DIFICULDADES ENVOLVENDO A NOÇÃO DE DEMONSTRAÇÃO: UM ESTUDO DE CASO

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE/Brasil
fregis@ifce.edu.br
Universitário

Palavras- chave: Prova e demonstração. Ensino. Geometria Analítica.

Resumo
Neste trabalho apresentamos os dados pertinentes a um estudo de caso que se caracteriza como um *design* de investigação (PONTE, 1994) e que desenvolvido em caráter exploratório no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE. A partir das concepções de Fischbein (1993) e Duval (1993), analisamos e interpretamos as dificuldades de quatro estudantes do curso de Engenharia da Computação no contexto de demonstração em Geometria Analítica. Registramos as dificuldades relativas ao uso de hipóteses e tese na resolução de dois problemas propostos. No rol dos dados empíricos colhidos, registramos figuras fornecidas pelos sujeitos participantes que envolvem *valores epistêmicos semânticos* em contradição flagrante com os *valores epistêmicos teóricos*. Notamos também imagens mentais restritas com relação aos conceitos figurais envolvidos nas situações. Por fim, comprovamos situações em que a argumentação apresenta como ponto de partida as figuras, e evolui para inferências formais exigidas na prova ou demonstração.

Sobre a noção de demonstração

Frequentemente descrevemos/significamos o raciocínio matemático por meio de desenhos e/ou figuras que podem referenciar representações de objetos do mundo perceptível. Assim, descrevemos um *círculo* que envolve a ideia de um tonel de vinho ou um *quadrado* que pode explicar a forma de uma cadeira vista de cima. Por outro lado, nosso raciocínio pode restringir-se a entidades conceituais abstratas que mencionamos (tais como quadrado, triângulo, linha reta, etc) e constituem um modelo de idealização, apesar de não possuirem de *per si*, uma existência material.

Neste caso, nos referimos a figuras geométricas que são *condicionadas pela sua natureza conceitual* (FISCHBEIN, 1993, p. 141). Destarte, um *quadrado* não é apenas uma figura no papel, mas uma forma controlada/condicionada pela sua definição. O traçado de um triângulo, pelo mesmo motivo, respeita determinadas propriedades particulares, caso desejemos descrever um triângulo eqüilátero ou isósceles. Todavia, nenhum destes dois objetos ideais possui uma existência própria e, sim, suas representações particulares.

Partindo-se de propriedades matemáticas formais, nosso raciocínio pode evoluir na medida em que descobrimos outras propriedades a partir dos elementos que constituem sua definição original (ângulos agudos nos vértices, igualdade das diagonais, etc). Deste ponto de vista, podemos falar de conhecimento conceitual ou um raciocínio matemático conceitual que emerge a partir de uma definição matemática.

Um raciocínio matemático conceitual em *Geometria* apresenta aspectos que o distinguem do raciocínio matemático conceitual em *Álgebra*. Neste sentido, Fischbein (1993, p. 148) descreve três categorias de entidades mentais que se referem às figuras geométricas e que, no âmbito da, por exemplo, *Geometria Plana*, assumem um papel de destaque quando realizamos uma demonstração que requer um raciocínio matemático conceitual.

Fischbein (1993) dedica uma atenção especial aos *conceitos figurais* que o autor caracteriza-os como *uma realidade mental*, pois são controlados e manipulados, em princípio sem resquícios, pelas regras de inferência lógicas e procedimentos condicionados por sistemas axiomáticos.

Por outro lado, no interior dos sistemas axiomáticos e lógicos, de modo tradicional, realizamos a prova e a demonstração de resultados ou propriedades formais. Neste caso, a prova é dedutiva, todavia, *a descoberta e a conjectura de propriedades é frequentemente caracterizada por um processo de argumentação abdutiva* (PEDEMONTE & REID, 2011, p. 282) o qual notamos manter-se relacionada a uma forma de cognição que evolui de modo nem sempre consciente e controlado.

A *argumentação abdutiva* tem sua origem em muitos casos a partir de figuras geométricas e, sobre elas, direcionamos nossa atenção. Assim, nossa capacidade perceptiva permite, a partir da relação estabelecida entre objeto/observador, o surgimento de um significado.

Concordamos com Fischbein (1993, p. 149) quando salienta que *o significado vai além da materialidade de uma palavra expressa*. Acrescentamos ainda que o significado supera os limites da materialidade de uma figura ou desenho. Um pouco mais adiante, Fischbein (1993, p. 149) declara ainda que as *figuras geométricas* possuem propriedades porque: a) são imagens mentais; (b) a imagem mental de uma figura geométrica é, usualmente, a representação de um modelo material; (c) uma figura geométrica corresponde a uma ideia idealizada, entidade figural purificada e estritamente determinada por sua definição.

Por outro lado, uma figura geométrica esta sempre associada a um conjunto de crenças e concepções daquele que executa seu traçado, deste modo distinguimos: (i) o valor epistêmico semântico e (ii) o valor epistêmico teórico. Duval (1993) caracteriza o *valor epistêmico semântico* como o grau de confiabilidade do conteúdo de uma proposição no momento de sua enunciação (evidente, certo, possível, semelhante, pouco provável, absurdez, contraditório, etc).

Duval descreve também o *valor epistêmico teórico* como em princípio independente do seu interlocutor e é associado ao estatuto da proposição num *corpus* teórico subjacente (teorema, proposição, axioma, hipótese, etc). Neste caso, o caráter que se coloca em destaque é o valor lógico/operacional em detrimento do conteúdo ou significado para o sujeito.

No contexto de ensino, quando nos atemos a atividade de demonstração de um estudante, que elementos devemos considerar? Com avaliar o *valor epistêmico semântico* e o *valor epistêmico teórico* pertinente às suas produções escritas? Como identificar no seu discurso os significados atribuídos às figuras e desenhos geométricos? Com interpretar a evolução de um raciocínio matemático que se manifesta por meio de uma *argumentação abdutiva*?

Pelo limites impostos deste escrito, não podemos responder a todos estes questionamentos, entretanto, apenas uma parte deles. Na próxima seção, descrevemos o ambiente em que se desenvolveu o estudo, os pressupostos adotados e sua operacionalização ao decorrer da investigação.

Descrição de pesquisa

A pesquisa de natureza qualitativa se caracterizou por um *design* de investigação (Ponte, 1994, p. 5) em caráter exploratório, desenvolvida no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, no ano de 2011. Realizamos um estudo descritivo no curso de Engenharia da Computação com o objetivo de identificar as dificuldades relacionadas à atividade de demonstração. Os dados recolhidos na intervenção são referentes aos alunos 2, 4, 5 e 10. Utilizamos dados provenientes de *entrevistas semiestruturadas*, *protocolos escritos* pelos sujeitos e os dados (imagem e áudio) capturados na atividade de *desktop* fornecidos pelo *software camtasia*.

Apoiamos-nos na perspectiva de Fischbein (1993) e Duval (1993). Tal opção serviu para orientar a investigação, no que se refere a recolha e análise de dados (Ponte, 1994, p. 6). Deste modo, escolhemos duas situações problema na quais o estabelecimento e uso de definições condicionam a formulação e uso de qualquer sentença proposicional formulada no intuito da busca por uma solução. Apresentamos então o primeiro problema discutido em Wagner (2006).

Problema 1. Mostre que as alturas de um triângulo se cortam em um ponto.

Fonte: Wagner (2006) e Lima; Carvalho; Wagner & Morgado (1999).

<u>Comentários</u>: Esta situação problema, do ponto de vista da lógica-proposicional, pode ser descrita por uma sentença do tipo $\underset{hipótese}{H} \rightarrow \underset{tese}{T}$, todavia, o modelo de raciocínio para a prova desta propriedade envolve o modelo de *redução ao absurdo*, que equivale a empregar $\left(H \wedge \sim T\right) \rightarrow \underset{falsidade}{f} \Leftrightarrow \underset{hipótese}{H} \rightarrow \underset{tese}{T}$. Os estudantes costumam apresentar várias dificuldades com este modelo. Ademais, a elaboração de *figuras geométricas* (FISCHBEIN, 1993) proporciona certas incompreensões. Neste problema, podemos prever a elaboração de duas figuras que dependem da verificação do modelo de inferência conhecido como prova por contradição (*reductium ad absurdum*).

Problema 2. Mostre que para um quadrilátero qualquer os pontos médios relativos a cada um dos lados descrevem um paralelogramo.

Fonte: Fischbein (1993, p. 150-151).

<u>Comentários</u>: Nesta situação os sujeitos participantes conhecem a propriedade segunda a qual um paralelogramo possui diagonais que se encontram nos seus respectivos pontos médios ou possui lados paralelos. Nesta situação, o auxílio computacional pode

impulsionar um *valor teórico epistêmico* das ilações produzidas nas situações de visualização. Reparemos na figura 1 a descrição de um quadrilátero qualquer.

Nele marcamos os pontos médios M_1, M_2, M_3, M_4 correspondentes a cada lado e, ao explorarmos a manipulação da figura, conjecturamos, com amaro na visualização e percepção, que o quadrilátero resultante é um paralelogramo. Vale observar que tal fato pode ser verificado pelo uso da Geometria Plana ou da Geometria Analítica.

O uso do *software* neste caso permite comparar os dados formulados a partir da visualização, com os dados e sentenças proposicionais construídas em decorrência do emprego de inferências lógicas requeridas nas demonstrações.

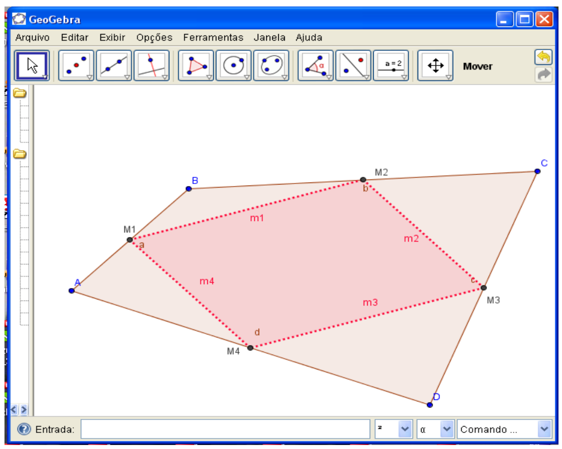

Figura 18: Figura fornecida pelo Geogebra possibilita conjecturas sobre a propriedade.

Ademais, com o uso computacional, a possibilidades de experimentação da propriedade fundamental do paralelogramo possibilita a produção de sentenças proposicionais que envolvem um *valor epistêmico semântico*. Na próxima seção descrevemos o ambiente de desenvolvimento do estudo empírico. Sublinhamos que consideramos os *valores epistêmicos teóricos* e *semânticos* atribuídos pelos estudantes em atividade e analisamos também suas demonstrações do ponto de vista lógico.

Discussão dos dados

No primeiro caso, destacamos a produção do aluno 2. Reparemos que no desenho produzido pelo mesmo, o sujeito escolhe os vértices particulares $A=(0,0)$, B=(5,1) e C=(3,5) na resolução do problema 1. Em entrevista, ao ser questionado do motivo de sua escolha indevida, justificou "[...] escolha para ver se dava certo...foi aleatório. Por exemplo, você tinha indicado naquela hora. Não, era para fazer por variáveis mesmo". Registramos aqui que sua figura já envolve um *valor epistêmico semântico* que confirma uma tese ainda não verificada formalmente.

Na figura abaixo vemos o esboço da solução do problema 1. Todo seu raciocínio levou em conta um caso particular. O *valor epistemológico teórico* foi considerado correto.

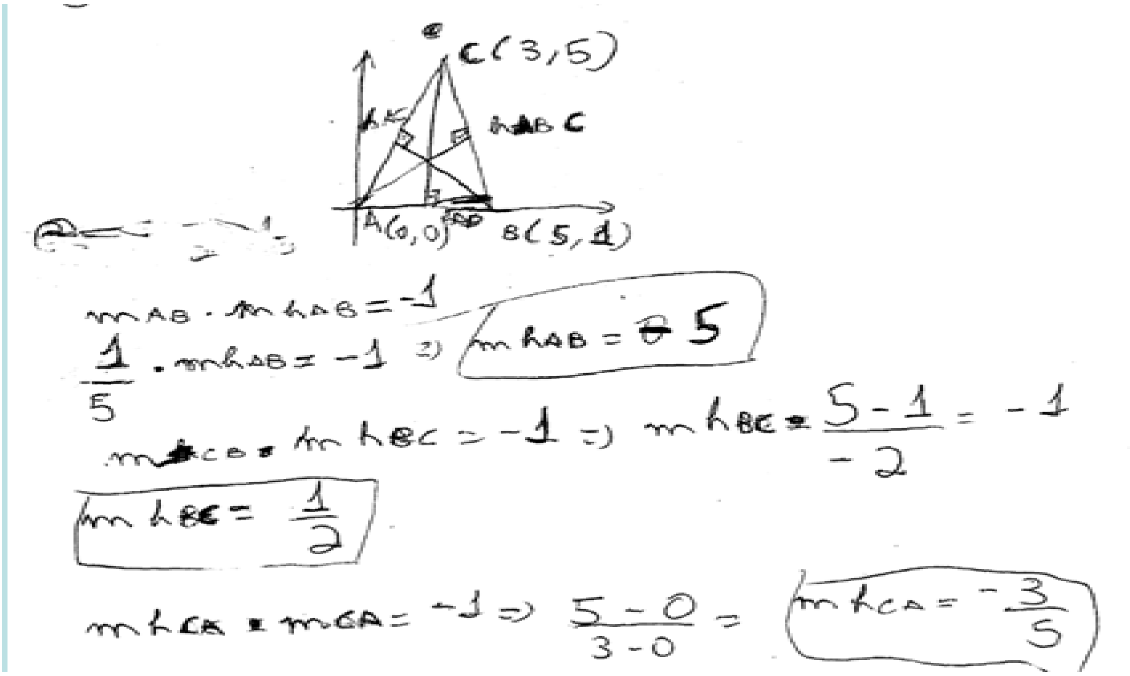

Figura 19. O aluno 2 resolveu o problema 1 usando a própria tese

Em relação ao 2º problema, explicou que:

> [...] é não é não....a intenção era tomar um quadrilátero qualquer....não tem como desenhar e dizer que é qualquer....como vai fazer...mas como é paralelogramo...os lados são paralelos...mas para chegar ai tem que saber que os dois lados são paralelos?

Registramos as dificuldades recorrentes em todos os alunos no sentido de elaborar uma figura (*conceito figural*) que significa/interpreta a situação problema 2. Aqui, os sujeitos recorreram ao uso do *software Geogebra* (figura 1).

O aluno 4 empregou uma atividade argumentativa e dedutiva. Por outro lado, o aluno 4 assumiu um *valor epistêmico semântico* equivocado na medida em que usou o fato que se quer demonstrar, ou seja, que existe um único ponto de encontro das alturas. Notemos ainda que o aluno 4 não empregou o *método de redução ao absurdo* e sim uma demonstração direta.

Do ponto do ponto vista lógico, o aluno 4 empregou $T \rightarrow T$, o que podemos perceber pelo seu desenho. Deste modo o mesmo não conseguiu verificar a tese designada pelo problema 1. Neste como em outros casos, prevemos o surgimento de dificuldades, sobretudo, quando o solucionador de problema tenciona elaborar um desenho antes e depois da verificação formal da propriedade ensejada.

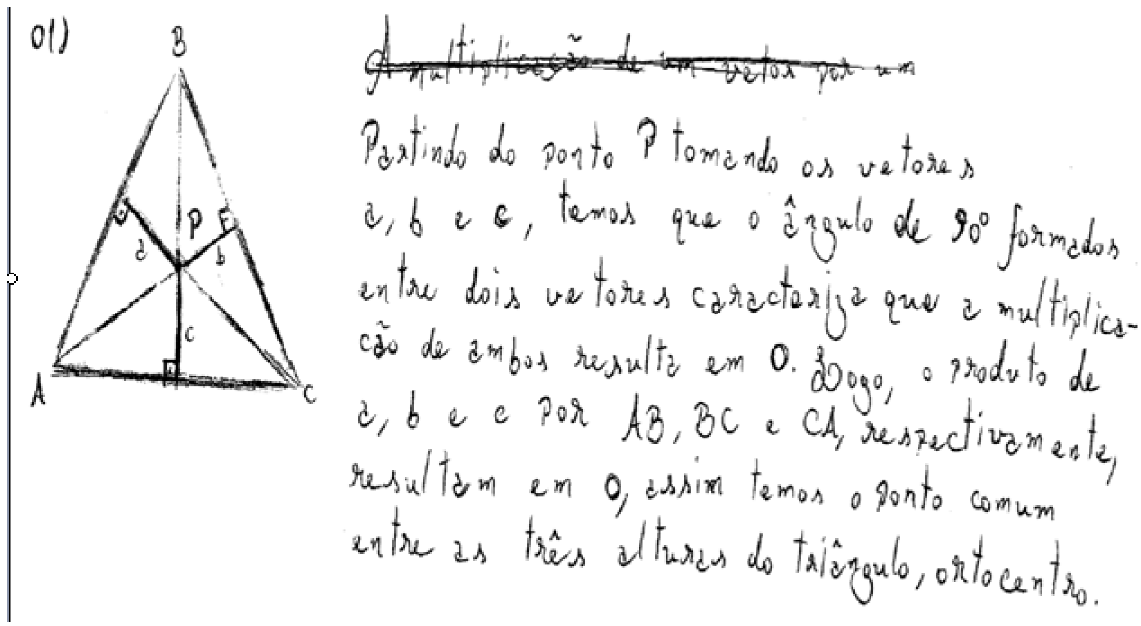

Figura 20. O aluno 4 resolveu o problema 1 usando a própria tese

Na sequência exibimos o extrato da solução do aluno 5 (figura 4). O que chama atenção aqui é sua descrição do desenho explicativo da situação. Ademais, destacamos neste caso o que o *valor epistêmico teórico* está errado, uma vez que sua figura nos remete de partida a *imagem mental* de um quadrado.

Por outro lado, no problema 2, fornecemos um quadrilátero qualquer. Quando questionado, respondeu:

> Pelas coordenadas podemos notar que não é um retângulo...porque desenhar é difícil....mas pelas coordenadas....as diagonais se encontram no ponto médio....mas supondo que se encontram...se não der certo...mostrou que refutou o que diz aqui...se deu certo....todo quadrilátero tem esta regra...

Destacamos aqui as dificuldades manifestadas pelos sujeitos 2, 4, 5 e 10 na descrição de uma representação particular de um quadrilátero qualquer. Os dados evidenciam que a *imagem mental* empregada pelos sujeitos, frequentemente, diz respeito a um quadrado (figura 4) ou retângulo, apesar de que a situação problema 2 exige um *valor epistêmico teórico* relacionado a um quadrilátero qualquer.

Nestes casos observamos uma contradição entre os *valores epistêmicos semânticos* e os *valores epistêmicos teóricos* pertinentes ao problema 2. Observamos ainda (figura 4) a ausência de organização e hierarquização necessárias no ritual de demonstração em Geometria. O aluno 5 empregou a língua materna do lado esquerdo e exibiu várias equações do lado direito sem explicitar que se apoiou em regras de inferências que tiveram um marco inicial ancorado na figura particular (quadrado).

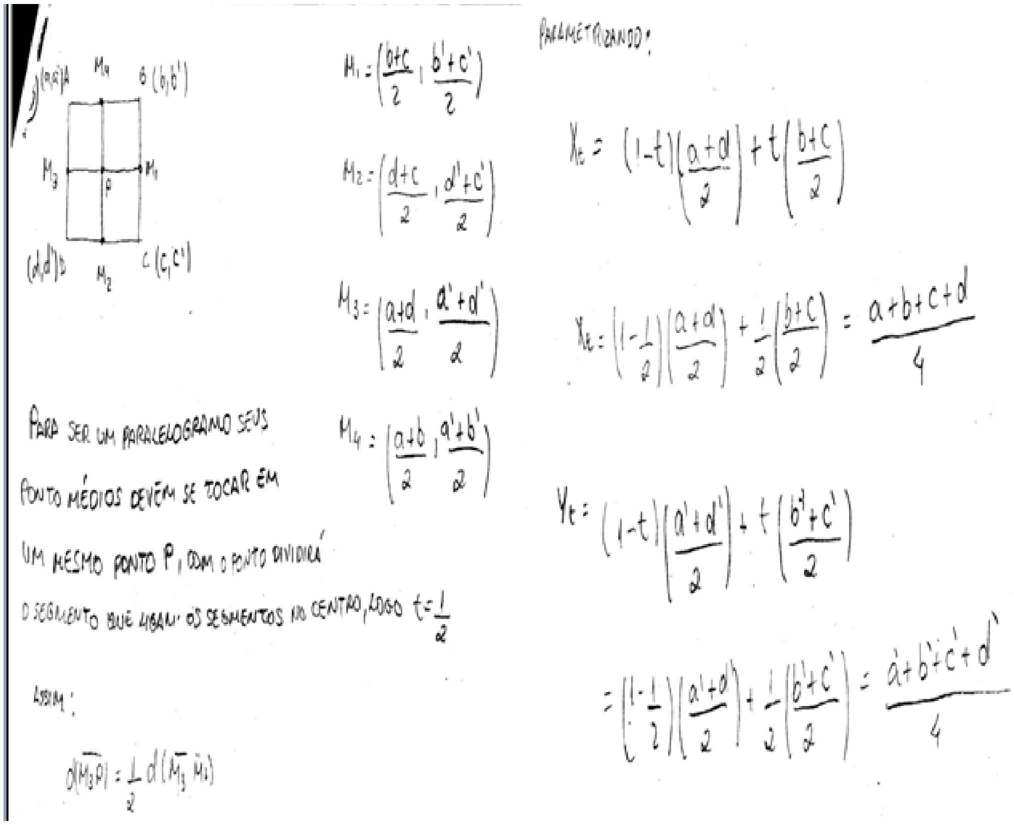

Figura 21. O aluno 5 manifestou valores epistêmicos e teóricos em contradição

A partir da fala do aluno 5 e da sua argumentação acima, registramos que os valores epistêmicos teóricos e semânticos, neste caso, estão em contradição, deste modo, apenas em situação da aplicação de *entrevistas clínicas* (PONTE, 1994, p. 4) conseguimos extrair a verdadeira intenção do aluno 5 na resolução do problema 2.

Por fim, apresentamos o extrato do aluno 10. O mesmo destacou a sentença que envolve uma fato admitido como verdadeiro neste contexto relativo a propriedade de um paralelogramo. Vale sublinhar que o sujeito 10 adotou um *conceito figural* para descrever sua estratégia que reflete sua *imagem mental* sobre um quadrilátero qualquer de vértices designados pelos pontos ABCD (figura 5). .

Sublinhamos ainda a falta de orientação e organização na disposição do discurso do aluno 10 no texto. Seu discurso desrespeita o sentido *standard* que se emprega na demonstração em Geometria e o leitor precisa identificar as relações conceituais entre cada trecho que envolve a língua natural e equações condicionadas pelas inferências.

Diferentemente do aluno 5, o aluno 10 empregou noções exclusivas da Geometria Analítica e partiu de uma *figura* que envolve um *conceito figural* em adequação às hipóteses do problema 2. O quadrilátero qualquer exibido pelo aluno 10 evidenciou que este sujeito possui uma *imagem mental* pertinente ao conceito de quadrilátero se mostrou mais ampla e geral, quando comparada aos demais participantes da investigação.

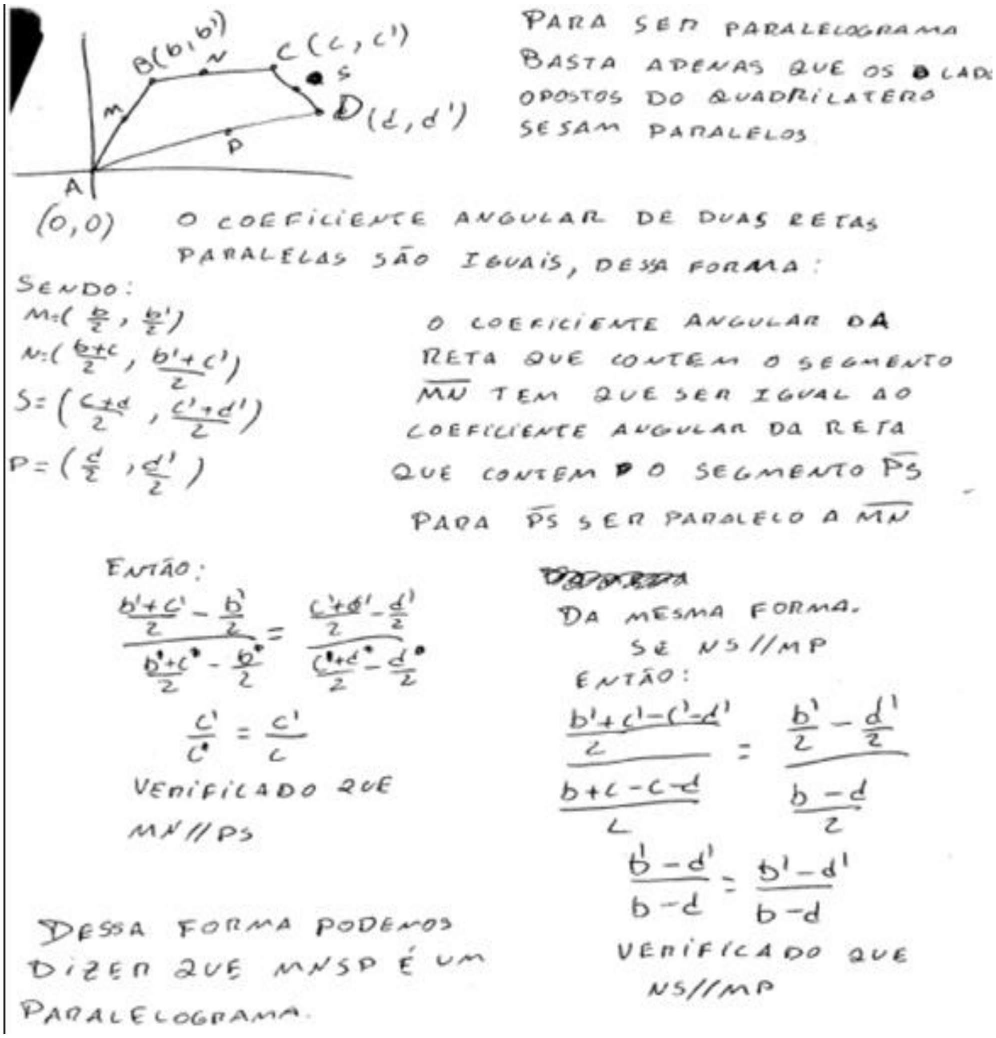

Figura 22. O aluno 10 manifestou uma atividade de demonstração fora do modelo standard de prova e demonstração em Matemática.

Resultados e considerações

Realizamos um estudo de caso envolvendo uma *observação participante* de caráter exploratório que visou compreender os processos particulares e dinâmicos envolvendo a atividade de demonstração em Geometria Analítica. As atividades dos alunos envolvendo demonstrações em Geometria Analítica apresentaram elementos que merecem grande atenção, uma vez que estudos (GOLDBACH et al, 2011, p. 27) apontam indicadores preocupantes.

Nos documentos escritos e nas entrevistas, evidenciamos as dificuldades referentes ao método de *redução ao absurdo*, exigido no problema 1. Ademais, o método de *redução ao absurdo* exige assumir de modo provisório a negação da tese, deste modo, na condição em que o sujeito emprega um desenho (aluno 2), deverá também descrever outro desenho no final da demonstração.

Os resultados apontaram que: os alunos empregam a própria tese na solução dos problemas propostos; descrevem desenhos e figuras com *valor epistêmico teórico* em contradição com o *valor epistêmico semântico*; manifestam uma produção escrita que desrespeita o modelo *standard* em Matemática de se escrever uma demonstração; não distinguem *hipótese* de *tese* e em certos casos, iniciam sua argumentação a partir da própria tese.

Ademais, alguns sujeitos manifestam *imagens mentais* restritas dos conceitos figurais pertinentes aos problemas requeridos. Tal tipo de restrição e limitação, em alguns dos sujeitos (aluno 5), comprometeu a produção de sentenças proposicionais que detinham um *valor epistêmico semântico*.

Por fim, algumas escolhas arbitrárias feitas em *Geometria Analítica* evidenciam a rica relação conceitual com a *Geometria Plana*, e, em virtude dos problemas propostos possuírem uma intrigante conexão com os saberes estudados de *Geometria Plana*, a manifestação de incompreensões nas atividades de argumentação e demonstração se mostrou maior, como previsto em Duval (1993, 1995), no caso das demonstrações. Todavia, o uso do *software* se mostrou positivo no sentido de proporcionar a modificação ou eliminação de *imagens mentais* sem relação lógica ao requeridos nas situações problema.

“Certamente que os resultados apontados neste estudo não permitem uma ulterior generalização” (Ponte, 1994, p. 10), todavia, o objetivo deste estudo que ora apresentamos não tinha tal pretensão, e sim, produzir conhecimentos acerca de um objeto matemático particular, inserido no contexto de ensino e aprendizagem em Matemática.

Referências

Duval, Raymond. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive ? In : *Le cahier Petit*, nº 31, 37-61.

Duval, Raymond. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine*. Paris: Peter Lang Edition.

Fischbein, Efrain. (1993). The theory of figural concepts. In: *Educational Mathematics Studies*. 24, 139-162.

Lima. Elon. L; Carvalho, Paulo, C; Wagner, Eduardo & Morgado, Augusto. C. (1999). A Matemática do ensino médio. v. 3, Rio de Janeiro: SBM.

Goldbach, M. S. et al. (2011). Identificación de los errores e la resolución de problemas de Geomtria Analítica y su comparación con el rendimiento académico en alumnos de ingeniería. In: *Premisa*, 13(48), 6-27. Disponível em: http://www.soarem.org.ar/revistapremisa.htm. Acessado em: 12 de abril de 2012.

Pedemonte, Betina. & Reid, David. (2011). The role of abduction in proving process. In: *Educational Mathematics Studies*, nº 76, 281-303.

Ponte. João. P. (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.

Vagner, Eduardo. *Aplicações de Geometria Analítica*. (2006, 01 janeiro). Acesso em: 24/12/2011. Disponível em: http://video.impa.br/