que perciben que se trata de fracciones con igual numerador pero no se plantean otro método que reducir a común denominador para ordenarlas.

Debido a la formulación que hace TEDS-M de la pregunta y sus posibles respuestas, no es posible determinar a cuál de estas categorías pertenece cada futuro profesor que elige la opción D.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas incorrectas: se elige la opción A o B o se deja la respuesta en blanco

Los futuros profesores que eligen la opción A o B están eligiendo afirmaciones sobre las fracciones que no son ciertas para cualesquiera dos fracciones. Esto manifiesta falta de conocimiento conceptual de las fracciones, de sus propiedades y de capacidad para compararlas.

Por tanto, estos futuros profesores carecen del conocimiento matemático suficiente para abordar este problema y no conocen los procedimientos para comparar fracciones. Esta última afirmación podría aplicarse a aquellos futuros profesores que dejan la pregunta en blanco pero faltan datos para poder asegurarlo.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 9 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En la primera columna aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 9

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 5

%	Respuesta	Conocimientos
33,3%	Correcta Opción D	Reconocen que se trata de fracciones con igual numerador Tienen el conocimiento matemático suficiente para comparar fracciones con igual numerador sin necesidad de reducir a “común denominador” y conocen su fundamentación o Tienen el conocimiento matemático suficiente para comparar fracciones con igual numerador sin necesidad de reducir a “común denominador” pero no conocen su fundamentación u Otros motivos —como el azar-
43,1%	Incorrecta Opción C	Saben ordenar cualquier tipo de fracción reduciendo a común denominador y No han percibido que las fracciones propuestas tienen igual numerador o No saben que de dos fracciones con igual numerador es mayor la que tiene menor denominador
20,6%	Incorrecta Opciones A y B	Falta de conocimiento matemático de las fracciones y sus propiedades Consideran como ciertas propiedades de las fracciones que no se pueden generalizar

Tabla 9

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 5

%	Respuesta	Conocimientos
2,8%	En blanco	
0,2%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles

Como vemos en la tabla 9 tanto los futuros profesores que eligen la opción C como los que eligen la opción D, es decir, un 76,4% de futuros profesores españoles, tienen el conocimiento matemático suficiente para ordenar cualquier tipo de fracciones. Destaca que solo un 33,3% de futuros profesores españoles considere que la idea matemática que se resalta en la actividad sea la D. Estos futuros profesores han sabido ordenar fracciones sencillas sin necesidad de reducir a común denominador pero faltan datos para poder interpretar si conocen o no la fundamentación de la solución.

Al mismo tiempo, los resultados muestran que un tanto por ciento importante de futuros profesores españoles (43,1%) manifiesta que la idea matemática que se resalta en la actividad es la opción D, lo cual sugiere que estos futuros profesores pueden carecer del conocimiento matemático suficiente para ordenar fracciones con el mismo numerador o que valoran positivamente el recurrir al algoritmo de “reducir a común denominador” para ordenar cualquier tipo de fracciones. Sí podemos advertir que estos futuros profesores corren el peligro de que los algoritmos se conviertan en reglas sin sentido para ellos y en el futuro para sus alumnos y no perciban que estos métodos no son un buen recurso didáctico (Llinares y Sánchez, 1988).

Un 23,4% de futuros profesores contesta erróneamente o deja la pregunta en blanco. Es un tanto por ciento elevado de futuros profesores que carece de conocimiento conceptual de las fracciones, de sus propiedades y operaciones.

Pregunta 2. Proporcionalidad directa

La figura 2 presenta la formulación de esta pregunta tal y como aparece en el cuestionario.

“Una máquina consume 2,4 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas si sigue consumiendo combustible al mismo ritmo?”

Formule un problema diferente, del mismo tipo que el problema propuesto (los mismos procesos/operaciones) que sea MÁS FÁCIL de resolver para los alumnos de primaria.

Figura 2. Pregunta sobre proporcionalidad directa

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre la proporcionalidad directa entre magnitudes. TEDS-M la clasifica dentro del dominio de planificación de la enseñanza y la considera de nivel intermedio; es de respuesta abierta y tiene guía de corrección para clasificar las posibles respuestas. Se plantea que el futuro profesor idee un problema para alumnos de primaria del mismo tipo que el propuesto (mismos procesos/operaciones) y que sea más fácil. El problema que se propone es un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes.

En primer lugar, el futuro profesor debe saber qué procesos/operaciones son necesarios para resolver correctamente el problema propuesto y poder plantear así uno más fácil. Debe tener el conocimiento matemático suficiente para reconocer que se trata de un problema de proporcionalidad donde hay que averiguar una cantidad desconocida que forma proporción con otras tres magnitudes conocidas directamente proporcionales; es decir, reconocer que se trata de un problema de proporcionalidad directa. Este problema puede considerarse también como un típico problema de “regla de tres simple directa”. En segundo lugar, para poder plantear un problema más fácil, el futuro profesor debe conocer las variables que afectan a la dificultad de este tipo de problemas. A partir de la revisión de la literatura, he identificado las siguientes variables:

Tipo de números. La dificultad del problema depende del tipo de números implicados en el problema. En particular, se considera que los problemas que incluyen únicamente números enteros son más fáciles. El tamaño de los números también puede influir en la dificultad del problema.

Relación entre las cantidades. Son más fáciles aquellos problemas en los que la relación entre las cantidades está vinculada a la mitad o al doble, así como aquellos problemas donde se puede hallar fácilmente el valor correspondiente a la unidad y a partir de él hallar el valor desconocido.

Contexto. Se considera que los problemas cuyo contexto es cercano al entorno escolar son más fáciles.

Conceptos adicionales que intervienen en el problema. Sería el caso de que en el problema aparezcan, por ejemplo, diferentes unidades de medida, lo cual aumentaría la dificultad del problema.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 10 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En la primera columna de la tabla 10 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 10

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 2

%	Respuesta	Conocimientos
59%	Correcta	Reconocen el problema de proporcionalidad directa Identifican las variables que afectan a la dificultad del problema: tipos de números, relación entre las cantidades, contexto y conceptos adicionales que intervienen en el mismo Son capaces de plantear un problema más fácil

Tabla 10
Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 2

%	Respuesta	Conocimientos
20,8%	Incorrecta	Reconocen el problema como un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes No identifican las variables que afectan a la dificultad del problema: tipos de números, relación entre las cantidades, contexto y conceptos adicionales que intervienen en el mismo No son capaces de plantear un problema más fácil de proporcionalidad directa que el propuesto Inadecuada lectura de la pregunta
11,4%	Otras incorrectas o Ilegibles	No reconocen que el problema es de proporcionalidad directa entre magnitudes o En el caso de las respuestas ilegibles: no es posible determinar qué conocimientos han puesto en juego
8,2%	En blanco	
0,6%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados

El que un 59% de los futuros profesores haya contestado correctamente a esta pregunta permite afirmar que en los programas de formación para futuros profesores de matemáticas de primaria en España se ha trabajado el concepto de la proporción directa entre magnitudes desde la Didáctica de la Matemática. La mayoría de los futuros profesores fue capaz de plantear un problema donde se trabaja el concepto de proporcionalidad directa más fácil que el propuesto para alumnos de primaria. Un 20,8% de futuros profesores tiene el conocimiento matemático suficiente como para plantear un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes pero le falta el conocimiento didáctico suficiente para plantear un problema más fácil que el propuesto para alumnos de primaria al no ser capaz de distinguir las variables que afectan a la dificultad del problema: tipos de números, relación entre las cantidades, contexto y conceptos adicionales que intervienen en el mismo.

Podemos afirmar que un 79,8% de futuros profesores tiene el conocimiento matemático suficiente para reconocer un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes y plantear uno similar. Sin embargo, faltan datos para poder hacer conjeturas acerca del 20,2% de futuros profesores que contestó en blanco, no llegó a abordar la pregunta o su respuesta se puede clasificar dentro de la opción de “otras incorrectas”. En principio, podemos afirmar que entre estos futuros profesores hay una cierta proporción que no tiene el conocimiento matemático suficiente para reconocer el problema de proporcionalidad directa entre magnitudes.

PREGUNTA 3. NÚMEROS DECIMALES

La figura 3 presenta la formulación de esta pregunta, tal y como aparece en el cuestionario de los futuros profesores..

> [Jeremy] se da cuenta de que cuando introduce 0,2 x 6 en la calculadora el resultado es menor que 6, y que cuando introduce 6 : 0,2 tiene un resultado mayor que 6. Él está perplejo por esto, y le pide a su profesor ¡una nueva calculadora!
>
> ¿Cuál es la concepción errónea más probable [de Jeremy]?

Figura 3. Pregunta sobre números decimales

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En la pregunta de la figura 3 se estudia el conocimiento didáctico sobre la multiplicación y división con números decimales. TEDS-M la clasifica dentro del dominio de implementación de la enseñanza y la considera de nivel intermedio; es de respuesta abierta y tiene guía de corrección para clasificar las posibles respuestas. En esta pregunta, TEDS-M busca evaluar si los futuros profesores conocen una de las concepciones erróneas más frecuentes que tienen los alumnos de primaria sobre multiplicación y división con números decimales: pensar que el producto de dos números decimales tiene que dar siempre un número mayor que los propuestos o que la división de dos números decimales tiene que dar siempre como resultado un número menor que los dados. En el caso del problema propuesto, sería reconocer que el error que manifiesta el alumno es no reconocer que el producto de un número entero por un número decimal menor que 1 da como resultado un número menor que el número entero y que la división del mismo número entero por el número decimal menor que uno da como resultado un número mayor que el número entero.

Castro (2001) confirma el interés de este problema al afirmar que "de todos los errores de las operaciones con decimales más del 80% lo acaparan la multiplicación y la división" (p. 332), Este autor añade que esto se debe, en parte, a que los números naturales pueden ser un obstáculo para el aprendizaje de los decimales, ya que muchos niños suelen extender su conocimiento de los naturales y aplicarlo de manera equivocada a los decimales, predominando el conocimiento ya consolidado del número natural sobre el conocimiento en construcción de los decimales.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 11 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En la primera columna de la tabla 11 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 11

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 3

%	Respuesta	Conocimientos
22,1%	Correcta	Conocen el tipo de error gracias a su conocimiento didáctico Reconocen el error en el que incurre el alumno
7%	Parcialmente Correcta	Conocimiento matemático y/o didáctico parcial: solo reconocen el tipo de error con números decimales bien en la multiplicación o bien en la división pero no en ambas

Tabla 11
Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 3

%	Respuesta	Conocimientos
0,7%	Otras parcialmente correctas	Tienen cierto conocimiento didáctico sobre los números decimales y conocen que uno de los errores frecuentes entre los alumnos de primaria es la falta de comprensión de la notación decimal, en este caso sería ignorar el 0 que hay antes de la coma
35,5%	Incorrectas	No reconocen el error en el que incurre el alumno, que es un error tipificado en la Didáctica de la Matemática
20%	Otras incorrectas	
14%	En blanco	
0,7%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles

Resulta preocupante que sólo un 22,1% de futuros profesores españoles haya contestado de forma correcta a esta pregunta. Esto significa que sólo un 22,1 % de los futuros profesores españoles conoce este tipo de error —tipificado en Didáctica de la Matemática— y ha sido capaz de percibir que el alumno ha podido incurrir en él. Por una parte, esto podría manifestar falta de conocimiento matemático para operar con números decimales. No obstante, considero que los futuros profesores están capacitados para poder realizar el producto y multiplicación que aparecen en el enunciado. Por tanto, aunque su estudio se incluye en los manuales de Didáctica de la Matemática, más del 70% de los futuros profesores españoles no es capaz reconocer el error en que incurre el alumno.

Solo un 7% de los futuros profesores contestan de forma parcialmente correcta. Es claro que si un futuro profesor percibe el error en la multiplicación, también lo debería percibir para la división o viceversa. Solo hay un 0,7% de futuros profesores cuya respuesta se pueda clasificar dentro de las “otras parcialmente correctas”. Este tanto por ciento, justo por ser tan bajo, confirma el bajo conocimiento en Didáctica de la Matemática que tienen los futuros profesores en el tema de los números decimales, ya que no han distinguido otro error habitual en alumnos de primaria cuando trabajan con números decimales cuya parte entera es 0. No obstante, como ya he indicado en el análisis de la guía de corrección, no es posible que el alumno esté incurriendo en este error. Es significativo que el 35,5% de futuros profesores responda de manera incorrecta. Estos futuros profesores no tienen el conocimiento didáctico necesario para reconocer un error que se estudia dentro de la Didáctica de la Matemática. Hay un 34,1% de futuros profesores que contesta en blanco o cuya respuesta se puede clasificar como “otras incorrectas”. Es también un tanto por ciento muy alto, aunque no podamos determinar concretamente cuál es el conocimiento manifestado.

PREGUNTA 4. REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

La figura 4 presenta la formulación de esta pregunta, tal y como aparece en el cuestionario de los futuros profesores.

> Haz una representación gráfica que el profesor podría usar como modelo para representar 0,2 x 6 y ayudar a Jeremy a entender la respuesta a la pregunta 3.

Figura 4. Pregunta sobre representación gráfica de números decimales

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En la pregunta de la figura 4 se estudia el conocimiento sobre representación gráfica de los números decimales en general y de la multiplicación con números decimales en particular. TEDS-M la clasifica dentro del dominio de implementación de la enseñanza y la considera de nivel avanzado; es de respuesta abierta y tiene guía de corrección para clasificar las posibles respuestas. En esta pregunta se le pide al futuro profesor que de manera gráfica represente el producto de $0,2 \times 6$ de tal forma que el alumno pueda comprender el error conceptual sobre la multiplicación con números decimales en el que ha incurrido en la pregunta 3.

Para analizar esta pregunta me baso en la clasificación de las representaciones gráficas de los números decimales que hace Castro (2001), así como en su concepción de modelización de los mismos. Al abordar esta pregunta, el futuro profesor debe saber que los números decimales proporcionan una ampliación del sistema decimal de numeración: con los números naturales se representan cantidades enteras; con los números decimales se expresan también las diferentes partes de la unidad. Por ello, contestar correctamente a esta pregunta implica que el futuro profesor:

1. Conoce el tipo de error gracias a su conocimiento didáctico del tema de los números decimales.
2. Reconoce y tipifica el error en el que incurre el alumno.
3. Sabe representar gráficamente el número decimal $0,2$, para ello puede:
   - ♦ conocer que los decimales pueden ser representados como sub-áreas de una región que se toma como unidad o
   - ♦ conocer que los decimales se pueden representar como puntos sobre un segmento: la recta numérica
4. Sabe representar $0,2 \times 6$ e identificar que $0,2 \times 5$ corresponde a la unidad.
5. Es capaz de utilizar las representaciones concretas mencionadas en el apartado 3 para apoyar el aprendizaje del estudiante como instrumento de aplicación en la enseñanza.

Podemos afirmar que, para abordar esta pregunta, no basta tener un conocimiento matemático de los números decimales y las operaciones con ellos. Es además necesario tener un conocimiento didáctico sobre la enseñanza de los números decimales, su representación gráfica, los errores más frecuentes en los que pueden incurrir los alumnos y la aplicación de las representaciones gráficas en la enseñanza.

Aunque esta pregunta está directamente relacionada con la anterior, TEDS-M la corrige de forma independiente. Ambas preguntas dan información del conocimiento de los futuros profesores sobre los números decimales pero cada una proporciona información sobre un aspecto concreto de este conocimiento didáctico. La pregunta 3 se refiere al conocimiento del futuro profesor en el dominio de uno de los errores más frecuentes en el que pueden incurrir los alumnos al trabajar con números decimales; y la pregunta 4 nos da información sobre la aplicación de las representaciones gráficas en la enseñanza de los números decimales por parte del futuro profesor.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 12 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En la primera columna de la tabla 12 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 12
Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 4

%	Respuesta	Conocimientos
10,9%	Correcta	Conocen la representación de los números decimales bien como sub-áreas de una región que se toma como unidad y/o como puntos sobre un segmento (recta numérica) Reconocen que 5 veces 0,2 corresponde a la unidad Saben representar gráficamente el producto 0,2 x 6 = 1,2
5,4%	Parcialmente Correcta Tipo 1	Conocen la representación de los números decimales bien como sub-áreas de una región que se toma como unidad y/o como puntos sobre un segmento (recta numérica) No reconocen que 5 veces 0,2 es la unidad No representan gráficamente que 0,2 x 6 = 1,2
1,1%	Parcialmente Correcta Tipo 2	Conocen la representación de los números decimales bien como sub-áreas de una región que se toma como y/o como puntos sobre un segmento (recta numérica) Reconocen que 5 veces 0,2 es la unidad No representan gráficamente que 0,2 x 6 = 1,2

Tabla 12

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 4

%	Respuesta	Conocimientos
10,9%	Parcialmente Correcta Tipo 3	No conocen una significación gráfica de lo que representa el número decimal 0,2 Conocen que 0,2 x 6 es igual a 1,2 y lo expresan sin recurrir a la significación gráfica del número decimal 0,2
6,2%	Respuestas Incorrectas Tipo 1	No conocen una significación gráfica de lo que representa el número decimal 0,2 No manifiestan que 0,2 x 6 = 1,2 No reconocen que 5 veces 0,2 es la unidad
0,2%	Respuestas Incorrectas Tipo 2	Razonan que 6 x 0,2 = 1,2 pero sin representarlo gráficamente.
32,8%	Otras incorrectas (incluyendo respuestas tachadas, ilegibles, etc.)	
31,6%	En blanco	
0,9%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles

Como muestra la tabla 12, sólo un 10,9% de futuros profesores españoles contesta correctamente a esta pregunta. Los resultados de esta pregunta sobre los números decimales, su significación gráfica y su enseñanza están en consonancia con los resultados obtenidos para la pregunta 3 que he estudiado anteriormente. Es decir, podemos afirmar, después de estudiar las preguntas 3 y 4, que el conocimiento didáctico que tienen los futuros profesores en el tema de los números decimales es deficiente en cuanto a los errores comunes y a su representación gráfica como aplicación a la enseñanza.

Son significativos los datos del 32,8% de futuros profesores cuya respuesta es ilegible y el 31,6% que contestó en blanco.

PREGUNTA 6: SIGNIFICADO GRÁFICO DE LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

En esta pregunta no liberada se plantea la división de dos fracciones sencillas. Se dan cuatro modelos gráficos donde aparentemente se representa el significado gráfico de la división de esas fracciones y se plantea al futuro profesor que determine en cada caso cuál o cuáles de ellos se puede o se pueden usar para mostrar el significado de la misma.

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre la representación gráfica de la división de fracciones. TEDS-M clasifica esta pregunta dentro del dominio de planificación de la enseñanza y la considera de nivel intermedio; es de respuesta múltiple compleja y no necesita guía de corrección para clasificar las posibles respuestas.

Para analizar las cuatro opciones que plantea el problema me he basado en la concepción de modelo que recogen Castro y Torralbo (2001), que consideran los modelos como materiales estructurados que ofrecen una imagen isomorfa del concepto, lo que hace que respete relaciones y propiedades inherentes del mismo. Para el caso de las fracciones, consideraré también los dos tipos de modelos que proponen: los continuos y los discretos. Por ello, para comprobar que cada una de las opciones que nos proporciona el enunciado son o no correctas, he tenido que ver en primer lugar si las representaciones que se hacen de las fracciones propuestas son verdaderamente modelos discretos o continuos de dichas fracciones y, a continuación, comprobar que realmente las representaciones gráficas que se proponen muestran el significado de la división de las fracciones.

Opción A

En esta opción, las representaciones que se hacen de las fracciones que forman parte de la división no corresponden a un modelo discreto de representación de fracciones, puesto que no ofrecen una imagen isomorfa del concepto de fracción y no establecen una relación entre una parte y el conjunto total. Por tanto, la opción A no es una solución correcta.

Opciones B, C y D

En estas opciones se utilizan modelos continuos para representar las fracciones que forman parte de la división propuesta en el enunciado. Merece la pena recordar que, en un modelo continuo de fracción, la fracción se considera como la medida de una parte del área de una región plana que se toma como unidad. Se estaría trabajando el significado de fracción como partes de un todo, dividiéndose la figura en tantas partes iguales como indique el denominador y señalando tantas como indique el numerador (Castro y Torralbo, 2001). Para poder estudiar si las opciones B, C y D son correctas hay que tener en cuenta, en primer lugar, cuál es el significado de la operación división de fracciones. Una forma sencilla de aproximarse al significado de la operación $a \div b = c$ es a través de la pregunta: ¿cuántas veces b está contenida en a? Por tanto, para ver si son correctas, los pasos que tenemos que dar son:

- Comprobar que está bien representada la fracción a.
- Comprobar que el todo está dividido en b partes.
- Ver que b está contenido c veces en a.

De esta forma se comprueba que sólo la opción B es la correcta.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 13 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En esta pregunta, al ser de opción múltiple compleja, se evaluó cada opción por separado. En la primera columna de la tabla 13 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles que contestaron que era correcta cada una de las posibles opciones —segunda columna—. En la tercera columna, interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 13

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 6

%	Respuesta	Conocimientos
39.2%	Correcta Opción B	Conocen los modelos de fracciones continuos y el significado de la operación división de fracciones Conocen el significado de fracción como partes de un todo Otros motivos —como el azar-
55.6%	Incorrecta Eligen como correcta la opción A	No conocen los modelos de fracciones discretos No conocen el significado de la operación división de fracciones
31.4%	Incorrecta Eligen como correcta la opción C	No conocen el significado de la operación división de fracciones No perciben que son distintos el resultado numérico de la división de fracciones del resultado gráfico
25,7%	Incorrecta. Eligen como correcta la opción D	No conocen el significado de la operación división de fracciones; Perciben que el resultado numérico de la división de fracciones coincide con el área rayada gráficamente

Interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles

Como vemos en la tabla 13, sólo un 39,2% de futuros profesores españoles fue capaz de reconocer la representación correcta de la división de fracciones. Es decir, sólo el 39,2% conoce el significado de dividir fracciones. No obstante, no sabemos si estos mismos profesores han contestado incorrectamente en el resto de opciones, lo cual nos daría información sobre si el conocimiento que tienen acerca del significado de la operación división de fracciones es completamente correcto o parcialmente correcto.

Podemos afirmar, a la vista de estos resultados, que más del 50% de los futuros profesores españoles, que elige como correcta la opción A, no reconoce la fracción como partes de un todo y no conoce, por tanto, los modelos discretos de representación de fracciones. Ellos saben dividir las fracciones propuestas numéricamente ya que identifican el resultado gráfico con el resultado numérico de realizar la división. Tampoco conocen el significado gráfico de la operación división de fracciones ni el 25,7% que elige la opción D ni el 31,4 % que elige la C como correctas. No obstante, el que solo el 39,2% de los futuros profesores señalara que la opción B era la correcta no nos proporciona información suficiente acerca del conocimiento del significado de la operación división de fracciones de los futuros profesores ni sobre su dominio en los modelos continuos de representación de fracciones, considerándolas como partes de un todo. Supongo que los futuros profesores que participan en el estudio TEDS-M son capaces de realizar la operación de dividir dos fracciones sencillas de forma algorítmica, por ello no considero la opción de que los futuros profesores españoles no sepan realizar esta sencilla división.

Estos resultados confirman los errores y dificultades que se comprueban en el tema de fracciones en el currículo de primaria: "el cálculo de productos y división de fracciones, cuando se plantea solamente como cómputo, es más fácil que el cálculo de suma y resta de fracciones. Sin embargo, cuando se trata del significado de las operaciones, el producto y la división ofrecen mayor dificultad que la suma y la resta" (Castro y Torralbo, 2001, p. 307). En este mismo sentido también se puede añadir la propuesta de Llinares y Sánchez (1988) que afirman que la operación de dividir fracciones corresponde a una operación de sentido algebraico; siendo su vinculación a situaciones intuitivas compleja, por lo que en ocasiones se ha cuestionado el manejo del algoritmo de la división en primaria.

PREGUNTA 7: NÚMEROS MIXTOS

En esta pregunta no liberada el futuro profesor debe analizar el método que utiliza una alumna para sumar dos números mixtos (uno positivo y otro negativo). En concreto, se le pide al futuro profesor que interprete qué hace la alumna para resolver el problema y que determine si el método que propone la alumna es correcto para cualquier pareja de números mixtos o bien que describa cuál es el error conceptual en el que está incurriendo de entre cuatro opciones que se le proponen. El procedimiento que sigue la alumna es el siguiente: dados los dos números mixtos, uno positivo y otro negativo, ella suma los enteros por una parte (teniendo en cuenta los signos); suma las fracciones, que tienen igual denominador por otra parte (teniendo también en cuenta los signos), y, como resultado, pone el número entero junto con la fracción, sin darse cuenta de que para hallar el resultado tendría que dar un paso más que es sumar el número entero a la fracción.

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre las operaciones con números mixtos. TEDS-M la clasifica dentro del dominio de implementación de la enseñanza y la considera de nivel intermedio; es de respuesta múltiple y no necesita guía de corrección para clasificar las posibles respuestas. Para abordar esta pregunta, el futuro profesor debe conocer los números mixtos, su significación y las operaciones con ellos, así como las operaciones con números enteros. En primer lugar el futuro profesor tendría que hallar la solución correcta del problema propuesto, teniendo en cuenta que lo usual para operar con números mixtos es transformarlos en fracciones impropias y posteriormente realizar las operaciones indicadas con las fracciones. En el momento en que se resuelve la actividad de esta manera, se comprueba que el método que propone la alumna no es correcto, puesto que el resultado no lo es.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 14 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En la primera columna aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 14

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 7

%	Respuesta	Conocimientos
12,6%	Correcta	Conocen los números mixtos, y las operaciones con ellos Son capaces de determinar el tipo de error en el que incurre la alumna del problema Otros motivos —como el azar-
74,6%	Incorrecta	No saben operar con números mixtos No reconocen el error en el que incurre la alumna No son capaces de analizar el contenido matemático de las matemáticas escolares de esta pregunta

Tabla 14
Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 7

%	Respuesta	Conocimientos
11,4%	En blanco	
1,4%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles

Es significativo que sólo un 15,3% de los futuros profesores haya contestado correctamente. Este resultado pone de manifiesto que los futuros profesores españoles carecen del conocimiento matemático de los números mixtos, de su significación y de las operaciones con ellos, al mismo tiempo que no están en condiciones de advertir el error en el que ha incurrido la alumna de la pregunta tras analizar el contenido matemático de las matemáticas escolares de la pregunta.

PREGUNTA 8: ALGORITMOS DE LA RESTA

En esta pregunta no liberada se presentan tres métodos propuestos por alumnos con los que ellos efectúan la resta de dos números naturales de tres cifras (el minuendo mayor que el sustraendo) y se pide al futuro profesor que decida cuál o cuáles de esos métodos se puede usar para restar cualquier número entero positivo de tres cifras de otro mayor; es decir, que determine cuál o cuáles de esos métodos se puede considerar algoritmos de la resta.

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre algoritmos de la resta. TEDS-M la clasifica dentro del dominio de implementación de la enseñanza y la considera de nivel intermedio; es de respuesta múltiple y no necesita guía de corrección para clasificar las posibles respuestas. En esta pregunta se está pidiendo al futuro profesor que analice el contenido matemático de una actividad escolar. Para analizar esta pregunta, me baso en el estudio que hace Roa (2001) sobre los algoritmos del cálculo. Así mismo, utilizo la definición que hace Gómez (1988) de un algoritmo: “Un algoritmo es una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedad) en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos" (p.105).

Para abordar correctamente esta pregunta el futuro profesor debe:

1. conocer que la mayoría de los algoritmos para la resta están basados, unos, en recorrer directamente el camino de un número a otro, ya sea del sustraendo al minuendo o del minuendo al sustraendo; y, otros, en la descomposición del minuendo, del sustraendo o de ambos (Roa, 2001).
2. reconocer, en los métodos propuestos por los alumnos, los pasos que se dan en cada uno de ellos:

   Método A: se recorre el camino del sustraendo al minuendo.

   Método B: se descompone el sustraendo y se realiza la misma resta en tres pasos.

   Método C: Se utiliza repetidamente la propiedad de la resta que establece que si se suman la misma cantidad al minuendo y al sustraendo, la resta no cambia.

Por tanto, la respuesta correcta a esta pregunta es la que propone que todos los métodos que utilizan los alumnos se pueden usar para restar cualquier número natural de tres cifras de otro mayor. Es decir, los tres métodos son algoritmos para la resta.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 15 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En la primera columna aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 15

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 8

%	Respuesta	Conocimientos
30,6%	Correcta	Reconocen los pasos con los que los alumnos resuelven la resta y son capaces de identificar que se trata de algoritmos de la resta Otros motivos —como el azar-
21,9%	Incorrecta Tipo 1	No reconocen como algoritmo el método que aplica la propiedad de sumar y restar el mismo número al minuendo y al sustraendo Conocen que restar al minuendo el sustraendo es lo mismo que restar en tres pasos la descomposición del sustraendo No reconocen como algoritmo el recorrer el camino del sustraendo al minuendo
19,8%	Incorrecta Tipo 2	Reconocen que restar al minuendo el sustraendo es lo mismo que restar en tres pasos la descomposición del sustraendo Reconocen como algoritmo de la resta el recorrer el camino del sustraendo al minuendo No reconocer como algoritmo el método que aplica la propiedad de sumar y restar el mismo número al minuendo y al sustraendo
23,2%	Incorrecta Tipo 3	Conocen que restar al minuendo el sustraendo es lo mismo que restar en tres pasos la descomposición del sustraendo y por tanto dicho método es un algoritmo de la resta No reconocen como algoritmo de la resta el recorrer el camino del sustraendo al minuendo Reconocen como algoritmo el método que aplica la propiedad de sumar y restar el mismo número al minuendo y al sustraendo
2,4%	En blanco	
2,1%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles

Estos resultados muestran que sólo un 30,6% de futuros profesores es capaz de reconocer que los métodos A, B y C son algoritmos de la resta. El 95,5 % de los futuros profesores españoles reconoce el método B como algoritmo de la resta. Esto manifiesta que prácticamente todos los futuros españoles conocen la descomposición de un número utilizando el sistema de numeración decimal y reconocen que es lo mismo restar un número a otro que restar sucesivamente la descomposición del segundo. El 21, 9% contesta que solamente el método B es un algoritmo de la resta; el 23, 2% que solamente los métodos B y C lo son; y el 19,8 % que sólo los métodos A y B lo son. Por consiguiente, un 64,9% de los futuros profesores tienen un conocimiento parcial acerca de las propiedades de la resta y de lo que es un algoritmo de la resta. Estos resultados ponen de manifiesto que los futuros profesores tienen un conocimiento matemático parcial a la hora de trabajar con la resta y distinguir métodos que se pueden usar para restar cualquier número natural de tres cifras de otro mayor.

Resumen e interpretación de los resultados

El objetivo de este trabajo era describir el conocimiento en Didáctica de la Matemática que los futuros profesores de primaria españoles manifestaron en el estudio TEDS-M en el subdominio de números. Para ello, he analizado las ocho preguntas del cuestionario que TEDS-M clasificó como de conocimiento didáctico en este subdominio. Estas preguntas interrogan a los futuros profesores sobre conceptos y procedimientos fundamentales dentro del bloque de números en primaria —problemas aritméticos, números decimales, fracciones y operaciones con fracciones, proporcionalidad directa y algoritmos de la resta— por lo que la información que proporcionan las respuestas a las preguntas de este subdominio es de interés para describir el conocimiento de los futuros profesores, a pesar de las limitaciones que podamos encontrar en el instrumento. Basándome en el análisis que hice de cada pregunta con los datos disponibles, describo a continuación el conocimiento que, según este análisis, han manifestado los futuros profesores. Considero para ello dos perspectivas:

1. Analizando los porcentajes de respuestas correctas a las preguntas y, por tanto, interpretando el conocimiento tanto matemático como didáctico que los futuros profesores para ello han puesto en juego.
2. Analizando los porcentajes de respuestas no correctas, atendiendo al conocimiento parcial, tanto matemático como didáctico, que manifiestan y a los errores en los que los futuros profesores han podido incurrir.

Análisis de las respuestas correctas

Como ya he indicado en el capítulo del marco conceptual, considero que la clasificación que TEDS-M hace de las preguntas en el dominio del conocimiento didáctico —currículo, implementación y planificación de la enseñanza— es demasiado amplia para describir con detalle el conocimiento didáctico manifestado por los futuros profesores en cualquiera de los subdominios del estudio. Por este motivo interpreto los resultados según la clasificación más fina que he generado al analizar las preguntas. Para las 8 preguntas analizadas, identifiqué los siguientes aspectos del conocimiento didáctico:

1. Distinguir los elementos que afectan a la dificultad de un problema.
2. Reconocer los errores en que incurren los alumnos al realizar una actividad o sus concepciones erróneas sobre un tema determinado.
3. Representar gráficamente los conceptos o los procedimientos matemáticos para su aplicación en la enseñanza.
4. Conocer el contenido matemático de las matemáticas escolares desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje.

Como mencioné en el marco conceptual, esta es una clasificación parcial que surge únicamente del análisis de las 8 preguntas del subdominio de números. Para el caso de este subdominio, es claro que las preguntas no cubren todos los temas que TEDS-M presenta en la caracterización de los dominios del conocimiento didáctico (Tatto et al., 2008, p. 39).

En la tabla 16 presento el resumen de los resultados de los futuros profesores españoles que respondieron correctamente las preguntas. En la caracterización de los conocimientos que se ponen en juego, distingo entre el conocimiento matemático —zona izquierda— y el conocimiento didáctico manifestado por los futuros profesores al responder de forma correcta —zona derecha—. El conocimiento didáctico se concreta en la clasificación de los tipos de conocimiento didáctico que mencioné anteriormente. El conocimiento matemático se concreta atendiendo al porcentaje de futuros profesores que presentan el conocimiento matemático necesario para abordar cada pregunta que describo en la columna del extremo derecho. Los datos surgen del análisis que hice de cada pregunta y de los resultados de los futuros profesores españoles en el estudio que presenté en el capítulo anterior y que detallo en el anexo.

Tabla 16

Resumen del análisis de las respuestas correctas

Conocimiento didáctico				Conocimiento matemático	
RE	Dif	Rep	CCM	PC	Descripción
1. Problemas aritméticos					
	80,4%				
2. Proporcionalidad directa					
	59%			79,8%	Reconocen los problemas de proporcionalidad directa y saben resolverlos
3. Operaciones con números decimales					
22,1%					
4. Representación de números decimales					
		10,9%			
5. Ordenar fracciones					
			33,3%	76,4%	Saben ordenar cualquier tipo de fracciones
				33,3%	Comparan fracciones con igual numerador sin necesidad de reducir a "común denominador"
6. Significado gráfico de la división de fracciones					
		39%			
7. Operaciones con números mixtos					
12,6%				12,6%	Conocen los números mixtos y las operaciones con ellos
8. Algoritmos de la resta					
			30,6%	95,5%	Conocen la estructura del sistema de numeración decimal y su aplicación para la resta
				30,6%	Dominan la resta y sus propiedades

Nota: RE = Reconocen los errores en los que incurren los alumnos al realizar una actividad o sus concepciones erróneas sobre un tema determinado; Dif = Distinguen los elementos que afectan a la dificultad de un problema; Rep = Representan gráficamente los conceptos o los procedimientos matemáticos para su aplicación en la enseñanza.; CCM = Conocen el contenido matemático del tema desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje; PC = porcentaje.

Los resultados muestran que los futuros profesores españoles de primaria manifiestan diferentes niveles de conocimiento didáctico dependiendo en gran medida del tipo específico de conocimiento matemático que hay que poner en juego para poder contestar correctamente.

No obstante, si me centro solo en el conocimiento didáctico, entonces el 59% de ellos es capaz de reconocer la dificultad de los problemas y establecer objetivos de aprendizaje adecuados, pero solamente el 22,1% de ellos es capaz de reconocer los errores de los escolares. Por otro lado, alrededor de un tercio de los futuros profesores españoles conocen el contenido matemático de las matemáticas escolares desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje. Finalmente, el conocimiento de las representaciones es variable, pero la proporción de futuros profesores que conoce y sabe utilizar las representaciones gráficas para explicar o representar los conceptos matemáticos o los procedimientos en el proceso de enseñanza no supera el 40%. Aunque estos resultados se refieren únicamente a las preguntas analizadas, constato diferencias significativas. La conjetura más general sobre estas diferencias—incluyendo los otros subdominios del contenido matemático— deberá ser contrastada en futuras investigaciones.

Considero, a partir de los resultados, que los alumnos de tercer curso de magisterio que participaron en el estudio saben resolver problemas aritméticos de una sola operación, realizar operaciones sencillas con números decimales y dividir fracciones con numerador y denominador menores de 10. Por ello, al no incluir este conocimiento matemático concreto en el análisis, la descripción y el tanto por ciento de futuros profesores que tienen el conocimiento matemático específico en las preguntas 1, 3, 4 y 6 aparecen en blanco.

Haré la interpretación de los resultados de la tabla 16 de acuerdo con los cuatro tipos de conocimiento didáctico que he identificado en las 8 preguntas analizadas.

Distinguir los elementos que afectan a la dificultad de un problema

Un porcentaje importante de los futuros profesores españoles tiene la capacidad de distinguir los elementos que caracterizan la dificultad de los problemas. Esto se constata en los problemas aritméticos que se resuelven con una sola operación y en los problemas de proporcionalidad directa. Detallo a continuación el análisis de los resultados de este tipo de conocimiento didáctico a partir de la información de la tabla 16.

El 80,4% de los futuros profesores españoles son capaces de identificar las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos que se resuelven con una sola operación. Estos resultados sugieren que estos futuros profesores conocen el currículo de primero de primaria y que estarían en condiciones de elegir problemas aritméticos adecuados para alumnos de este curso y de reconocer también las posibles dificultades con las que estos alumnos podrían encontrarse al enfrentarse a un determinado problema aritmético.

El 79,8% de los futuros profesores tienen el conocimiento matemático suficiente para reconocer los problemas de proporcionalidad directa entre magnitudes. No obstante, de estos, el 59% tiene el conocimiento didáctico suficiente para identificar las variables que afectan a la dificultad de este tipo de problemas y proponer problemas más fáciles adecuados a los alumnos de primaria. Estos futuros profesores pusieron de manifiesto con sus soluciones la importancia que asignan a buscar métodos que favorezcan la resolución de las cuestiones de proporcionalidad de una forma más significativa que la puramente algorítmica, como lo sugieren los expertos. Ellos propusieron problemas en los que las relaciones entre las cantidades es doble o mitad, o bien plantearon problemas que se resuelven mediante la búsqueda del valor correspondiente a la unidad y a partir de él hallar el valor desconocido. Por tanto, no recurrieron a la clásica regla de tres como modelo único de resolución de problemas de proporcionalidad directa.

Reconocer los errores o las concepciones erróneas de los alumnos

Menos del 25% de los futuros profesores españoles fue capaz de reconocer los errores en los que incurren los alumnos. En este caso, es difícil caracterizar su conocimiento didáctico. Para las operaciones con números mixtos, estos resultados pueden deberse a un deficiente conocimiento matemático de los números mixtos y de las operaciones con ellos por parte de los futuros profesores (solo un 12,6% fue capaz de reconocer el error operacional en el que incurre un alumno al restar dos números mixtos). Este no es necesariamente el caso de las operaciones con números decimales, donde solo un 22,1% reconoció el error en el que incurre el alumno. Este error está tipificado en la Didáctica de la Matemática y su conocimiento no depende del conocimiento matemático. Matizaré estos resultados en el siguiente apartado cuando estudie las respuestas parcialmente correctas e incorrectas.

Representar gráficamente los conceptos y procedimientos matemáticos para su enseñanza

Hay una proporción reducida de futuros profesores españoles que es capaz de utilizar representaciones concretas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, como se constata en las preguntas sobre el producto de números decimales y el significado de la división de fracciones. He supuesto que los futuros profesores españoles tenían el conocimiento matemático necesario para realizar correctamente operaciones con números decimales. No obstante, sólo un 10,9% de ellos manifestó conocer la representación gráfica de los números decimales y de su producto para su aplicación en la enseñanza. Este 10,9% de futuros profesores (a) reconoció y tipificó los errores en los que incurre el alumno; (b) supo representar gráficamente los números decimales bien como sub-áreas de una región que se toma como unidad o bien como puntos sobre un segmento —la recta numérica—; (c) supo representar el producto de un número decimal por un entero; y (d) fue capaz de utilizar las representaciones concretas mencionadas en los apartados (b) y (c) para apoyar la enseñanza y el aprendizaje.

Por otro lado, el 39,2% de los futuros profesores españoles respondió correctamente la pregunta sobre el significado gráfico de la división de fracciones. Estos profesores (a) conocían los modelos de fracciones (continuos y discretos); (b) conocían el significado de fracción como partes de un todo; y (c) conocían el significado de la operación división de fracciones. El conocimiento manifestado por los futuros profesores en esta pregunta es eminentemente didáctico.

Conocimiento del contenido matemático de las matemáticas escolares desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje

En las preguntas 5 y 7 se aborda el conocimiento del contenido que los futuros profesores manifiestan de las matemáticas escolares desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje. En concreto, para ordenar fracciones sencillas de igual numerador, el 33,3% de los futuros profesores españoles manifestó saber que entre dos fracciones con igual numerador, es mayor la que tiene menor denominador; mientras que el 43,1% de ellos no reconoció esta relación y usó la reducción a común denominador como estrategia alternativa para resolver el problema. Por tanto, un 76,4% de futuros profesores españoles tenía el conocimiento matemático suficiente para ordenar cualquier tipo de fracciones, aunque menos de la mitad de ellos manifestaron poseer las herramientas necesarias para una enseñanza más significativa y con el menor uso de algoritmos posibles.

Con respecto a los algoritmos de la resta, solo el 30,6% de los futuros profesores españoles tenía el suficiente conocimiento matemático y didáctico para establecer si una determinada estrategia tiene sentido, si siempre va a funcionar y por tanto, si puede ser generalizada, o, lo que es lo mismo, si una determinada estrategia es un algoritmo de la resta. No obstante, el 95,5% de futuros profesores manifestó dominio de la estructura del sistema de numeración decimal y reconoció que es lo mismo restar un número a otro que restar sucesivamente al primero la descomposición del segundo.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS PARCIALMENTE CORRECTAS E INCORRECTAS

La información que tuve disponible me permitió caracterizar con mayor detalle el conocimiento matemático parcial de los futuros profesores españoles que contestaron de forma incorrecta o parcialmente correcta a las preguntas. Esa misma información no me permitió abordar detalladamente el conocimiento didáctico manifestado por los futuros profesores. Solamente 3 de las preguntas tienen respuestas que las guías de corrección clasifican como parcialmente correctas. En los otros casos, las respuestas se consideran que son correctas o que no lo son. No obstante, las guías de corrección sí distinguen entre distintos tipos de respuestas incorrectas.

La información que presento en la tabla 17 complementa la de la tabla 16 y caracteriza el conocimiento parcial de los futuros profesores españoles. El porcentaje de futuros profesores que contestaron de forma parcialmente correcta y de forma incorrecta aparece en la primera y segunda columnas, respectivamente. He incluido dentro de las respuestas incorrectas las respuestas en blanco o ilegibles. Identifico si el conocimiento parcial manifestado por los futuros profesores es didáctico o matemático en la tercera y cuarta columnas, respectivamente. Incluyo en la quinta columna una descripción de estos conocimientos, a partir del análisis que hice en el capítulo anterior.

Tabla 17

Resumen del análisis de las respuestas parcialmente correctas e incorrectas

Porcentajes		Con.		
P.C.	Inc.	D.	M.	Descripción
				1. Problemas aritméticos
15,5%		✓		No reconocen la dificultad de la multiplicación para primero de primaria
2,9%		✓		No reconocen la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido para primero de primaria
	1,2%	✓		No distinguen las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos que se resuelven con una sola operación
				2. Proporcionalidad directa
	20,8%	✓	✓	Reconocen los problema de proporcionalidad directa entre magnitudes No identifican las variables que afectan a la dificultad de los problemas de proporcionalidad No son capaces de plantear un problema más fácil de proporcionalidad directa que uno propuesto
	11,4%		✓	No reconocen los problema de proporcionalidad directa entre magnitudes o en el caso de las respuestas ilegibles, no es posible determinar qué conocimientos se han puesto en juego
	8,8%			En blanco o no llegaron a abordar la pregunta
				3. Operaciones con decimales
7%		✓		Reconocen solo parte del error en el que incurre el alumno
0,7%		✓		Expresan otro error didáctico frecuente en operaciones con decimales
	35,5%	✓		No reconocen el error en el que incurre el alumno
	34,7%			Ilegibles, en blanco o no llegaron a abordar la pregunta
				4. Representación de números decimales
17,4%		✓		Conocen la representación gráfica de un número decimal pero no la representación gráfica del producto de los números decimales y/o utilizan algún otro tipo de representación para explicar el producto de decimales
	6,8%	✓		No conocen la representación de los números decimales y no conocen la representación gráfica del producto de los números decimales
	65,3%			Ilegibles, en blanco o no llegaron a abordar la pregunta
				5. Ordenar fracciones
	43,1%		✓	Ordenan fracciones de igual numerador reduciendo a común denominador
	20,6%		✓	Consideran como ciertas propiedades de las fracciones que no se pueden generalizar
	3%			En blanco o no llegaron a abordar la pregunta
				6. Significado gráfico de la división de fracciones
	60,8%	✓		No conocen el significado de la operación división de fracciones y/o no conocen los modelos de fracciones discretos o continuos

Tabla 17

Resumen del análisis de las respuestas parcialmente correctas e incorrectas

Porcentajes		Con.		
P.C.	Inc.	D.	M.	Descripción
				7. Operaciones con números mixtos
	74,7%		✓	No saben operar con números mixtos
	12,8%			En blanco o no llegaron a abordar la pregunta
				8. Algoritmos de la resta
	21,9%		✓	No reconocen los algoritmos de la resta que están basados en recorrer el camino de un número a otro.
	19,8%		✓	No reconocen los algoritmos que utilizan la propiedad de sumar o restar el mismo número al minuendo y al sustraendo
	23,2%		✓	No reconocen los algoritmo de la resta en el que se recorre el camino del sustraendo al minuendo
	4,5%			En blanco o no llegaron a abordar la pregunta

Nota: Con. = conocimiento; P.C. = parcialmente correctas; Inc. = incorrectas; D. = didáctico; M. = matemático

Como ya he dicho, la tabla 17 complementa la tabla 16. A continuación, me centro en la descripción de los conocimientos parciales de los futuros profesores españoles que no respondieron correctamente las preguntas a partir de los datos contenidos en esta tabla.

La descripción del conocimiento parcial de los futuros profesores españoles es más fácil en las preguntas de respuesta abierta, puesto que estas preguntas permiten a los encuestados elaborar una respuesta, demostrando así la profundidad de su conocimiento de las matemáticas escolares y de su enseñanza. Este no es el caso para las preguntas de respuesta de opción múltiple y opción múltiple compleja. Con estas preguntas, es posible evaluar cualquiera de los dominios de conocimiento. No obstante, estas preguntas no permiten que los participantes ofrezcan una interpretación detallada de las situaciones y pongan en evidencia sus conocimientos para enseñar matemáticas. Abordo el análisis de la tabla 17 en dos partes, diferenciando las preguntas que tienen respuestas parcialmente correctas de las que no las tienen.

Preguntas con respuestas parcialmente correctas

Las preguntas 1, 3 y 4 tienen respuestas parcialmente correctas. En la tabla 17 identifico los conocimientos parciales que dan lugar a estas respuestas.

Destaca el hecho de que solamente un 1,2% de los futuros profesores españoles respondió incorrectamente la pregunta sobre problemas aritméticos. La mayoría (15,5%) de aquellos futuros profesores que respondió de manera parcialmente correcta a esta pregunta puso de manifiesto que no es capaz de reconocer la dificultad inherente de la multiplicación en ese tipo de problemas para los alumnos de primero de primaria.

Solamente un 7,7% de los futuros profesores respondió de manera parcialmente correcta a la pregunta sobre operaciones con decimales. De ellos, la mayoría (7%) puso de manifiesto que no es capaz de reconocer completamente el error en el que incurre el alumno. No obstante, destaca el alto porcentaje de futuros profesores que no es capaz de reconocer el error en el que incurre el alumno (35,5%) y el porcentaje de futuros profesores que contestó de forma ilegible o en blanco o no llegó a abordar la pregunta.

Los futuros profesores españoles pusieron de manifiesto carencias importantes en su conocimiento didáctico sobre la representación de los números decimales y su aplicación en la enseñanza. La mayoría de ellos (65,3%) produjo respuestas en blanco o ilegibles, o no llegó a abordar la pregunta. Del resto de futuros profesores que no respondió correctamente la pregunta, destacan aquellos (17,4%) que contestan de forma parcialmente correcta al poner de manifiesto que conocen la representación gráfica de los números decimales pero no la del producto de un número entero por un número decimal o bien utilizan otro tipo de representación para explicar el producto de decimales.

Preguntas sin respuesta parcialmente correctas

Organizo las preguntas que tienen únicamente respuesta incorrecta en dos grupos: aquellas en las que los futuros profesores españoles pusieron de manifiesto sus carencias en el conocimiento matemático necesario para responder la pregunta y aquellas en las que se aprecian deficiencias en el conocimiento didáctico de los futuros profesores.

Destaca el hecho de que los futuros profesores españoles no respondieran correctamente 3 de las 8 preguntas analizadas porque carecían del conocimiento matemático necesario para ello. Este resultado pone de manifiesto deficiencias en el conocimiento matemático de los futuros profesores. No obstante, también sugiere que el diseño de estas preguntas no permitía profundizar en las características de su conocimiento didáctico. Si incluimos los porcentajes de respuestas en blanco o ilegibles o que no fueron abordadas por los futuros profesores, encontramos que hay tres temas del subdominio de números en los que los futuros profesores españoles ponen de manifiesto carencias en su conocimiento matemático: (a) el 87,5% de ellos parece no saber operar con números mixtos; (b) el 69,4% de ellos no tiene un conocimiento adecuado de los algoritmos de la resta o al menos de las propiedades de la sustracción que permiten reconocer si una determinada estrategia es un algoritmo o no; y (c) el 66,7% de ellos solo sabe ordenar fracciones reduciendo a común denominador —independientemente de que se trate de fracciones sencillas con igual numerador— o reconoce como ciertas afirmaciones sobre las fracciones que no se pueden generalizar.

Podemos caracterizar el conocimiento didáctico parcial de los futuros profesores españoles para las dos preguntas restantes. Es el caso, por un lado, del 20,8% de los futuros profesores que es capaz de reconocer los problemas de proporcionalidad directa entre magnitudes, pero no puede identificar en ellos las variables que afectan su dificultad o proponer problemas más fáciles para alumnos de primaria. Por otro lado, el 60,8% de los futuros profesores no es capaz de utilizar la representación gráfica de la división de fracciones como aplicación a la enseñanza puesto que manifiesta no conocer los modelos de fracciones, el significado de fracción como partes de un todo, o el significado de la operación división de fracciones.

CONCLUSIONES

En este capítulo, comenzaré haciendo un resumen del trabajo realizado y de las conclusiones a las que he llegado sobre el conocimiento didáctico concreto de los futuros profesores en el subdominio de números. A continuación, señalaré algunas carencias o limitaciones que he encontrado en el estudio TEDS-M al analizar en detalle las preguntas de este subdominio y que pueden servir de orientación en el diseño de futuros estudios. Concluiré el capítulo mencionando algunas vías de investigación que quedan abiertas con motivo de este trabajo.

El propósito de este trabajo era estudiar el conocimiento didáctico en el subdominio de números que manifestaron los futuros profesores españoles en el estudio TEDS-M. Para ello, (a) clasifiqué las 8 preguntas que se refieren a ese conocimiento dentro del cuestionario de acuerdo con diversos criterios; (b) diseñé un esquema metodológico que se basó en el análisis conceptual de los enunciados de las preguntas, de sus guías de corrección y de la codificación de las respuestas; y, (c) con base en esos análisis, formulé conjeturas acerca del conocimiento que los futuros profesores españoles manifestaron en el estudio.

Los resultados obtenidos me permiten caracterizar el conocimiento didáctico manifestado por los futuros profesores españoles en el estudio TEDS-M de la siguiente manera. Ellos (a) son capaces de reconocer las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos que se resuelven con una sola operación y de los problemas de proporcionalidad directa; (b) carecen del conocimiento matemático suficiente para operar con números mixtos, reconocer distintos algoritmos de la resta y para ordenar fracciones con igual numerador sin reducir a común denominador, hecho que les impide abordar cuestiones didácticas relacionadas con estos temas; y (c) manifiestan deficiencias importantes en su capacidad didáctica para diagnosticar las concepciones erróneas o los errores en los que incurren los alumnos —en operaciones con números mixtos y decimales—, para representar gráficamente los conceptos y procedimientos matemáticos como instrumento útil para su aplicación en la enseñanza y en el aprendizaje —en operaciones con números decimales y en el significado de la división de fracciones—, y para reflexionar sobre el contenido de las matemáticas escolares y su aplicación a la enseñanza —al ordenar fracciones y al analizar los algoritmos de la resta—.

De esta forma, considero que he logrado el objetivo general y los objetivos específicos que me propuse para esta investigación.

ANÁLISIS CRÍTICO DEL CUESTIONARIO TEDS-M PARA EL SUBDOMINIO DE NÚMEROS

Aunque en este estudio me he limitado a estudiar los resultados que se obtuvieron con los instrumentos tal y como se aplicaron en el estudio TEDS-M, el análisis pormenorizado de las preguntas y de las guías de corrección da lugar a establecer carencias y limitaciones en el diseño del cuestionario y las guías de corrección. En el análisis de cada pregunta, he incluido indicaciones y sugerencias para la mejora de la pregunta y de su guía de corrección. No obstante, haré a continuación una relación de las cuestiones más relevantes como posible contribución al diseño de futuros estudios de este tipo.

El análisis conceptual de las preguntas que he hecho pone de manifiesto la dificultad de establecer el conocimiento didáctico de un futuro profesor independientemente de su conocimiento matemático. He mostrado que, para responder correctamente a la mayoría de las preguntas analizadas, se requiere tanto conocimiento matemático, como conocimiento didáctico. Por esta razón, se plantea la duda de si algunos futuros profesores, teniendo el conocimiento didáctico requerido, no pudieron responder correctamente algunas preguntas como consecuencia de carencias en su conocimiento matemático. Esto confirmaría los estudios realizados por Schilling, Blunk, y Hill (2007) y Krauss et al. (2008) que afirman que, si bien es posible distinguir entre contenido matemático y contenido didáctico matemático, los dos están altamente correlacionados. Blömeke, Houang y Suhl (2011) estudian el reto de determinar el modelo apropiado que define la relación entre estos dos rasgos latentes y cuya hipótesis básica es que la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) puede conducir a una valiosa información adicional que da una visión de diagnóstico en la composición de los conocimientos del futuro profesor. Esto se demostraría mediante el estudio TEDS-M que utiliza esta teoría. Señalan cómo TEDS-M utiliza el modelo que destaca la diferencia conceptual entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico matemático, lo que significa que estas dos formas de conocimiento son considerados como dimensiones separadas, evaluando independientemente el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico.

Como es natural en los estudios que —como este— incluyen una proporción importante de preguntas con respuestas múltiples o múltiples complejas, resulta difícil contrastar las conjeturas que he formulado sobre el conocimiento manifestado por los futuros profesores españoles, dado que no dispuse de datos adicionales para analizar si sus respuestas eran realmente indicadores del conocimiento que la pregunta pretendía evaluar. Tan sólo he dispuesto de los datos sobre respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas, sin tener acceso a los argumentos que hubieran dado los encuestados en la elección de su respuesta. Este no es el caso de la mayoría de las preguntas de respuesta abierta donde es posible profundizar en el conocimiento del futuro profesor.

El enunciado de las preguntas genera otra dificultad a la hora de clasificar su contenido didáctico. TEDS-M afirma que se hace una diferenciación temporal entre la planificación de la enseñanza y la implementación de la enseñanza. No obstante, TEDS-M juega con la redacción del enunciado a la hora de hacer esta distinción. Las preguntas son clasificadas de manera diferente con el solo hecho de decir "di qué idea matemática está queriendo mostrar un profesor al planificar una actividad …" o bien "di cuál es la concepción matemática de los alumnos en las distintas respuestas a esta tarea". En realidad, las dos preguntas pueden requerir el mismo conocimiento, pero TEDS-M las ubica antes y después del proceso de enseñanza y las clasifica en diferentes categorías —planificación e implementación—. Por ello, en la clasificación que he hecho de las preguntas he considerado este conocimiento didáctico como "conocimiento del contenido de las matemáticas escolares desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje".

A la hora de determinar los conocimientos que han de ponerse en juego para contestar de forma correcta las preguntas de respuesta abierta, se hace necesario estudiar las guías de corrección. Estas guías establecen, a través de ejemplos, la intencionalidad de cada pregunta con respecto al conocimiento del futuro profesor. Así, en algunos casos, dar solución a una pregunta supone asumir un marco determinado sobre el aprendizaje. Es, por ejemplo, el caso de la pregunta 1 que supone asumir una determinada teoría del aprendizaje de la aritmética. En otros casos, como puede ser la pregunta 4, no se menciona en el enunciado la necesidad de mostrar que $0,5 \times 2 = 1$, pero, después en la guía de corrección, se hace énfasis en la necesidad de que el futuro profesor muestre este hecho.

La pregunta 5 es la única que tiene respuesta múltiple compleja dentro del subdominio que estudié. Este tipo de pregunta genera dificultades de interpretación porque no hay información suficiente para comprobar que los futuros profesores que contestan correctamente en una de las opciones lo hayan hecho de forma incorrecta en el resto de las opciones. Por consiguiente, no es posible describir con exactitud los conocimientos manifestados por los futuros profesores.

Una de las dificultades con la que me he encontrado al realizar la interpretación de los resultados ha sido la descripción del conocimiento parcial del conocimiento didáctico de los futuros profesores. Mientras que no resulta difícil establecer el conocimiento matemático parcial que los futuros profesores manifiestan en sus respuestas, este no es el caso con el conocimiento didáctico. Se requiere más investigación que proporcione información sobre esto y formaría parte de otra investigación el estudiar cómo se puede medir el conocimiento parcial en Didáctica de las Matemáticas.

VÍAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS

Este trabajo, como estudio secundario de los resultados del estudio TEDS-M, contribuye a uno de los objetivos de TEDS-M: profundizar en los conocimientos de los futuros profesores en uno de los tipos de conocimiento estudiados —el conocimiento didáctico— y en uno de sus subdominios —números—.

Este estudio puede ampliarse en al menos dos sentidos. Por un lado, el método que he diseñado se puede usar para caracterizar el conocimiento didáctico de los futuros profesores españoles en los otros subdominios —geometría y medida, álgebra y funciones, datos y azar—. De esta forma, sería posible describir y caracterizar el conocimiento en Didáctica de la Matemática manifestado por los futuros profesores españoles. Por otro lado, es posible utilizar el método para establecer el conocimiento didáctico manifestado en un subdominio por los futuros profesores de los otros países participantes en TEDS-M y realizar las comparaciones internacionales correspondientes.

Aunque este estudio se centra en el conocimiento didáctico manifestado por los futuros profesores españoles que seguían el programa de formación previo a la implementación del Espacio Europeo de Educación Superior, sus resultados pueden ser de utilidad en el proceso que actualmente se está realizando para diseñar e implementar las nuevas asignaturas de la titulación de maestro de primaria. Este estudio destaca carencias en el conocimiento didáctico de los futuros profesores españoles que es necesario abordar en los nuevos programas. Por ello, la ampliación de este estudio al conjunto de subdominios de conocimiento didáctico que propone TEDS-M puede proporcionar información de interés sobre el conocimiento didáctico concreto en el que es necesario incidir en los nuevos programas.

Como se ha visto, la principal dificultad que encontré a la hora de realizar la interpretación de los resultados fue la de describir el conocimiento didáctico de los futuros profesores a partir de la clasificación que hace TEDS-M de las preguntas. Por esa razón, produje una clasificación más fina concretando el conocimiento didáctico que se requería para contestar a cada una las preguntas analizadas y que establecí en cuatro acciones concretas. Formaría parte de otra investigación comprobar si estas cuatro acciones son válidas para los demás subdominios y establecer otras acciones concretas que pueden evaluarse en esos subdominios.

Por último, el análisis crítico del cuestionario TEDS-M proporciona sugerencias para el diseño de futuros estudios sobre el conocimiento didáctico de profesores en formación que se puedan llevar a cabo. Estas sugerencias se podrían resumir en: (a) la importancia de enunciar las preguntas de tal forma que se obtenga la máxima información en la respuesta; (b) guías de corrección que no añadan información requerida por parte del futuro profesor que no esté clara en el enunciado de la pregunta; (c) buscar que las respuestas a las preguntas permitan evaluar qué conocimiento matemático o didáctico concreto se está poniendo en juego; y (d) que se pueda determinar el conocimiento didáctico parcial de los futuros profesores.

AGRADECIMIENTOS

Quiero manifestar mi más sincero agradecimiento al Dr. D. Pedro Gómez por su dedicación y aliento gracias al cual he conseguido obtener un gran rendimiento del Máster.

También al Dr. D. Luis Rico por su confianza y orientación al animarme a elegir el estudio TEDS-M como tema de investigación tutelada, que tanto me ha aportado en mi primera aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática.

De igual forma a todos los profesores del Máster y a los compañeros por la calidad humana de la que he podido disfrutar durante este año.

Y en particular a mi familia, por su continuo apoyo y buen humor con el que siempre me acompañan.

REFERENCIAS

Ball, D. L. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83-104). Westport: Ablex.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., . . . Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133-180.

Blömeke, S., Kaiser, G. y Lehmann, R. (2010). TEDS-M 2008. Munich: Waxmann Verlag.

Blömeke, S., Houang, R., y Suhl, U. (2011). TEDS-M: Diagnosing teacher knowledge by applying multidimensional item response theory and multiple-group models. *IERI Monograph Series: Issues and Methodologies in Large-Scale Assessments, Volume 4.*

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal For Research in Mathematics Education, 15*(3), 179-202.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal For Research in Mathematics Education, 15*(3), 179-202.

Castro, E., Rico, L. y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las ciencias*, *10*(3), 243-253.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.

Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro (Ed.) *Didáctica de la Matemática en la educación primaria* (pp. 315-345). Madrid: Síntesis.

Castro, E., (Ed.), (2001). *Didáctica de la Matemática en la educación primaria*. Madrid, Síntesis.

Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 285-314). Madrid: Síntesis

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M.; Blanco, L. (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Fernández, F. (2001). Proporcionalidad entre magnitudes. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 533-558). Madrid: Síntesis.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo.* Madrid, Síntesis.

Gómez, P. (2007). *TEDS-M: Teacher Education Study in Mathematics. Estudio Internacional sobre la Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas*. Trabajo presentado en XI Simposio de la SEIEM, Tenerife.

Hill, H., Schilling, S. y Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematical knowledge for teaching. *Elementary School Journal, 105*(1), 11–30.

Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., y Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology, 100*(3), 716–725.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Maza, C. (2001). Adición y sustracción. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la educación primaria* (pp. 177-202). Madrid: Síntesis.

Monk, D. H. (1994). Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and student achievement. *Economics of Education Review, 13,* 125–145.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, C. (2009). Estudio TEDS-M: estudio internacional sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 425-434). Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en educación primaria* (pp. 231-255). Madrid: Síntesis.

Schilling, S., Blunk, M., y Hill, H. (2007). Test validation and the MKT measures: Generalizations and conclusions. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives, 5*(2–3), 118–127.

Schmidt, W., Tatto, M., Bankov, K., Blˆmeke, S., Cedillo, T., Cogan, L., . . . Hsieh, F. (2007). *The preparation gap: Teacher education for middle school mathematics in six countries.* East Lansing: Michigan State University.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study In Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Tatto, M. T., Lerman, S., y Novotna, J. (2009). Overview of teacher education systems across the world. In R. Even y D. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 15-23). Dordrecht: Springer.

Tatto, M. T., Sharon, J. S., Senk, L., Ingvarson, L. y Rowley, G. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M).* Amsterdam, The Netherlands: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

ANEXO

En este anexo incluyo el análisis detallado de cada una de las preguntas de contenido didáctico correspondientes al subdominio de números junto con los resultados de los futuros profesores españoles para cada una de las preguntas, así como la interpretación de estos resultados.

Enumero a continuación las preguntas:

Pregunta 1: Problemas aritméticos de una sola operación

Pregunta 2: Proporcionalidad directa

Pregunta 3: Números decimales

Pregunta 4: Representación de números decimales

Pregunta 5: Ordenar fracciones

Pregunta 6: Significado gráfico de la división de fracciones

Pregunta 7: Números mixtos

Pregunta 8: Algoritmos de la resta

PREGUNTA 1. PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE UNA SOLA OPERACIÓN

La figura 1 presenta el texto de esta pregunta, tal y como aparece en el cuestionario de los futuros profesores.

Una profesora de 1º de primaria pide a sus alumnos que resuelvan los cuatro problemas contextualizados siguientes, de la forma que ellos quieran, incluso usando materiales si lo desean.

Problema 1: José tiene 3 paquetes de pegatinas. Hay 6 pegatinas en cada paquete. ¿Cuántas pegatinas tiene José en total?

Problema 2: Jorge tenía 5 peces en su pecera. Le dieron 7 más en su cumpleaños. ¿Cuántos peces tenía después?

Problema 3: Juan tenía algunos coches de juguete. Perdió 7 coches de juguete. Ahora le quedan 4. ¿Cuántos coches de juguete tenía Juan antes de perder ninguno?

Problema 4: María tenía 13 globos. 5 de ellos se le reventaron. ¿Cuántos globos le quedaron?

La profesora se percata de que dos de los problemas son más difíciles para sus alumnos que los otros dos.

Identifique los DOS problemas que presumiblemente son más DIFÍCILES de resolver para alumnos de 1º de primaria.

Problema_____ y Problema______

Figura 1. Pregunta sobre problemas aritméticos

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre el grado de dificultad en la resolución de problemas verbales, donde entran en juego las operaciones aritméticas de adición, sustracción y multiplicación. TEDS-M clasifica esta pregunta dentro del dominio de currículo y la considera de nivel avanzado; es de respuesta abierta y tiene guía de corrección para clasificar las posibles respuestas.

Dar solución a esta pregunta supone asumir un marco determinado sobre el aprendizaje de la aritmética. El aislamiento de determinantes clave de la dificultad de los problemas ha sido tema de investigación en resolución de problemas a nivel internacional (Castro, 2008). Me baso en la clasificación de las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos propuesta por Castro, Rico y Castro (1995). Estas variables no agotan todas las posibles variables que se pueden tener en cuenta a la hora de determinar la dificultad de un problema. No obstante, considero que son suficientes para determinar los dos problemas que presentan mayor dificultad. También me baso en Castro (2001); Castro, Rico y Gil (1992), y Puig y Cerdán (1988**)** para el análisis de los tipos de problemas de estructura aditiva y multiplicativa.

Analizo cada uno de los cuatro problemas que se presentan en la pregunta de acuerdo con las siguientes variables: (a) estructura, (b) estructura semántica, (c) tamaño de los datos, (d) contexto de la información, (e) orden de los datos, (f) existencia de datos superfluos, (g) posición de la pregunta; (h) tipo de sentencia e (i) si se puede resolver o no el problema con ayuda de recursos auxiliares.

En los cuatro problemas, el sentido de la pregunta se integra de modo coherente en el contexto informativo y en todos intervienen números naturales, por ello no consideraré estos elementos como diferenciadores de la dificultad de los problemas.

La tabla 5 presenta el resultado del análisis de los cuatro problemas según las variables establecidas.

Tabla 5
Análisis de los problemas según tipo de variables

Tipos de variables	Problemas 1	2	3	4
Estructura	Multiplicativa	Aditiva	Aditiva	Aditiva
Estructura semántica	Proporcionalidad Simple	Cambio aumentado	Cambio disminuyendo con comienzo desconocido	Cambio disminuyendo
Tamaño de los datos	Pequeños	Datos pequeños	Pequeños	Datos grandes (13>10)
Contexto de la información	Cercano al alumno	Cercano al alumno	Cercano al alumno	Cercano al alumno
Orden de los datos	Ordenados	Ordenados	Ordenados	Ordenados
Existencia de datos superfluos	No existen	No existen	No existen	No existen

Tabla 5

Análisis de los problemas según tipo de variables

Tipos de variables	Problemas 1	2	3	4
Posición de la pregunta	Al final del problema	Al final del problema	Al final del problema	Al final del problema
Tipo de sentencia	a x b = ? a+a+a+…=?	a + b = ?	? - a = b	a - b = ?
Recursos auxiliares	Sí	Sí	No es posible realizar un modelado directo de los momentos planteados en el problema	Sí

A continuación profundizo en el análisis de cada problema, según el orden en el que aparecen en el currículo de primaria español.

Problema 2

> *Jorge tenía 5 peces en su pecera. Le dieron 7 más en su cumpleaños. ¿Cuántos peces tenía después?*

Maza (2001) afirma que incluso los niños de cuatro o cinco años se han podido enfrentar a este tipo de problemas en su experiencia fuera de la escuela, a pesar de no haber aprendido aún la operación aritmética de la adición, y pueden llegar a resolverlo utilizando cualquier estrategia informal. Además, la pregunta sugiere la posibilidad de usar materiales que facilitan la implementación de estas estrategias informales. Podemos concluir que este problema es el de menor dificultad para los alumnos de primero de primaria.

Problema 4

> *María tenía 13 globos, 5 de ellos se le reventaron. ¿Cuántos globos le quedaron?*

En este caso, se da la dificultad de que María tiene 13 globos, número mayor que el número de dedos de las manos. Para facilitar la resolución, se da la posibilidad de utilizar recursos auxiliares. No obstante, sería necesario el dominio del conteo regresivo de números o del manejo de la operación de la sustracción para resolverlo (Maza, 2001). Por consiguiente, valoro que este problema es más difícil que el problema 2, de cambio aumentado.

Problema 3

> *Juan tenía algunos coches de juguete. Perdió 7 coches de juguete. Ahora le quedan 4. ¿Cuántos coches de juguete tenía Juan antes de perder ninguno?*

El análisis de la tabla 5 lleva a concluir que este problema es más difícil que los dos anteriores. La estructura semántica del problema es de cambio disminuyendo con comienzo desconocido, por ello su formulación lingüística puede inducir a pensar que el problema se resuelve mediante una sustracción. Calcular el dato desconocido en la proposición ($?-b=c$) es significativamente más difícil que en el resto de proposiciones en que interviene la sustracción (Carpenter y Moser, 1984).

Como aparece en la tabla 5, preciso que este problema no se puede resolver mediante un modelado directo de los momentos planteados en el problema (Maza, 2001). No considero, por tanto, que las distintas estrategias de ensayo y error que puedan llevarse a cabo con materiales auxiliares para resolver el problema sean un modelado directo de los momentos planteados en el problema.

Problema 1

> *José tiene 3 paquetes de pegatinas. Hay 6 pegatinas en cada paquete. ¿Cuántas pegatinas tiene José en total?*

Este problema presenta una situación de proporcionalidad simple que se resuelve mediante la multiplicación. Es un problema simple de estructura multiplicativa (Castro, 2001). Se trata de un contexto en el que hay que reiterar una cantidad un número de veces; es decir, se requiere de una adición repetida.

Hay que tener en cuenta que es posible utilizar materiales por parte de los escolares para la resolución del problema. Podrían resolverlo mediante la unión repetida de tres conjuntos de 6 unidades cada uno, quizás de forma más intuitiva que el problema de cambio disminuyendo con comienzo desconocido (problema 3). Este contexto es familiar a los niños y es el primero que se trata en el currículo escolar para introducir la multiplicación. No obstante, tradicionalmente la multiplicación y la división han sido consideradas como más difíciles de aprender que la adición y sustracción, aconsejándose que la multiplicación no sea introducida hasta que los alumnos dominen la adición (Castro, 2001). Por estas razones, considero que el problema 1 es más difícil que los problemas 2 y 4.

Tipos de respuestas y guía de corrección

La guía de corrección establece 4 tipos de respuestas que resumo en la tabla 6.

Tabla 6
Tipos de respuesta en la guía de corrección

Tipo de respuesta	Problemas
Correcta	Los problemas 1 y 3 son los más difíciles
Parcialmente correcta	Sólo el 1 correcto (con o sin los problemas 2 y 4) Sólo el 3 correcto (con o sin los problemas 2 y 4)
Incorrecto	Como mínimo un problema seleccionado pero ni el 1 ni el 3 O ilegible
En blanco	

Me baso en los análisis del apartado anterior para interpretar estos tipos de respuesta.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas correctas

Se puede afirmar que los futuros profesores que contestan correctamente a esta pregunta:

- son capaces de identificar las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos de la pregunta;
- conocen el currículo de primero de educación primaria; y serían capaces de establecer objetivos de aprendizaje adecuados para los alumnos de este curso;
- han hecho una adecuada lectura del problema atendiendo a todas sus premisas.

Puede haber otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente. No tengo en cuenta estos motivos en el análisis.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas parcialmente correctas

La guía de corrección agrupa en un solo código diferentes respuestas de los futuros profesores que han contestado de manera parcialmente correcta (ver tabla 6). En todo caso, me he interesado por estudiar qué conocimientos han manifestado estos futuros profesores, en qué errores han podido incurrir, y cómo podemos interpretar sus respuestas. En este sentido, formulo conjeturas sobre los conocimientos manifestados por los futuros profesores cuya respuesta incluye uno de los dos problemas más difíciles, pero no los dos. Presento estas conjeturas en la tabla 7.

Tabla 7
Conjeturas sobre los conocimientos manifestados en las respuestas parcialmente correctas

Respuesta	Conocimientos	Otras razones
3 y 4	▤ Identificar la dificultad de la posición de la incógnita y ▤ Percibir la dificultad de los números mayores de 10 ⊙ No reconocer la dificultad de la multiplicación o valorar positivamente el uso de materiales auxiliares	Azar No abordar los problemas desde la perspectiva de los escolares Lectura incorrecta de la pregunta
3 y 2	⊙ No reconocer los problemas de cambio aumentado como más fáciles	
Sólo 3	⊙ No distinguir las variables que afectan a la dificultad de los otros problemas	
1 y 4	▤ Reconocer la dificultad de la multiplicación para 1º de primaria ▤ Percibir los números mayores de 10 como una dificultad para los alumnos ⊙ No reconocer la dificultad de la posición de la incógnita en un problema ⊙ No valorar positivamente el uso de materiales	Azar No abordar los problemas desde la perspectiva de los escolares Lectura incorrecta de la pregunta
1y 2	⊙ Considerar la adición como más difícil	
Sólo 1	⊙ No distinguir las variables que afectan a la dificultad de los otros problemas	

La tabla 7 pone de manifiesto la multiplicidad de posibilidades acerca del conocimiento que los futuros profesores pudieron poner en juego al responder de manera parcialmente correcta a la pregunta. Estos profesores reconocen la dificultad ya sea de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido y de la multiplicación, pero no simultáneamente, al mismo tiempo que pueden poner en juego otros conocimientos (parciales) que los llevan a escoger otro problema como más difícil. Con base en estos análisis interpreto los resultados de los futuros profesores españoles.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 8 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en un resumen de los análisis anteriores. En la caracterización de los conocimientos que se ponen en juego al responder de manera parcialmente correcta, incluyo en la tabla 8 únicamente aquellos que necesariamente deben activar para dar esa respuesta. Esos conocimientos se pueden matizar con las conjeturas adicionales que he presentado en la tabla 7. En la primera columna de la tabla 8 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 8
Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 1

%	Respuesta	Conocimientos
80,4%	Correcta	▤ Identifican las de las variables que afectan a la dificultad de estos problemas ▤ Conocimiento del currículo de 1º de primaria para poder establecer objetivos de aprendizaje adecuados ▤ Valoran positivamente el efecto facilitador del uso de materiales en la ejecución de los problemas. ▤ Adecuada lectura del problema
15,5%	P. Correcta 3 y otro	▤ Reconocen la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido y ⊙ no reconocen la dificultad de la multiplicación
2,9%	P. Correcta 1 y otro	▤ Reconocen la dificultad de la multiplicación para primero de primaria y ⊙ no reconocen la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido

Tabla 8
Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 1

%	Respuesta	Conocimientos
0,7%	Incorrecta	⦿ No distinguen las variables que afectan a la dificultad de los problemas
0,5%	Ilegibles o en blanco	
0%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados

Estos resultados muestran que una proporción importante de los futuros profesores españoles son capaces de distinguir las variables que afectan a la dificultad de los problemas: un 80,4% es capaz de distinguir los elementos que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos que se resuelven con una sola operación, de tal forma que está en condiciones de proponer a los alumnos de primero de primaria objetivos de aprendizaje adecuados. Entre aquellos que responden de manera parcialmente correcta, destaca la diferencia en porcentaje entre los que reconocen la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido, pero no reconocen la dificultad de la multiplicación, y aquellos que reconocen la dificultad del problema de estructura multiplicativa, pero no reconocen la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo aumentado.

PREGUNTA 2. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

La figura 2 presenta la formulación de esta pregunta.

> “Una máquina consume 2,4 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas si sigue consumiendo combustible al mismo ritmo?”
>
> Formule un problema diferente, del mismo tipo que el problema propuesto (los mismos procesos/operaciones) que sea MÁS FÁCIL de resolver para los alumnos de primaria.

Figura 2. Pregunta sobre proporcionalidad directa

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre la proporcionalidad directa entre magnitudes. TEDS-M la clasifica dentro del dominio de planificación de la enseñanza y la considera de nivel intermedio; es de respuesta abierta y tiene guía de corrección para clasificar las posibles respuestas. Se plantea que el futuro profesor idee un problema para alumnos de primaria del mismo tipo que el propuesto (mismos procesos/operaciones) y que sea más fácil. El problema que se propone es un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes.

En primer lugar, el futuro profesor debe saber qué procesos/operaciones son necesarios para resolver correctamente el problema propuesto y poder plantear así uno más fácil. Debe tener el conocimiento matemático suficiente para reconocer que se trata de un problema de proporcionalidad donde hay que averiguar una cantidad desconocida que forma proporción con otras tres magnitudes conocidas directamente proporcionales; es decir, reconocer que se trata de un problema de proporcionalidad directa. Este problema puede considerarse también como un típico problema de "regla de tres simple directa". En segundo lugar, para poder plantear un problema más fácil, el futuro profesor debe conocer las variables que afectan a la dificultad de este tipo de problemas. A partir de la revisión de la literatura, he identificado las siguientes variables:

Tipo de números. La dificultad del problema depende del tipo de números implicados en el problema. En particular, se considera que los problemas que incluyen únicamente números enteros son más fáciles. El tamaño de los números también puede influir en la dificultad del problema.

Relación entre las cantidades. Son más fáciles aquellos problemas en los que la relación entre las cantidades está vinculada a la mitad o al doble, así como aquellos problemas donde se puede hallar fácilmente el valor correspondiente a la unidad y a partir de él hallar el valor desconocido.

Contexto. Se considera que los problemas cuyo contexto es cercano al entorno escolar son más fáciles.

Conceptos adicionales que intervienen en el problema. Sería el caso de que en el problema aparezcan, por ejemplo, diferentes unidades de medida, lo cual aumentaría la dificultad del problema.

Tipos de respuesta y guía de corrección

La guía de corrección establece 4 tipos de respuestas que presento en la tabla 18.

Tabla 18

Tipos de respuestas y ejemplos en la guía de corrección

Correcta
Un problema diferente del mismo tipo (mismos procesos/operaciones) pero más fácil de resolver. *Ejemplos* Una máquina consume 3 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas? Un coche consume 2,4 litros de combustible cada 50 km. ¿Cuántos litros de combustible consumirá el coche en 100 km?
Incorrecta
Un problema diferente del mismo tipo (mismos procesos/operaciones) pero no tan fácil de resolver. *Ejemplos* Una máquina consume 2 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas? (2 no es divisible por 3) Un grifo gotea 2 litros de agua al día. ¿Cuántos ml gotea por segundo? (el conocimiento métrico y computacional requerido es significativamente más alto; en este caso los datos se presentan en diferentes unidades de medida)
Otras incorrectas
Incluye soluciones tachadas, borradas, ilegibles, etc. *Ejemplo* Cuestiones que no sean significativas o que no tenga respuesta
En blanco

Me baso en los análisis del apartado anterior para interpretar estos tipos de respuesta.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas correctas

Se consideran correctas aquellas formulaciones de problemas en las que se utilicen los mismos procesos u operaciones que en el propuesto pero que sean más fáciles de resolver. Se consideran más fáciles aquellos problemas donde, por una parte no aparecen números decimales en el enunciado, o si aparecen el problema se puede resolver sencillamente gracias a que la relación entre las cantidades está vinculada a la mitad o al doble, o bien se puede encontrar fácilmente el valor correspondiente a la unidad y a partir de él hallar el valor desconocido. Se puede afirmar que los futuros profesores que contestan correctamente a esta pregunta:

- reconocen que se trata de un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes, en el que hay que averiguar una cantidad desconocida que forma proporción con otras tres cantidades conocidas directamente proporcionales;
- tienen el conocimiento didáctico suficiente para identificar las variables que afectan a la dificultad del problema: tipos de números, relación entre las cantidades, contexto y conceptos adicionales (como las unidades de medida) que pueden intervenir en el problema.

Parece difícil que en este problema haya otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente. No tengo en cuenta estos motivos en el análisis.

Me parece importante añadir que tanto en el enunciado de la pregunta como en la guía de corrección no se hace distinción entre los distintos métodos con los que se pueden resolver los problemas de proporcionalidad directa. Pero es importante destacar, por su importancia en el tema de proporcionalidad que hay acuerdo entre los educadores en la necesidad de buscar métodos que favorezcan la resolución de las cuestiones de una forma más significativa que los puramente algorítmicos (Fernández, 2001). Por ello se recomienda la importancia de contemplar en el currículo de primaria situaciones problemáticas relacionadas con el pensamiento proporcional como son las relaciones multiplicativas de doble o mitad, así como favorecer el uso de la estrategia denominada “búsqueda del valor unitario”, es decir, la búsqueda del valor correspondiente a la unidad y a partir de él hallar el valor desconocido.

Tampoco se hace mención expresa ni en el enunciado de la pregunta ni en la guía de corrección a que los problemas propuestos por los futuros profesores no deban plantear situaciones irreales.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas incorrectas

Se consideran incorrectos aquellos problemas que aun siendo de proporcionalidad directa entre magnitudes y se resuelvan igual que el propuesto, sean más difíciles de resolver. En este caso los futuros profesores no habrían reconocido los elementos que afectan a la dificultad del problema: tipos de números, relación entre las cantidades, contexto y conceptos adicionales que intervienen en el mismo.

Es decir, los futuros profesores cuyas respuestas se pueden clasificar dentro de esta categoría tienen el conocimiento matemático suficiente para plantear un problema de proporción directa entre magnitudes pero no tienen el conocimiento didáctico suficiente para plantear un problema más fácil que el propuesto puesto que no reconocen en el problema los elementos de los que depende la dificultad del mismo.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas clasificadas como "otras incorrectas"

Se consideran también problemas incorrectos, aunque se clasifican de forma distinta a los anteriores, aquellos problemas que no sean significativos porque no se trabaje el concepto de proporcionalidad directa entre magnitudes o bien que no tengan respuesta. A los futuros profesores cuyas respuestas se puedan clasificar dentro de esta categoría les falta el conocimiento matemático necesario para reconocer el problema propuesto como un problema de proporcionalidad directa y plantear a continuación otro similar.

También entran dentro de esta categoría las respuestas ilegibles; no obstante no podemos hacer conjeturas sobre los conocimientos de los futuros profesores que han contestado de esta forma.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 10 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En la primera columna de la tabla 10 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—.

En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 10

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 2

%	Respuesta	Conocimientos
59%	Correcta	Reconocen el problema de proporcionalidad directa Identifican las variables que afectan a la dificultad del problema: tipos de números, relación entre las cantidades, contexto y conceptos adicionales que intervienen en el mismo Son capaces de plantear un problema más fácil
20,8%	Incorrecta	Reconocen el problema como un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes No identifican las variables que afectan a la dificultad del problema: tipos de números, relación entre las cantidades, contexto y conceptos adicionales que intervienen en el mismo No son capaces de plantear un problema más fácil de proporcionalidad directa que el propuesto Inadecuada lectura de la pregunta
11,4%	Otras incorrectas o Ilegibles	No reconocen que el problema es de proporcionalidad directa entre magnitudes o En el caso de las respuestas ilegibles: no es posible determinar qué conocimientos han puesto en juego
8,2%	En blanco	
0,6%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados

El que un 59% de los futuros profesores haya contestado correctamente a esta pregunta permite afirmar que en España se ha trabajado el concepto de la proporción directa entre magnitudes para primaria desde la Didáctica de la Matemática. La mayoría de los futuros profesores fue capaz de plantear un problema donde se trabaja el concepto de proporcionalidad directa más fácil que el propuesto para alumnos de primaria. Un 20,8% de futuros profesores tiene el conocimiento matemático suficiente como para plantear un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes pero le falta el conocimiento didáctico suficiente para plantear un problema más fácil que el propuesto para alumnos de primaria al no ser capaz de distinguir las variables que afectan a la dificultad del problema: tipos de números, relación entre las cantidades, contexto y conceptos adicionales que intervienen en el mismo.

Podemos afirmar que un 79,8% de futuros profesores tiene el conocimiento matemático suficiente para reconocer un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes y plantear uno similar. Sin embargo, faltan datos para poder hacer conjeturas acerca del 20,2% de futuros profesores que contestó en blanco, no llegó a abordar la pregunta o su respuesta se pueden clasificar dentro de la opción de "otras incorrectas". En principio, podemos afirmar que entre estos futuros profesores hay una cierta proporción que no tiene el conocimiento matemático suficiente para reconocer el problema de proporcionalidad directa entre magnitudes.

PREGUNTA 3. NÚMEROS DECIMALES

La figura 3 presenta la formulación de esta pregunta.

> [Jeremy] se da cuenta de que cuando introduce 0,2 x 6 en la calculadora el resultado es menor que 6, y que cuando introduce 6 : 0,2 tiene un resultado mayor que 6. Él está perplejo por esto, y le pide a su profesor ¡una nueva calculadora!
>
> ¿Cuál es la concepción errónea más probable [de Jeremy]?

Figura 3. Pregunta sobre números decimales

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En la pregunta de la figura 3 se estudia el conocimiento didáctico sobre la multiplicación y división con números decimales. TEDS-M la clasifica dentro del dominio de implementación de la enseñanza y la considera de nivel intermedio; es de respuesta abierta y tiene guía de corrección para clasificar las posibles respuestas. En esta pregunta, TEDS-M busca evaluar si los futuros profesores conocen una de las concepciones erróneas más frecuentes que tienen los alumnos de primaria sobre multiplicación y división con números decimales: pensar que el producto de dos números decimales tiene que dar siempre un número mayor que los propuestos o que la división de dos números decimales tiene que dar siempre como resultado un número menor que los dados. En el caso del problema propuesto, sería reconocer que el error que manifiesta el alumno es no reconocer que el producto de un número entero por un número decimal menor que 1 da como resultado un número menor que el número entero y que la división del mismo número entero por el número decimal menor que uno da como resultado un número mayor que el número entero.

Castro (2001) confirma el interés de este problema al afirmar que “de todos los errores de las operaciones con decimales más del 80% lo acaparan la multiplicación y la división” (p. 332), Este autor añade que esto se debe, en parte, a que los números naturales pueden ser un obstáculo para el aprendizaje de los decimales, ya que muchos niños suelen extender su conocimiento de los naturales y aplicarlo de manera equivocada a los decimales, predominando el conocimiento ya consolidado del número natural sobre el conocimiento en construcción de los decimales.

Tipos de respuestas y guía de corrección

La guía de corrección establece 4 tipos de respuestas que presento en la tabla 19.

Tabla 19

Tipos de respuestas y ejemplos en la guía de corrección

Correcta
Respuestas que sugieran que la concepción errónea es considerar que la multiplicación de números decimales siempre da un resultado mayor que los números propuestos y que la división siempre da un resultado menor que el dividendo. *Ejemplo*: El alumno piensa que cuando se multiplica, el resultado debería ser mayor y cuando se divide el resultado debería ser menor.
Parcialmente Correcta
Respuestas que sugieran que la concepción errónea es considerar que la multiplicación de números decimales siempre da un resultado mayor que los números propuestos <u>o</u> que la división siempre da un resultado menor que el dividendo <u>pero no ambos.</u> *Ejemplos:* El alumno piensa que cuando se multiplica, el resultado debería ser mayor que los números

Tabla 19

Tipos de respuestas y ejemplos en la guía de corrección

iniciales El alumno piensa que cuando se divide, el resultado debería ser menor que el dividendo
Otras parcialmente correctas
Respuestas que sugieren que el alumno considera 0,2 como un número entero. *Ejemplo:* El alumno piensa que está multiplicando y dividiendo por 2 en vez de por 0,2.
Respuestas Incorrectas
Respuestas relativas a la falta de comprensión de los números decimales, de la multiplicación/división o uso de la calculadora. *Ejemplos:* No entiende la multiplicación (o división) de números decimales No sabe usar la calculadora Falta de conocimiento en las operaciones matemáticas Mal uso de la coma
Otras incorrectas (incluyendo respuestas tachadas, ilegibles, etc.)
En blanco

Como podemos comprobar en la guía de corrección se habla de producto y división de números decimales en general, pero en ningún momento se hace referencia a que en el enunciado del problema se está multiplicando o dividiendo un número entero por un número decimal menor que uno.

Me baso en el análisis del apartado anterior para interpretar estos tipos de respuesta.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas correctas

Se puede afirmar que el futuro profesor que contesta correctamente a la pregunta:

- tiene el conocimiento matemático necesario para multiplicar y dividir números decimales correctamente;
- tiene el conocimiento didáctico necesario para reconocer la concepción errónea del alumno sobre el producto y división de números decimales: sabe que el producto de dos números decimales no tiene que dar siempre un resultado mayor que dichos

> números y que la división de números decimales no tiene que dar siempre un resultado menor que el dividendo; en el caso del problema propuesto esto se concreta en que el producto de un número entero por un número decimal menor que uno da como resultado un número menor que el número entero y que la división del mismo número entero por el número decimal menor que uno da como resultado un número mayor que el número entero.

Parece difícil que en este problema haya otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente. No tengo en cuenta estos motivos en el análisis.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas parcialmente correctas

Se consideran parcialmente correctas las respuestas de los futuros profesores que sólo reconocen el tipo de error bien en la multiplicación o bien en la división pero no en ambas.

Por tanto, en este caso los futuros profesores que contestan de forma parcialmente correcta tienen un conocimiento parcial bien matemático o bien didáctico que no estamos en condiciones de describir.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas "otras parcialmente correctas"

En esta categoría se clasificarían las respuestas de los futuros profesores que consideraran que el error en el que incurre el alumno es considerar que 0,2 es un número entero, esto es, que está multiplicando y dividiendo por 2.

Esta posible respuesta sería interesante en el sentido de que los futuros profesores que respondieran de esta forma tendrían cierto conocimiento didáctico sobre los números decimales y conocerían que uno de los errores frecuentes entre los alumnos de primaria es la falta de comprensión de la notación decimal, en este caso sería ignorar el 0 que hay antes de la coma (Castro, 2001).

En este caso manifestar que es este el error en el que incurre el alumno no tendría sentido que se considere puesto que al multiplicar 2 por 6 da un número mayor que 6 y al dividir 6 entre 2 da un número menor que 6 y Jeremy no tendría motivos para sorprenderse del resultado de la calculadora.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas incorrectas

Se consideran incorrectas aquellas respuestas en las que no se precisa el error en el que incurre el alumno de forma concreta o si se precisa no se hace de forma correcta. Así se considera incorrectas las afirmaciones del tipo: "el alumno no tiene conocimiento de las operaciones con números decimales", o "no sabe utilizar la calculadora", o "no domina el uso de la coma en números decimales" o "no sabe realizar operaciones matemáticas".

Teniendo en cuenta esto, podemos decir que los futuros profesores que contestan de esta forma: no reconocen el error en el que incurre el alumno, que es un error tipificado en la Didáctica de la Matemática (Castro, 2001).

No considero como opción el que los futuros profesores de matemáticas no sepan realizar la multiplicación y división que se propone en el enunciado.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 11 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En la primera columna de la tabla 11 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 11

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 3

%	Respuesta	Conocimientos
22,1%	Correcta	Conocen el tipo de error gracias a su conocimiento didáctico Reconocen el error en el que incurre el alumno
7%	Parcialmente Correcta	Conocimiento matemático y/o didáctico parcial: solo reconocen el tipo de error con números decimales bien en la multiplicación o bien en la división pero no en ambas
0,7%	Otras parcialmente correctas	Tienen cierto conocimiento didáctico sobre los números decimales y conocen que uno de los errores frecuentes entre los alumnos de primaria es la falta de comprensión

Tabla 11
Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 3

%	Respuesta	Conocimientos
		de la notación decimal, en este caso sería ignorar el 0 que hay antes de la coma
35,5%	Incorrectas	No reconocen el error en el que incurre el alumno, que es un error tipificado en la Didáctica de la Matemática
20%	Otras incorrectas	
14%	En blanco	
0,7%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles

Resulta preocupante que sólo un 22,1% de futuros profesores españoles haya contestado de forma correcta a esta pregunta. Esto significa que sólo un 22,1 % de los futuros profesores españoles conoce este tipo de error —tipificado en Didáctica de la Matemática— y ha sido capaz de percibir que el alumno ha podido incurrir en él. Por una parte, esto podría manifestar falta de conocimiento matemático para operar con números decimales. No obstante, considero que los futuros profesores están capacitados para poder realizar el producto y multiplicación que aparecen en el enunciado. Por tanto, aunque su estudio se incluye en los manuales de Didáctica de la Matemática, más del 70% de los futuros profesores españoles no es capaz reconocer el error en que incurre el alumno.

Solo un 7% de los futuros profesores contestan de forma parcialmente correcta. Es claro que si un futuro profesor percibe el error en la multiplicación, también lo debería percibir para la división o viceversa. Solo hay un 0,7% de futuros profesores cuya respuesta se pueda clasificar dentro de las “otras parcialmente correctas”. Este tanto por ciento, justo por ser tan bajo, confirma el bajo conocimiento en Didáctica de la Matemática que tienen los futuros profesores en el tema de los números decimales, ya que no han distinguido otro error habitual en alumnos de primaria cuando trabajan con números decimales cuya parte entera es 0. No obstante, como ya he indicado en el análisis de la guía de corrección, no es posible que el alumno esté incurriendo en este error. Es significativo que el 35,5% de futuros profesores responda de manera incorrecta. Estos futuros profesores no tienen el conocimiento didáctico necesario para reconocer un error que se estudia dentro de la Didáctica de la Matemática. Hay un 34,1% de futuros profesores que contesta en blanco o cuya respuesta se puede clasificar como “otras incorrectas”. Es también un tanto por ciento muy alto, aunque no podamos determinar concretamente cuál es el conocimiento manifestado.

PREGUNTA 4. REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

La figura 4 presenta la formulación de esta pregunta.

Haz una representación gráfica que el profesor podría usar como modelo para representar 0,2 x 6 y ayudar a Jeremy a entender la respuesta a la pregunta 3.

Figura 4. Pregunta sobre representación gráfica de números decimales

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En la pregunta de la figura 4 se estudia el conocimiento sobre representación gráfica de los números decimales en general y de la multiplicación con números decimales en particular. TEDS-M la clasifica dentro del dominio de implementación de la enseñanza y la considera de nivel avanzado; es de respuesta abierta y tiene guía de corrección para clasificar las posibles respuestas. En esta pregunta se le pide al futuro profesor que de manera gráfica represente el producto de $0,2 \times 6$ de tal forma que el alumno pueda comprender el error conceptual sobre la multiplicación con números decimales en el que ha incurrido en la pregunta 3.

Para analizar esta pregunta me baso en la clasificación de las representaciones gráficas de los números decimales que hace Castro (2001), así como en su concepción de modelización de los mismos. Al abordar esta pregunta, el futuro profesor debe saber que los números decimales proporcionan una ampliación del sistema decimal de numeración: con los números naturales se representan cantidades enteras; con los números decimales se expresan también las diferentes partes de la unidad. Por ello, contestar correctamente a esta pregunta implica que el futuro profesor:

1. Conoce el tipo de error gracias a su conocimiento didáctico del tema de los números decimales.
2. Reconoce y tipifica el error en el que incurre el alumno.
3. Sabe representar gráficamente el número decimal $0,2$, para ello puede:
   - ♦ conocer que los decimales pueden ser representados como sub-áreas de una región que se toma como unidad o
   - ♦ conocer que los decimales se pueden representar como puntos sobre un segmento: la recta numérica
4. Sabe representar $0,2\times 6$e identificar que $0,2\times 5$corresponde a la unidad.
5. Es capaz de utilizar las representaciones concretas mencionadas en el apartado 3 para apoyar el aprendizaje del estudiante como instrumento de aplicación en la enseñanza.

Podemos afirmar que, para abordar esta pregunta, no basta tener un conocimiento matemático de los números decimales y las operaciones con ellos. Es además necesario tener un conocimiento didáctico sobre la enseñanza de los números decimales, su representación gráfica, los errores más frecuentes en los que pueden incurrir los alumnos y la aplicación de las representaciones gráficas en la enseñanza.

Aunque esta pregunta está directamente relacionada con la anterior, TEDS-M la corrige de forma independiente. Ambas preguntas dan información del conocimiento de los futuros profesores sobre los números decimales pero cada una proporciona información sobre un aspecto concreto de este conocimiento didáctico. La pregunta 3 se refiere al conocimiento del futuro profesor en el dominio de uno de los errores más frecuentes en el que pueden incurrir los alumnos al trabajar con números decimales; y la pregunta 4 nos da información sobre la aplicación de las representaciones gráficas en la enseñanza de los números decimales por parte del futuro profesor.

Tipos de respuestas y guía de corrección

La guía de corrección establece 4 tipos de respuestas que presento en la tabla 20.

Tabla 20

Tipos de respuestas y ejemplos en la guía de corrección

Correcta

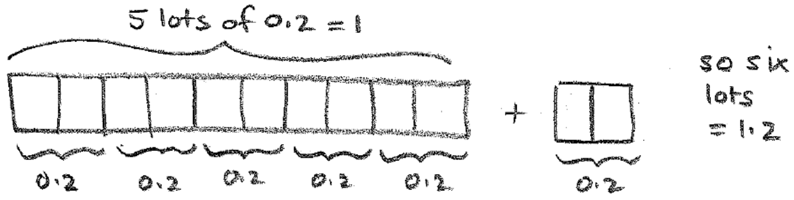
Una adecuada representación gráfica sería aquella que muestra claramente por qué 0,2 x 6 es 1,2.

Ejemplos:

6 sub-áreas de 0,2 de una región donde se vea claramente que 5 sub-áreas de 0,2 es igual a 1. Puede haber anotaciones adicionales.

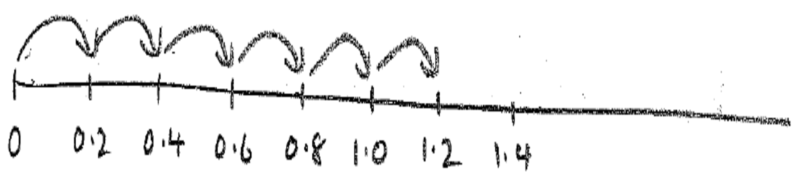
Como ejemplos pueden servir los dibujos 1, 2, 3 y 4:

Dibujo 1



Dibujo2

(en este caso se consideran *l*os decimales como puntos sobre un segmento: recta numérica)



Dibujo 3

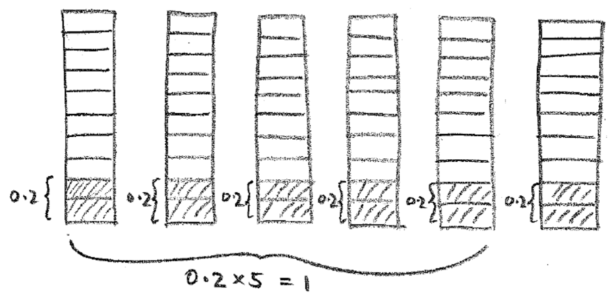
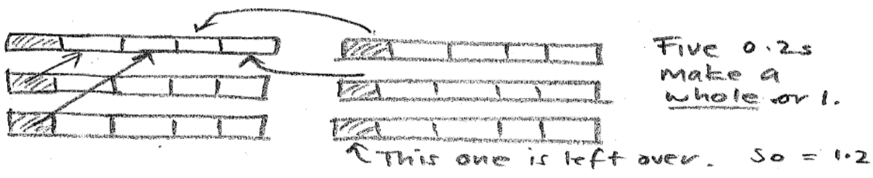


Tabla 20

Tipos de respuestas y ejemplos en la guía de corrección

Dibujo 4

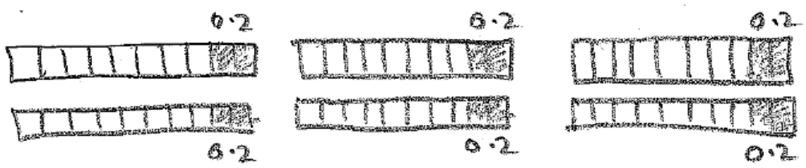


Parcialmente Correcta

Tipo 1: Una representación que muestre adecuadamente 6 sub-áreas de 0,2 de una región pero que no muestre de forma clara que el conjunto de estas 6 sub-áreas es igual a 1,2.

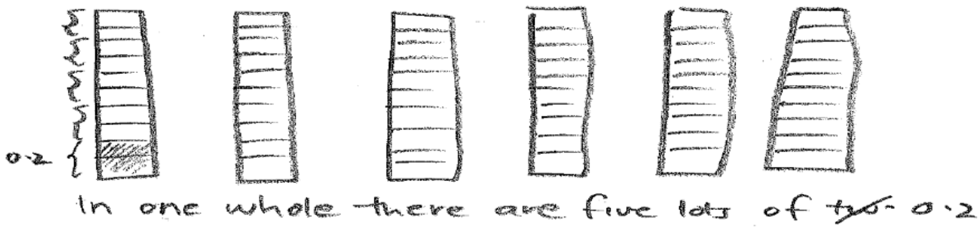
Se acepta que 0,2 se represente como un quinto o como dos décimas.

Ejemplo: Dibujo 5



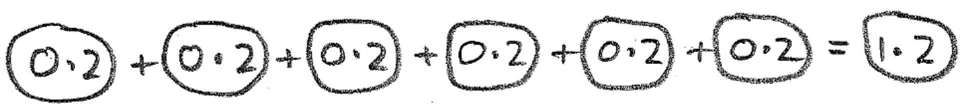
Tipo 2: Una representación que muestre adecuadamente cómo 5 sub-áreas de 0,2 de una región hacen una unidad completa pero no muestren claramente que 6 sub-áreas de 0,2 es igual a 1,2.

Ejemplo: Dibujo 6



Tipo 3: Una representación del tipo 0,2 x 6 = 1,2 sin mostrar por qué es verdad gráficamente.

Ejemplo: Dibujo 7



0,2+0,2+0,2+0,2+0,2+0,2=1,2

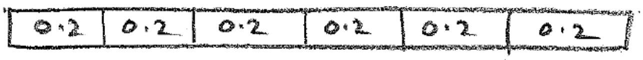
Tabla 20

Tipos de respuestas y ejemplos en la guía de corrección

Respuestas incorrectas

Tipo 1: Una representación que muestre 6 bloques de 0,2 sin mostrar qué representa 0,2 o cómo 5 bloques de 0,2 es igual a 1

Ejemplo: Dibujo 8



Tipo 2: Un ejemplo con palabras que sugieran contar bloques de 0,2.

Ejemplo: "Contar 6 bloques de 0,2 como los siguientes: 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1, 1,2"

Nota: Esto es una buena estrategia de enseñanza pero no una buena representación

Otras incorrectas (incluyendo respuestas tachadas, ilegibles, etc.)

En blanco

Estudiando la guía de corrección comprobamos por una parte que se hace igual énfasis en los dos puntos de la pregunta: abordar el error del escolar y hacerlo de manera gráfica.

Y por otra parte comprobamos que aunque en la formulación general de la respuesta correcta no se menciona la necesidad de mostrar que 0,5 x 2 = 1, sí que vemos como se hace hincapié en la importancia de que el futuro profesor manifieste este conocimiento.

Me baso en los análisis del apartado anterior para interpretar estos tipos de respuesta.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas correctas

Con los distintos ejemplos que la guía de corrección proporciona se puede decir que un futuro profesor que contesta de forma correcta:

- conoce la representación de los números decimales bien como sub-áreas de una región que se toma como unidad (en este caso 0,2 se representaría como 2/10 ó como 1/5) y/o como puntos sobre un segmento (recta numérica).
- muestra gráficamente que 5 veces 0,2 corresponde a la unidad (la guía de corrección manifiesta que es necesario que el futuro profesor muestre este hecho)
- sabe representar gráficamente el producto: 0,2 x 6

Parece difícil que en este problema haya otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente. No tengo en cuenta estos motivos en el análisis.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas parcialmente correctas

Tipo 1: se considera que una respuesta es parcialmente correcta tipo 1 cuando el futuro profesor únicamente representa gráficamente el número decimal 0,2. En este caso, del conocimiento que los futuros profesores ponen en juego solo podemos decir que saben representar gráficamente los números decimales bien como sub-áreas de una región que se toma como unidad y/o como puntos sobre un segmento (recta numérica). Pero no manifiestan al contestar a esta pregunta reconocer que 5 veces 0,2 es la unidad y no representan gráficamente que 0,2 x 6 = 1,2.

También se podrían considerar de Tipo 1 las respuestas en las que de manera parcial se represente gráficamente el producto. Como es el caso del ejemplo donde se representa 6 veces 0,2.

Tipo 2: se consideran respuestas es parcialmente correctas tipo 2 aquellas en las que el futuro profesor representa correctamente 0,2; reconoce que 5 veces 0,2 es la unidad pero no representa gráficamente que 0,2 x 6 = 1,2.

Tipo 3: se considera que una respuesta es parcialmente correcta Tipo 3 cuando el futuro profesor representa que 0,2 x 6 es igual a 1,2 pero no hay una significación gráfica de lo que representa el número decimal 0,2.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas incorrectas

La guía de corrección establece dos tipos de respuestas incorrectas:

Tipo 1: se considera que una respuesta incorrecta es del tipo 1 cuando el futuro profesor manifiesta no saber representar el número decimal 0,2; no representa gráficamente que 0,2 x 6 = 1,2 ni que 5 veces 0,2 corresponde a la unidad.

Tipo 2: se considera que una respuesta incorrecta es del tipo 2 cuando el futuro profesor sabe razonar que 6 x 0,2 = 1,2, es decir, sabe abordar el error en el que incurre el alumno pero no manifiesta saber representarlo gráficamente .

Conocimientos puestos en juego en las respuestas clasificadas como "otras incorrectas":

Se consideran respuestas "otras incorrectas" las respuestas ilegibles y en este caso no podemos hacer conjeturas sobre los conocimientos de los futuros profesores que han contestado de esta forma.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 12 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En la primera columna de la tabla 12 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 12

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 4

%	Respuesta	Conocimientos
10,9%	Correcta	Conocen la representación de los números decimales bien como sub-áreas de una región que se toma como unidad y/o como puntos sobre un segmento (recta numérica) Reconocen que 5 veces 0,2 corresponde a la unidad Saben representar gráficamente el producto 0,2 x 6 = 1,2
5,4%	Parcialmente Correcta Tipo 1	Conocen la representación de los números decimales bien como sub-áreas de una región que se toma como unidad y/o como puntos sobre un segmento (recta numérica) No reconocen que 5 veces 0,2 es la unidad No representan gráficamente que 0,2 x 6 = 1,2
1,1%	Parcialmente Correcta Tipo 2	Conocen la representación de los números decimales bien como sub-áreas de una región que se toma como y/o como puntos sobre un segmento (recta numérica) Reconocen que 5 veces 0,2 es la unidad No representan gráficamente que 0,2 x 6 = 1,2

Tabla 12

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 4

%	Respuesta	Conocimientos
10,9%	Parcialmente Correcta Tipo 3	No conocen una significación gráfica de lo que representa el número decimal 0,2 Conocen que 0,2 x 6 es igual a 1,2 y lo expresan sin recurrir a la significación gráfica del número decimal 0,2
6,2%	Respuestas Incorrectas Tipo 1	No conocen una significación gráfica de lo que representa el número decimal 0,2 No manifiestan que 0,2 x 6 = 1,2 No reconocen que 5 veces 0,2 es la unidad
0,2%	Respuestas Incorrectas Tipo 2	Razonan que 6 x 0,2 = 1,2 pero sin representarlo gráficamente.
32,8%	Otras incorrectas (incluyendo respuestas tachadas, ilegibles, etc.)	
31,6%	En blanco	
0,9%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles

Como muestra la tabla 12, sólo un 10,9% de futuros profesores españoles contesta correctamente a esta pregunta. Los resultados de esta pregunta sobre los números decimales, su significación gráfica y su enseñanza están en consonancia con los resultados obtenidos para la pregunta 3 que he estudiado anteriormente. Es decir, podemos afirmar, después de estudiar las preguntas 3 y 4, que el conocimiento didáctico que tienen los futuros profesores en el tema de los números decimales es deficiente en cuanto a los errores comunes y a su representación gráfica como aplicación a la enseñanza.

Son significativos los datos del 32,8% de futuros profesores cuya respuesta es ilegible y el 31,6% que contestó en blanco.

PREGUNTA 5. ORDENAR FRACCIONES

En esta pregunta no liberada, TEDS-M plantea al futuro profesor que interprete cuál es la idea matemática que una profesora pretende trabajar con sus alumnos a los que propone tres parejas de fracciones sencillas con igual numerador para que los ordenen de menor a mayor. Les propone cuatro opciones: las opciones A y B son afirmaciones sobre fracciones que no siempre son ciertas para todas las fracciones y no hacen referencia a fracciones con igual numerador; la opción C manifiesta la idea de que es esencial reducir a común denominador antes de comparar fracciones diferentes; y la opción D dice que cuando dos fracciones tienen el mismo numerador, entonces es necesario comparar los denominadores.

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre la comparación de fracciones. TEDS-M clasifica esta pregunta dentro del subdominio de currículo; la considera de nivel intermedio; y es de respuesta múltiple y no necesita guía de corrección para clasificar las posibles respuestas. En primer lugar, puesto que esta pregunta se enmarca dentro del subdominio de currículo, hay que destacar que en el currículum de educación primaria español se contempla el estudio de fracciones sencillas, sus operaciones y el orden de las mismas. El tratamiento de este tema tiene por objeto proporcionar al alumno un aprendizaje significativo del concepto mediante la utilización de modelos para el estudio de las fracciones. Se recomienda su aplicación en la resolución de problemas, debiéndose fomentar en la enseñanza estrategias de cálculo mental para la ordenación y las operaciones con fracciones (Castro y Torralbo, 2001).

Como veremos a continuación, para contestar correctamente a esta pregunta basta tener el conocimiento matemático suficiente. En concreto, responder correctamente a la pregunta requiere:

1. reconocer que las fracciones tienen el mismo numerador (la opción D de la pregunta orienta en este sentido);
2. saber que, entre fracciones con igual numerador, es mayor la que tiene menor denominador;
3. percibir, por tanto, que en este caso no hay necesidad de reducir a común denominador para comparar las fracciones propuestas.

En este problema el análisis de la pregunta tiene que ver con el conocimiento matemático y con los procedimientos usuales en el tema de comparación de fracciones. No obstante, las distintas opciones de respuesta a la pregunta no nos hablan necesariamente sobre si el futuro profesor conoce la fundamentación o no de los procedimientos para comparar fracciones. Es decir, en esta pregunta podría darse el caso de futuros profesores que contestaran correctamente que la solución de esta pregunta es la opción D porque de manera mecánica sepan que "de dos fracciones con igual denominador es mayor la que tiene menor denominador", sin reparar en su fundamentación. No obstante, establezco que el profesor que contesta correctamente esta pregunta manifiesta un conocimiento del tema que va más allá de la aplicación sistemática de un algoritmo. En cuanto al conocimiento didáctico que puede manifestar un profesor que contesta correctamente podríamos decir que en esta pregunta se realiza un análisis del contenido de las matemáticas escolares al planificar una estrategia de instrucción.

Tipos de respuestas

Me baso en el análisis del apartado anterior para interpretar los distintos tipos de respuesta que pueden darse.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas correctas

La respuesta correcta implica elegir la opción D. Se puede afirmar que los futuros profesores que contestan correctamente a esta pregunta:

- reconocen que se trata de fracciones sencillas con igual numerador; y
- saben que entre dos fracciones con igual numerador es mayor la que tiene menor denominador; es decir, saben que cuando dos fracciones tienen el mismo numerador, entonces es necesario comparar los denominadores.

Puede haber otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente. No tengo en cuenta estos motivos en el análisis. No puedo afirmar, puesto que la pregunta no lo pide expresamente, que los futuros profesores que contestan de forma correcta conozcan el currículo de primaria y reconozcan la importancia de proponer a los alumnos en esta etapa problemas que puedan resolver con el uso de sus propios procedimientos sin necesidad de recurrir a algoritmos (Llinares y Sánchez, 1988), o que valoren positivamente la utilización del significado de fracción como partes de un todo (Castro y Torralbo, 2001). No obstante, entiendo que la intencionalidad de la pregunta que propone TEDS-M es identificar las ideas claves en los programas de aprendizaje como parte del conocimiento curricular.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas incorrectas: se elige la opción C

Dependiendo de la opción que el futuro profesor haya elegido como idea matemática que se resalta en la actividad propuesta, se pueden intuir los errores en los que el futuro profesor ha podido incurrir o en los conocimientos que ha puesto en juego para elegir esa opción. En principio, los futuros profesores que eligen la opción C saben qué tienen que hacer para ordenar cualquier tipo de fracción de una manera puramente algorítmica y lo harían correctamente reduciendo a común denominador aquellas fracciones que les pidan ordenar. Pero el enunciado de esta opción utiliza la palabra "esencial", es decir, quiere hacer reflexionar al futuro profesor sobre si es imprescindible en cualquier problema, como el que se propone, el reducir a común denominador. Como hemos visto en el análisis de la pregunta, esto no siempre es necesario cuando trabajamos con fracciones con igual numerador y menos aún cuando son parejas de fracciones con números naturales. Por tanto, dentro de esta opción podemos agrupar a los futuros profesores en tres categorías:

1. Los que no perciben que se trata de fracciones con igual numerador (esta opción es difícil que se dé puesto que el enunciado de esta opción induce al futuro profesor a fijarse en los numeradores).
2. Los que perciben que se trata de fracciones con igual numerador pero no saben ordenarlas sin recurrir a reducir a "común denominador". A estos futuros profesores les faltaría un conocimiento matemático sobre las fracciones y sus propiedades.
3. Los que perciben que se trata de fracciones con igual numerador pero no se plantean otro método que reducir a común denominador para ordenarlas.

Debido a la formulación que hace TEDS-M de la pregunta y sus posibles respuestas, no es posible determinar a cuál de estas categorías pertenece cada futuro profesor que elige la opción D.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas incorrectas: se elige la opción A o B o se deja la respuesta en blanco

Los futuros profesores que eligen la opción A o B están eligiendo afirmaciones sobre las fracciones que no son ciertas para cualesquiera dos fracciones. Esto manifiesta falta de conocimiento conceptual de las fracciones, de sus propiedades y de capacidad para compararlas. Por tanto, estos futuros profesores carecen del conocimiento matemático suficiente para abordar este problema y no conocen los procedimientos para comparar fracciones. Esta última afirmación podría aplicarse a aquellos futuros profesores que dejan la pregunta en blanco pero faltan datos para poder asegurarlo.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 9 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En la primera columna aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 9

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 5

%	Respuesta	Conocimientos
33,3%	Correcta Opción D	Reconocen que se trata de fracciones con igual numerador Tienen el conocimiento matemático suficiente para comparar fracciones con igual numerador sin necesidad de reducir a “común denominador” y conocen su fundamentación o Tienen el conocimiento matemático suficiente para comparar fracciones con igual numerador sin necesidad de reducir a “común denominador” pero no conocen su fundamentación u Otros motivos —como el azar-
43,1%	Incorrecta Opción C	Saben ordenar cualquier tipo de fracción reduciendo a común denominador y No han percibido que las fracciones propuestas tienen igual numerador o No saben que de dos fracciones con igual numerador es mayor la que tiene menor denominador

Tabla 9

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 5

%	Respuesta	Conocimientos
20,6%	Incorrecta Opciones A y B	Falta de conocimiento matemático de las fracciones y sus propiedades Consideran como ciertas propiedades de las fracciones que no se pueden generalizar
2,8%	En blanco	
0,2%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles

Como vemos en la tabla 9 tanto los futuros profesores que eligen la opción C como los que eligen la opción D, es decir, un 76,4% de futuros profesores españoles, tienen el conocimiento matemático suficiente para ordenar cualquier tipo de fracciones. Destaca que sólo un 33,3% de futuros profesores españoles considere que la idea matemática que se resalta en la actividad sea la D. Estos futuros profesores han sabido ordenar fracciones sencillas sin necesidad de reducir a común denominador pero faltan datos para poder interpretar si conocen o no la fundamentación de la solución.

Al mismo tiempo, los resultados muestran que un tanto por ciento importante de futuros profesores españoles (43,1%) manifiesta que la idea matemática que se resalta en la actividad es la opción D, lo cual sugiere que estos futuros profesores pueden carecer del conocimiento matemático suficiente para ordenar fracciones con el mismo numerador o que valoran positivamente el recurrir al algoritmo de "reducir a común denominador" para ordenar cualquier tipo de fracciones. Sí podemos advertir que estos futuros profesores corren el peligro de que los algoritmos se conviertan en reglas sin sentido para ellos y en el futuro para sus alumnos y no perciban que estos métodos no son un buen recurso didáctico (Llinares y Sánchez, 1988).

Un 23,4% de futuros profesores contesta erróneamente o deja la pregunta en blanco. Es un tanto por ciento elevado de futuros profesores que carece de conocimiento conceptual de las fracciones, de sus propiedades y operaciones.

PREGUNTA 6: SIGNIFICADO GRÁFICO DE LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

En esta pregunta no liberada se plantea la división de dos fracciones sencillas. Se dan cuatro modelos gráficos donde aparentemente se representa el significado gráfico de la división de esas fracciones y se plantea al futuro profesor que determine en cada caso cuál o cuáles de ellos se puede o se pueden usar para mostrar el significado de la misma.

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre la representación gráfica de la división de fracciones. TEDS-M clasifica esta pregunta dentro del dominio de planificación de la enseñanza y la considera de nivel intermedio; es de respuesta múltiple compleja y no necesita guía de corrección para clasificar las posibles respuestas.

Para analizar las cuatro opciones que plantea el problema me he basado en la concepción de modelo que recoge Castro y Torralbo (2001), que consideran los modelos como materiales estructurados que ofrecen una imagen isomorfa del concepto, lo que hace que respete relaciones y propiedades inherentes del mismo. Para el caso de las fracciones, consideraré también los dos tipos de modelos que proponen: los continuos y los discretos. Por ello, para comprobar que cada una de las opciones que nos proporciona el enunciado son o no correctas, he tenido que ver en primer lugar si las representaciones que se hacen de las fracciones propuestas son verdaderamente modelos discretos o continuos de dichas fracciones y, a continuación, comprobar que realmente las representaciones gráficas que se proponen muestran el significado de la división de las fracciones.

Opción A

En esta opción, las representaciones que se hacen de las fracciones que forman parte de la división no corresponden a un modelo discreto de representación de fracciones, puesto que no ofrece una imagen isomorfa del concepto de fracción y no se establece una relación entre una parte y el conjunto total. Por tanto, la opción A no es una solución correcta.

Opciones B, C y D

En estas opciones se utilizan modelos continuos para representar las fracciones que forman parte de la división propuesta en el enunciado. Merece la pena recordar que, en un modelo continuo de fracción, la fracción se considera como la medida de una parte del área de una región plana que se toma como unidad. Se estaría trabajando el significado de fracción como partes de un todo, dividiéndose la figura en tantas partes iguales como indique el denominador y señalando tantas como indique el numerador (Castro y Torralbo, 2001). Para poder estudiar si las opciones B, C y D son correctas hay que tener en cuenta, en primer lugar, cuál es el significado de la operación división de fracciones. Una forma sencilla de aproximarse al significado de la operación $a \div b = c$ es a través de la pregunta: ¿cuántas veces *b* está contenida en *a*? Por tanto, para ver si son correctas, los pasos que tenemos que dar son:

- Comprobar que está bien representada la fracción *a*.
- Comprobar que el todo está dividido en *b* partes.
- Ver que *b* está contenido *c* veces en *a*.

De esta forma se comprueba que sólo la opción B es la correcta.

Tipos de respuestas

Nos basamos en el análisis del apartado anterior para interpretar los distintos tipos de respuesta que pueden darse. En primer lugar señalar que nos vamos a encontrar con un problema a la hora de interpretar los resultados; pues al tratarse de un problema de respuesta múltiple compleja el futuro profesor ha podido contestar en cada opción de forma correcta o incorrecta, pero no tenemos información suficiente para comprobar que los futuros profesores que contestan que la opción B es la correcta no hayan afirmado que alguna o todas las demás opciones también lo son. Por ello a la hora de concretar los conocimientos manifestados nos vamos a centrar sólo en la que sería la respuesta correcta y en los posibles errores en los que pueden incurrir los futuros profesores que señalen que las opciones A, C o D son las correctas.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas correctas

Respuesta correcta: se elige la opción B y se rechazarían el resto de opciones (por los datos que tenemos no es posible saber qué futuros profesores contestan de esta forma)

Podemos afirmar que los futuros profesores que contestaran de esta forma:

- ♦ Conocen los modelos de fracciones (continuos y discretos);
- ♦ Conocen el significado de fracción como partes de un todo;
- ♦ Conocen el significado de la operación división de fracciones.

Puede haber otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente. No tenemos en cuenta estos motivos en nuestro análisis.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas incorrectas

Respuesta incorrecta: se elige la opción A como correcta

Los futuros profesores que eligen la opción A como correcta:

1. no reconocen el significado de fracción como partes de un todo;
2. no conocen los modelos de fracciones discretos;
3. no conocen el significado gráfico de la operación división de fracciones;

Respuestas incorrectas: se eligen la opción C o/y D como correctas

Los futuros profesores que eligen las opciones C o/y D como correcta no conocen el significado gráfico de la operación división de fracciones. En el caso de la opción C no perciben que es distinto el resultado numérico de la división de fracciones del resultado gráfico mientras que en la opción D interpretan que el resultado numérico de la división de fracciones coincide con el área rayada gráficamente aunque este no muestre el significado de la división de las fracciones.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 13 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En esta pregunta, al ser de opción múltiple compleja, se evaluó cada opción por separado. En la primera columna de la tabla 13 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles que contestaron que era correcta cada una de las posibles opciones —segunda columna—. En la tercera columna, interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 13
Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 6

%	Respuesta	Conocimientos
39.2%	Correcta Opción B	Conocen los modelos de fracciones continuos y el significado de la operación división de fracciones Conocen el significado de fracción como partes de un todo Otros motivos —como el azar-
55.6%	Incorrecta Eligen como correcta la opción A	No conocen los modelos de fracciones discretos No conocen el significado de la operación división de fracciones
31.4%	Incorrecta Eligen como correcta la opción C	No conocen el significado de la operación división de fracciones No perciben que son distintos el resultado numérico de la división de fracciones del resultado gráfico
25,7%	Incorrecta. Eligen como correcta la opción D	No conocen el significado de la operación división de fracciones; Perciben que el resultado numérico de la división de fracciones coincide con el área rayada gráficamente

Interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles

Como vemos en la tabla 13, sólo un 39,2% de futuros profesores españoles fue capaz de reconocer la representación correcta de la división de fracciones. Es decir, sólo el 39,2% conoce el significado de dividir fracciones. No obstante, no sabemos si estos mismos profesores han contestado incorrectamente en el resto de opciones, lo cual nos daría información sobre si el conocimiento que tienen acerca del significado de la operación división de fracciones es completamente correcto o parcialmente correcto.

Podemos afirmar, a la vista de estos resultados, que más del 50% de los futuros profesores españoles, que elige como correcta la opción A, no reconoce la fracción como partes de un todo y no conoce, por tanto, los modelos discretos de representación de fracciones. Ellos saben dividir las fracciones propuestas numéricamente ya que identifican el resultado gráfico con el resultado numérico de realizar la división. Tampoco conocen el significado gráfico de la operación división de fracciones ni el 25,7% que elige la opción D ni el 31,4 % que elige la C como correctas. No obstante, el que solo el 39,2% de los futuros profesores señalara que la opción B era la correcta no nos proporciona información suficiente acerca del conocimiento del significado de la operación división de fracciones de los futuros profesores ni sobre su dominio en los modelos continuos de representación de fracciones, considerándolas como partes de un todo. Supongo que los futuros profesores que participan en el estudio TEDS-M son capaces de realizar la operación de dividir dos fracciones sencillas de forma algorítmica, por ello no considero la opción de que los futuros profesores españoles no sepan realizar esta sencilla división.

Estos resultados confirman los errores y dificultades que se comprueban en el tema de fracciones en el currículo de primaria: "el cálculo de productos y división de fracciones, cuando se plantea solamente como cómputo, es más fácil que el cálculo de suma y resta de fracciones. Sin embargo, cuando se trata del significado de las operaciones, el producto y la división ofrecen mayor dificultad que la suma y la resta" (Castro y Torralbo, 2001, p. 307). En este mismo sentido también se puede añadir la propuesta de Llinares y Sánchez (1988) que afirman que la operación de dividir fracciones corresponde a una operación de sentido algebraico; siendo su vinculación a situaciones intuitivas compleja, por lo que en ocasiones se ha cuestionado el manejo del algoritmo de la división en primaria.

PREGUNTA 7: NÚMEROS MIXTOS

En esta pregunta no liberada el futuro profesor debe analizar el método que utiliza una alumna para sumar dos números mixtos (uno positivo y otro negativo). En concreto, se le pide al futuro profesor que interprete qué hace la alumna para resolver el problema y que determine si el método que propone la alumna es correcto para cualquier pareja de números mixtos o bien que describa cuál es el error conceptual en el que está incurriendo de entre cuatro opciones que se le proponen. El procedimiento que sigue la alumna es el siguiente: dados los dos números mixtos, uno positivo y otro negativo, ella suma los enteros por una parte (teniendo en cuenta los signos); suma las fracciones, que tienen igual denominador por otra parte (teniendo también en cuenta los signos), y, como resultado, pone el número entero junto con la fracción, sin darse cuenta de que para hallar el resultado tendría que dar un paso más que es sumar el número entero a la fracción.

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre las operaciones con números mixtos. TEDS-M la clasifica dentro del dominio de implementación de la enseñanza y la considera de nivel intermedio; es de respuesta múltiple y no necesita guía de corrección para clasificar las posibles respuestas. Para abordar esta pregunta, el futuro profesor debe conocer los números mixtos, su significación y las operaciones con ellos, así como las operaciones con números enteros. En primer lugar el futuro profesor tendría que hallar la solución correcta del problema propuesto, teniendo en cuenta que lo usual para operar con números mixtos es transformarlos en fracciones impropias y posteriormente realizar las operaciones indicadas con las fracciones. En el momento en que se resuelve la actividad de esta manera, se comprueba que el método que propone la alumna no es correcto, puesto que el resultado no lo es.

Tipos de respuestas

Me baso en el análisis del apartado anterior para interpretar los distintos tipos de respuesta que pueden darse.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas correctas

Podemos afirmar que los futuros profesores que contestan correctamente a esta pregunta:

- conocen los números mixtos, su significación y las operaciones con ellos;
- son capaces de determinar el tipo de error en el que incurre la alumna del problema (véase el error detallado en el marco conceptual);
- son capaces de analizar el contenido matemático de las matemáticas escolares de esta pregunta.

Puede haber otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente. No tengo en cuenta estos motivos en el análisis.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas incorrectas

Puesto que el resto de opciones que plantea la pregunta son incorrectas y la pregunta no está liberada me limitaré a describir los conocimientos puestos en juego por los futuros profesores que contestan de esta forma en las distintas opciones sin detallarlas:

1. no saben operar con números mixtos;
2. no reconocen el error que comete la alumna.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 14 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En la primera columna aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 14
Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 7

%	Respuesta	Conocimientos
12,6%	Correcta	Conocen los números mixtos, y las operaciones con ellos Son capaces de determinar el tipo de error en el que incurre la alumna del problema Otros motivos —como el azar-
74,6%	Incorrecta	No saben operar con números mixtos No reconocen el error en el que incurre la alumna No son capaces de analizar el contenido matemático de las matemáticas escolares de esta pregunta
11,4%	En blanco	
1,4%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles

Es significativo que sólo un 15,3% de los futuros profesores haya contestado correctamente. Este resultado pone de manifiesto que los futuros profesores españoles carecen del conocimiento matemático de los números mixtos, de su significación y de las operaciones con ellos, al mismo tiempo que no están en condiciones de advertir el error en el que ha incurrido la alumna de la pregunta tras analizar el contenido matemático de las matemáticas escolares de la pregunta.

PREGUNTA 8: ALGORITMOS DE LA RESTA

En esta pregunta no liberada se presentan tres métodos propuestos por alumnos con los que ellos efectúan la resta de dos números naturales de tres cifras (el minuendo mayor que el sustraendo) y se pide al futuro profesor que decida cuál o cuáles de esos métodos se puede usar para restar cualquier número entero positivo de tres cifras de otro mayor; es decir, que determine cuál o cuáles de esos métodos se puede considerar algoritmos de la resta.

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre algoritmos de la resta. TEDS-M la clasifica dentro del dominio de implementación de la enseñanza y la considera de nivel intermedio; es de respuesta múltiple y no necesita guía de corrección para clasificar las posibles respuestas. En esta pregunta se está pidiendo al futuro profesor que analice el contenido matemático de una actividad escolar. Para analizar esta pregunta, me baso en el estudio que hace Roa (2001) sobre los algoritmos del cálculo. Así mismo, utilizo la definición que hace Gómez (1988) de un algoritmo: "Un algoritmo es una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedad) en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos" (p.145).

Para abordar correctamente esta pregunta el futuro profesor debe:

1. Conocer que la mayoría de los algoritmos para la resta están basados, unos, en recorrer directamente el camino de un número a otro, ya sea del sustraendo al minuendo o del minuendo al sustraendo; y, otros, en la descomposición del minuendo, del sustraendo o de ambos (Roa, 2001).
2. Reconocer, en los métodos propuestos por los alumnos, los pasos que se dan en cada uno de ellos:

Método A: se recorre el camino del sustraendo al minuendo.

Método B: se descompone el sustraendo y se realiza la misma resta en tres pasos.

Método C: Se utiliza repetidamente la propiedad de la resta que establece que si se suman la misma cantidad al minuendo y al sustraendo, la resta no cambia.

Por tanto, la respuesta correcta a esta pregunta es la que propone que todos los métodos que utilizan los alumnos se pueden usar para restar cualquier número natural de tres cifras de otro mayor. Es decir, los tres métodos son algoritmos para la resta.

Tipos de respuestas

Me baso en el análisis del apartado anterior para interpretar los distintos tipos de respuesta que pueden darse.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas correctas

Respuesta correcta: los tres métodos que proponen los alumnos son algoritmos de la resta.

Se puede afirmar que los futuros profesores que contestan correctamente a esta pregunta reconocen los pasos con los que los alumnos resuelven la resta y son capaces de identificar que se trata de algoritmos de la resta basados en recorrer directamente el camino de un número a otro, ya sea del sustraendo al minuendo o del minuendo al sustraendo, y otros en la descomposición del minuendo, del sustraendo o de ambos.

Puede haber otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente. No tengo en cuenta estos motivos en mi análisis.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas incorrectas

Dependiendo de la respuesta de los futuros profesores se pueden describir los errores en los que el futuro profesor ha podido incurrir o los conocimientos que ha puesto en juego para elegir esa opción.

Respuesta Tipo 1:

Estos futuros profesores manifiestan:

1. no reconocer como algoritmo el método que aplica la propiedad de sumar y restar el mismo número al minuendo y al sustraendo;

2. conocer que restar al minuendo el sustraendo es lo mismo que restar al minuendo en tres pasos la descomposición del sustraendo;
3. no reconocer como algoritmo el recorrer el camino del sustraendo al minuendo.

Respuesta incorrecta Tipo 2

Estos futuros profesores manifiestan:

1. conocer que restar al minuendo el sustraendo es lo mismo que restar en tres pasos la descomposición del sustraendo;
2. reconocer como algoritmo de la resta el recorrer el camino del sustraendo al minuendo;
3. no reconocer como algoritmo el método que aplica la propiedad de sumar y restar el mismo número al minuendo y al sustraendo.

Respuesta incorrecta Tipo 3

Estos futuros profesores manifiestan:

1. conocer que restar al minuendo el sustraendo es lo mismo que restar en tres pasos la descomposición del sustraendo y por tanto dicho método es un algoritmo de la resta;
2. no reconocer como algoritmo de la resta recorrer el camino del sustraendo al minuendo;
3. reconocer como algoritmo el método que aplica la propiedad de sumar y restar el mismo número al minuendo y al sustraendo.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 15 presento la interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En la primera columna aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpreto estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 15
Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles en la pregunta 8

%	Respuesta	Conocimientos
30,6%	Correcta	Reconocen los pasos con los que los alumnos resuelven la resta y son capaces de identificar que se trata de algoritmos de la resta Otros motivos —como el azar-
21,9%	Incorrecta Tipo 1	No reconocen como algoritmo el método que aplica la propiedad de sumar y restar el mismo número al minuendo y al sustraendo Conocen que restar al minuendo el sustraendo es lo mismo que restar en tres pasos la descomposición del sustraendo No reconocen como algoritmo el recorrer el camino del sustraendo al minuendo
19,8%	Incorrecta Tipo 2	Reconocen que restar al minuendo el sustraendo es lo mismo que restar en tres pasos la descomposición del sustraendo Reconocen como algoritmo de la resta el recorrer el camino del sustraendo al minuendo No reconocer como algoritmo el método que aplica la propiedad de sumar y restar el mismo número al minuendo y al sustraendo
23,2%	Incorrecta Tipo 3	Conocen que restar al minuendo el sustraendo es lo mismo que restar en tres pasos la descomposición del sustraendo y por tanto dicho método es un algoritmo de la resta No reconocen como algoritmo de la resta el recorrer el camino del sustraendo al minuendo Reconocen como algoritmo el método que aplica la propiedad de sumar y restar el mismo número al minuendo y al sustraendo
2,4%	En blanco	
2,1%	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles

Estos resultados muestran que sólo un 30,6% de futuros profesores es capaz de reconocer que los métodos A, B y C son algoritmos de la resta. El 95,5 % de los futuros profesores españoles reconoce el método B como algoritmo de la resta. Esto manifiesta que prácticamente todos los futuros españoles conocen la descomposición de un número utilizando el sistema de numeración decimal y reconocen que es lo mismo restar un número a otro que restar sucesivamente la descomposición del segundo. El 21, 9% contesta que solamente el método B es un algoritmo de la resta; el 23, 2% que solamente los métodos B y C lo son; y el 19,8 % que sólo los métodos A y B lo son. Por consiguiente, un 64,9% de los futuros profesores tienen un conocimiento parcial acerca de las propiedades de la resta y de lo que es un algoritmo de la resta. Estos resultados ponen de manifiesto que los futuros profesores tienen un conocimiento matemático parcial a la hora de trabajar con la resta y distinguir métodos que se pueden usar para restar cualquier número natural de tres cifras de otro mayor.