# Educación

Sección a cargo de

**María José González**

*El actual currículo de matemáticas de la etapa secundaria da una gran importancia a procesos de razonamiento tales como la generalización. La investigación en Educación Matemática viene estudiando el modo en que se desarrollan estos procesos a través de distintos contenidos matemáticos. El tipo de representación que los estudiantes utilizan para expresar su razonamiento también es objeto de estudio ya que influye de manera decisiva en sus posibilidades para alcanzar la generalización. En el trabajo que se presenta a continuación, se analizan diferentes formas de expresar la generalización que utilizan estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas. Los autores han realizado un estudio en el que han participado 359 estudiantes de secundaria. Identifican la representación gráfica como una herramienta útil para lograr la generalización y analizan su conexión con otras formas de representación.*

# Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones

por

**María C. Cañadas, Encarnación Castro y Enrique Castro**

## 1. Introducción

Las investigaciones centradas en estudiar la conexión entre el álgebra y la forma de expresar la generalización son numerosas. Destacamos el trabajo de Mason, Graham, Pimm y Gowar [20] como uno de los pioneros. Los resultados de estas investigaciones sustentan la idea de que dicha conexión no parece ser directa para los estudiantes de educación secundaria (e.g. [17], [18]). Comúnmente se acepta que el lenguaje algebraico no es la única forma de expresar la generalización. Mason y Pimm [21] consideran que el lenguaje natural juega un papel fundamental en el proceso de generalización. Radford [28] muestra cómo algunos estudiantes usan expresiones verbales y gestos para expresar la generalización. En 2011, en el grupo de trabajo sobre pensamiento algebraico del Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, diferentes autores se han centrado en explicitar y debatir sobre las estrategias que siguen los sujetos para generalizar así como en las distintas formas mediante las que expresan esas generalizaciones ([6]).

Por nuestra parte, actualmente estamos inmersos en un proyecto de investigación cuyo objetivo general es investigar, desde una perspectiva de modelización, la forma en la que los modelos y representaciones son construidos y utilizados en la resolución de problemas en Educación Matemática, siguiendo la tendencia de los últimos años que reconoce la necesidad de llevar a cabo investigaciones que profundicen en el modo en que el tipo de representación se relaciona con las formas de razonamiento inductivas y con la generalización. Esta necesidad viene justificada, en parte, por dos rupturas importantes que se producen cuando los estudiantes pasan de las expresiones no simbólicas a las simbólicas. La primera ruptura se produce con la geometría que se percibe en los patrones y la segunda se produce con las características numéricas de estos patrones ([4]).

En este artículo fijamos la atención en la generalización que realizan los estudiantes en un contexto de resolución de problemas de carácter inductivo en los que se encuentran involucrados diferentes sistemas de representación. Las variables de tarea y el proceso de selección de los problemas han sido descritos en [4]. Presentamos resultados sobre las formas de expresar la generalización y su relación con las representaciones utilizadas en los enunciados para expresar los casos particulares en un cuestionario escrito constituido por seis problemas que involucran sucesiones. Comenzamos presentando las principales ideas que conciernen a nuestra aproximación a la generalización y a las diferentes representaciones, situando la atención en diferentes tipos de generalización. En segundo lugar, presentamos las preguntas de investigación que aborda este artículo. En tercer lugar presentamos una descripción de la metodología empleada y, posteriormente, presentamos los hallazgos y las interpretaciones, finalizando con las conclusiones del trabajo realizado.

## 2. Pensamiento algebraico y generalización

Se ha constatado que la adquisición del dominio y la comprensión del lenguaje algebraico es una cuestión problemática para los estudiantes ([1], [3], [14], [15], [25], [32]). Desde una aproximación semiótica, se considera que los estudiantes están pensando de un modo algebraico cuando *actúan para llevar a cabo las acciones que requiere una tarea de generalización* ([28, p. 258]). Desde esta aproximación, la generalización se alcanza cuando los estudiantes son capaces de identificar un patrón común que proviene de algunos casos particulares y también son capaces de aplicar esta característica común a otros casos particulares.

Pólya [26] considera la generalización como una actividad en la que se acumulan ejemplos y se detecta y se sistematiza una regularidad. Esta idea de generalización es la que Dörfler [9] denomina *generalización empírica*; parte del trabajo con casos particulares y está relacionada con la identificación de patrones y, en general, el razonamiento inductivo. La vinculación entre la generalización y el razonamiento inductivo ha sido puesta de manifiesto por Cañadas y Castro [5]. Estas autoras, partiendo de los trabajos de Pólya [26] y Reid [30], desarrollaron un modelo para describir el razonamiento inductivo que emplean los estudiantes de educación secundaria en la resolución de tareas de generalización. Este modelo está constituido por siete pasos: (a) trabajo con casos particulares, (b) organización de casos particulares, (c) identificación de patrón, (d) formulación de conjetura, (e) comprobación de la conjetura, (f) generalización y (g) demostración. En este modelo, el razonamiento inductivo equivale a lo que Pólya [27] llama inducción. Diferentes autores, incluyendo a Pólya, afirman que la generalización es un punto clave en el proceso de adquisición del conocimiento matemático ([8], [24], [22]).

Una situación particular es la generalización que parte de un único ejemplo en el que, con la indicación que corresponda e ignorando algunas características no relevantes, sirve de ejemplo genérico donde se puede «ver» lo general. Los ejemplos genéricos constituyen representantes de una clase que incluye a un conjunto de elementos que comparten un patrón o regularidad. En este sentido, la generalización a partir del ejemplo genérico requiere de una mayor abstracción que la que parte de varios casos particulares ([19], [21], [31]).

Como se desprende de lo presentado hasta este momento, la generalización puede verse como una «generalización de patrones», y esto ha hecho que se considere una de las rutas destacadas para introducir a los estudiantes en el álgebra ([20], [29]) pero no la única. Por tanto, el álgebra no es la única forma de expresar un patrón de forma general.

## 3. Representaciones en la expresión de la generalización

En Educación Matemática se distingue entre representaciones internas y externas en relación con las formas de expresar el conocimiento. Las representaciones externas permiten expresar conceptos e ideas, haciendo visible las representaciones internas que posee un sujeto respecto a cierto conocimiento, además de permitir la comunicación respecto a dicho conocimiento ([10], [12]). En este artículo nos centramos en las representaciones externas que producen los estudiantes, aquellas que tienen una traza o soporte tangible, incluso cuando este soporte presente un alto nivel de abstracción, ya que son las que podemos observar.

Dentro de las representaciones externas, en la literatura se reconoce la utilidad de las representaciones múltiples (e.g. [34]) en los procesos de construcción de esquemas. Cañadas y Figueiras [7] distinguen dos tipos de representaciones múltiples: (a) representaciones combinadas, que hacen referencia al uso de diferentes representaciones (con el mismo significado que las representaciones múltiples) y (b) representaciones sintéticas, que son representaciones múltiples con la condición adicional de que deben ser consideradas como un todo conjunto para dar sentido a las respuestas de los estudiantes.

Como hemos indicado anteriormente, el álgebra es una forma de expresar la generalización, pero no la única. Radford [29] distingue entre generalización algebraica y aritmética. Según este autor, la generalización algebraica *se apoya en la identificación de algo común que después es generalizado a todos los términos de la sucesión y* *que sirve como garantía para construir expresiones de elementos de la sucesión que persisten más allá del campo perceptual* ([29, p. 42]). La generalización aritmética está asociada a la representación numérica. Los estudiantes que generalizan aritméticamente generalmente han identificado patrones y usualmente son conscientes de que este patrón no es práctico para otros términos de la sucesión.

En el contexto de analizar el proceso de generalización en problemas que involucran sucesiones en un cuestionario escrito de resolución de problemas, Cañadas y Castro [5] distinguen entre las representaciones numérica y verbal como dos formas de expresar el término general de una sucesión. La primera concierne al uso de símbolos, en los que cada término de la sucesión puede obtenerse sustituyendo los símbolos por números particulares. La representación verbal se refiere al uso del lenguaje oral para expresar la generalización. Queda abierta una cuestión relativa al papel de la representación gráfica en el proceso de generalización y la expresión de esa generalización. Es esta cuestión el foco principal de este trabajo.

## 4. Preguntas de investigación

Consideramos dos focos de interés para este artículo: (a) el proceso de generalización que llevan a cabo los estudiantes de educación secundaria y (b) la expresión de dichas generalizaciones. Dentro de estos focos nos plantemos indagar sobre:

- la función que juega la representación gráfica en el proceso de generalización;
- la forma en que los estudiantes expresan la generalización;
- las características de la expresión gráfica de la generalización.

## 5. Metodología

### 5.1. Estudiantes

La muestra la constituyeron 359 estudiantes de 3.º y 4.º de ESO de cuatro centros públicos españoles. La mayoría de los estudiantes tenían entre 14 y 16 años. Los centros fueron elegidos intencionalmente en tres provincias: Granada, Madrid y Teruel. Seleccionamos las sucesiones lineales y cuadráticas como contenido matemático para el trabajo de los estudiantes.

Para tener constancia de los conocimientos previos de estos estudiantes sobre los objetos matemáticos sobre los que iban a trabajar, analizamos sus experiencias educativas relativas a la generalización, la resolución de problemas, sucesiones y álgebra. Realizamos este análisis a través de cuatro fuentes: (a) currículo nacional español, (b) entrevistas informales a los profesores de los estudiantes, (c) libros de texto utilizados por los estudiantes y (d) cuadernos de trabajo de los estudiantes.

El actual currículo español de secundaria [23] incluye el proceso de generalización de manera explícita. Asimismo, alude al razonamiento como uno de sus principales objetivos y contiene acciones relacionadas con el razonamiento inductivo como: (a) identificar patrones numéricos, (b) encontrar estrategias para sustentar las argumentaciones de los estudiantes y (c) formular y probar conjeturas.

Los estudiantes con los que hemos trabajado en este estudio habían trabajado previamente las sucesiones y problemas relacionados con ellas en los que se utiliza razonamiento inductivo. Este tipo de problemas, por lo general, se presentaban mediante casos particulares expresados numéricamente y se daban indicaciones sobre los pasos que había que realizar para llegar a resolverlos. Los estudiantes habían comenzado el estudio del álgebra entre uno y dos años antes de que la investigación se llevara a cabo. La enseñanza incluía trabajo relativo a la interpretación de fórmulas y expresiones algebraicas y ecuaciones de primer grado.

Consideramos, por todo ello, que estos estudiantes tenían la experiencia necesaria como para que nos pudiéramos centrar en las preguntas de investigación planteadas. Específicamente, los estudiantes tenían el conocimiento del contenido matemático suficiente sobre sucesiones. Por otra parte, nuestro análisis de las experiencias educativas previas de los estudiantes nos mostró que no estaban acostumbrados a resolver el tipo de problemas que se les plantean en esta investigación.

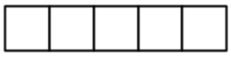
### 5.2. Problemas Propuestos y Procedimiento

Para llevar a cabo el estudio, elaboramos un cuestionario escrito compuesto por seis problemas. Se pidió a los estudiantes que trabajasen de forma individual sobre el cuestionario durante una hora. Los problemas fueron seleccionados de acuerdo con el objetivo general de nuestro trabajo y teniendo en cuenta las características que provienen de la realización del *análisis de contenido* ([11]) de las sucesiones de números naturales: (a) tipo de sucesión, (b) sistema de representación utilizado en el enunciado y (c) tipo de tarea propuesta ([4]). Se consideraron problemas que involucraban sucesiones lineales y cuadráticas. En su enunciado se utilizaron diferentes sistemas de representación para las sucesiones. Considerando las sucesiones como un tipo particular de funciones, tomamos en consideración los cuatro sistemas de representación usados tradicionalmente para estas: (a) gráfico, (b) numérico, (c) verbal y (d) algebraico ([13]). Los problemas permitían a los estudiantes trabajar sobre la información presentada a través de casos particulares que estaban expresados gráfica, numérica o verbalmente en el enunciado. Además, cada problema estuvo centrado en una tarea de *generalización lejana* ([33]), es decir, solicitaba un número de elementos imposible de obtener mediante recuento directo. Los casos particulares fueron presentados en los problemas para incitar a los estudiantes a generalizar.

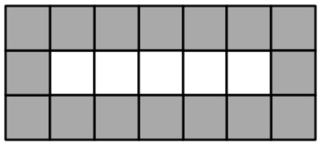
En lo que sigue, nos centramos en tres de los seis problemas que constituyeron el cuestionario: los problemas 3, 4 y 5. En ellos, la acción específica que se solicita es extrapolar. El problema 3 representa un ejemplo genérico. Se trata de un problema que ha sido utilizado en diversas investigaciones desde el trabajo de Kühemann [16]. Los problemas 4 y 5 forman parte del tipo de tareas que se suelen proponer en situaciones de reconocimiento de patrones.

Atendiendo a las variables de tarea consideradas, los tres problemas, presentan las características que recogemos en la tabla 1.

**Problema 3.** Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:



¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma en que lo hemos hecho en el dibujo? Justifica tu respuesta.

**Problema 4.** Se está organizando la primera ronda de un torneo. Cada equipo tiene que jugar con cada uno de los equipos restantes dos partidos -uno en casa y otro fuera-. Si la convocatoria es autonómica, participarán 22 equipos. Si la convocatoria es nacional, habrá 230 equipos.
Calcula el número de partidos que se jugarán en la primera ronda de ese torneo si la convocatoria es autonómica y cuántos se jugarán si la convocatoria es nacional. Justifica tu respuesta.

**Problema 5.** Se tiene la siguiente secuencia de números:

1, 4, 7, 10,...

Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia. Justifica tu respuesta.

| **Problema** | **Sistema de representación** | **Tipo de sucesión** | |
|---|---|---|---|
| | | Lineal | Cuadrática |
| 3 | Gráfico | x | |
| 4 | Verbal | | x |
| 5 | Numérico | x | |

Tabla 1: Variables de tarea en los problemas 3, 4 y 5.

## 6. Resultados e interpretación

En primer lugar realizamos un análisis cuantitativo de datos para identificar los pasos del razonamiento inductivo que habían seguido los estudiantes. Para ello, tuvimos en cuenta el modelo de razonamiento inductivo de siete pasos mencionado anteriormente ([5]). Analizamos la utilización de estos pasos por cada uno de los estudiantes en las respuestas a cada uno de los problemas. El sexto paso del modelo es la generalización. Considerando que la generalización puede ser alcanzada a partir de patrones identificados en los sistemas de representación numérico, algebraico, verbal o gráfico, mostramos en la tabla 2 el número de estudiantes que expresaron la generalización en los diferentes sistemas de representación.

| | **Numérico** | **Algebraico** | **Verbal** | **Gráfico** |
|---|---|---|---|---|
| Problema 3 | 125 | 3 | 57 | 11 |
| Problema 4 | 174 | 1 | 69 | 0 |
| Problema 5 | 222 | 57 | 26 | 0 |

Tabla 2: Número de alumnos que utilizan cada sistema de representación.

### 6.1. Generalización aritmética

En los tres problemas, la generalización más frecuentemente utilizada por los estudiantes fue la aritmética. Por ejemplo, en el problema 3, los estudiantes que generalizaron aritméticamente llegaron a identificar el patrón general a partir de los casos particulares y utilizaron este patrón general para calcular el número de baldosas grises para el caso particular por el que pregunta el enunciado. Sin embargo, este tipo de representación no les permitió obtener una expresión para cualquier término de la sucesión.

### 6.2. Generalización gráfica

Los estudiantes no utilizaron la representación gráfica en el proceso de resolución de los problemas 4 y 5. Sí lo hicieron en el problema 3, donde los casos particulares fueron presentados gráficamente en el propio enunciado. Un ejemplo de la utilización de la representación gráfica lo ilustramos en la figura 1. Cabe señalar que la representación gráfica siempre se acompañó de otros tipos de representaciones; los especificamos en cada caso.

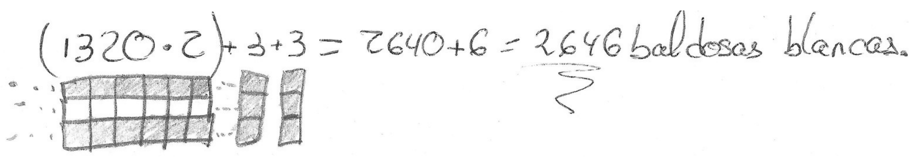



Figura 1: Generalización expresada aritmética y gráficamente.

En la figura 1 se diferencian dos partes en el dibujo que realizó el estudiante. En una primera, se distingue cómo el estudiante consideró los dos lados verticales construidos por baldosas grises e identifica que estos lados permanecen con el mismo número de baldosas grises, independientemente del número de baldosas blancas que haya. La segunda parte del dibujo son las dos filas de baldosas grises que están por encima y por debajo de las baldosas blancas. Esto parece indicar que el estudiante interpretó que es necesario el doble número de baldosas grises que de baldosas blancas. El estudiante expresó gráficamente el patrón de la sucesión, mostrando un caso particular diferente del que se muestra en el enunciado (para seis baldosas blancas en vez de cinco).

Los puntos suspensivos de la figura 1 los interpretamos como que el estudiante fue consciente de que el patrón observado en ese caso particular se podía aplicar a otros términos de la sucesión. En este contexto, los puntos suspensivos podrían ser interpretados como «repetiría esto tantas veces como sea necesario». Este estudiante aplicó el patrón común a las 1320 baldosas de forma aritmética. Así, por un lado, la representación gráfica ayudó al estudiante a alcanzar la generalización y, por otro lado, el estudiante identificó el patrón común en la expresión gráfica más allá del ejemplo genérico mostrado en el enunciado. Por esto, consideramos que la generalización fue expresada gráficamente. Otros estudiantes fueron más allá de la generalización gráfica y expresaron esa idea general verbal o algebraicamente. Ilustramos esta situación con un ejemplo que mostramos en la figura 2.

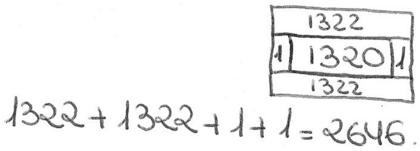



Figura 2: Generalización expresada aritmética y gráficamente.

Como se observa en la figura 2, este estudiante hizo una representación gráfica que recoge las características comunes a partir del ejemplo genérico del enunciado, sin trazar las líneas que separan diferentes baldosas. El estudiante utilizó esta generalización para calcular el número de baldosas que el problema requiere. Este es otro ejemplo de generalización gráfica y aritmética donde el estudiante también proporcionó una expresión verbal general para cualquier número dado de baldosas blancas mediante el lenguaje natural. Algunos de los estudiantes utilizaron las representaciones gráfica y algebraica conjuntamente para dar sentido a la generalización. Presentamos un ejemplo típico de esta situación en la figura 3.

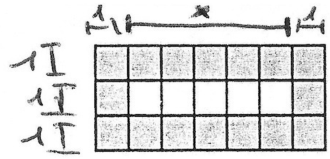


Figura 3: Generalización expresada gráfica y algebraicamente.

La figura hecha por este estudiante muestra cómo identificó los datos que permanecen constantes y los datos que cambiaban dependiendo del número de baldosas blancas consideradas.

Las representaciones de los estudiantes mostradas en las figuras 1, 2 y 3 son ejemplos típicos de los tres grupos en que clasificamos a los 11 estudiantes que generalizaron gráficamente en el problema 3, atendiendo a las representaciones que utilizaron para expresar la generalización. En el primer grupo están los estudiantes que utilizaron los puntos suspensivos para notar que el dibujo podría continuar en el sentido en que se indica. Estos estudiantes utilizaron representaciones combinadas (gráfica y aritmética). Los estudiantes del segundo grupo utilizaron números particulares en baldosas de diferentes tamaños (el tamaño de la baldosa es mayor cuanto mayor sea el número). En el tercer grupo, los estudiantes identificaron cada baldosa con el número 1 y el número de baldosas que depende del número de baldosas blancas, que es representado por $x$. Los estudiantes de los grupos 2 y 3 utilizaron representaciones sintéticas porque consideraron al menos dos representaciones como un todo para dar sentido a la generalización que expresaron.

### 6.3. Generalización verbal

La mayoría de los estudiantes que alcanzaron la generalización en los problemas 3 y 4 lo hicieron verbalmente. Por ejemplo, una respuesta de un estudiante al problema 4 fue *el resultado es el número de partidos que juega cada equipo con el resto de los equipos multiplicado por dos.*

### 6.4. Generalización algebraica

La mayoría de los estudiantes generalizaron algebraicamente en el problema 5. Algunos de ellos propusieron una fórmula que les era familiar, tal y como reconocieron. Entre ellos están los que utilizaron $a_n = a_1 + (n-1)d$ para calcular el número en la posición que se requería. Esto pone de manifiesto la generalización algebraica de estos estudiantes a partir de los casos particulares propuestos en el enunciado del problema.

## 7. Discusión

En este trabajo, hemos identificado cuatro formas de expresar la generalización: (a) aritmética, (b) gráfica, (c) verbal y (d) algebraica. La mayoría de los estudiantes que alcanzaron la generalización, lo hicieron aritméticamente, en el sentido que lo considera Radford [29]. Estos resultados concuerdan con los trabajos de Becker y Rivera [2] y son consistentes con lo que podríamos esperar de los conocimientos previos de los estudiantes.

De forma general, los resultados que hemos obtenido contribuyen a la comprensión del uso de la representación gráfica en la generalización, como era nuestro objetivo. Este tipo de representación ilustra lo que es común a todos los elementos de una sucesión pero no proporciona una expresión general para cualquier término de la sucesión. Los estudiantes parecen especialmente dispuestos a utilizar esta representación para generalizar cuando está presente en el enunciado del problema, pero no ocurre así en problemas en los que no se utiliza ese sistema de representación en el enunciado. La representación gráfica de la generalización sirvió de ayuda a los estudiantes a generalizar algebraicamente o verbalmente y así, utilizando esas expresiones, obtener otros términos particulares de la sucesión por los que preguntaba el problema. Los estudiantes que han utilizado este tipo de representación, la usaron en combinación con otros tipos de representaciones. En este sentido, podemos considerar la representación gráfica como una forma de desarrollar el pensamiento algebraico y de expresar la generalización verbal o algebraicamente. Esta idea complementa los trabajos previos que están principalmente centrados en otras formas de lograr la generalización mediante diferentes sistemas de representación ([5], [7], [29]).

La representación gráfica es suficiente, para algunos estudiantes, para responder a las preguntas planteadas porque «ven» el patrón general en el dibujo. Sin embargo, algunos de ellos regresan a la representación verbal cuando tratan de justificar sus respuestas. Esta es la principal razón por la que la generalización verbal es frecuente en estos problemas (véase la tabla 2).

Los estudiantes generalizaron algebraicamente con más frecuencia en el problema donde los casos particulares estaban expresados numéricamente. Interpretamos esto como consecuencia de la influencia del trabajo de clase. Solo un bajo número de estudiantes generalizaron algebraicamente cuando los enunciados estaban presentados en otras representaciones que no les eran familiares. En particular, la frecuencia más baja de generalización se dio en el problema 4, que fue presentado en la forma menos familiar para ellos. Esto sugiere que es más difícil para los estudiantes establecer una relación entre el álgebra y problemas de generalización en contextos no numéricos y que, de alguna forma, la idea de generalización no se trasfiere de un contexto a otro. Es decir, que el hecho de que los estudiantes sean capaces de generalizar en un contexto, no implica que sean capaces de generalizar en otros contextos.

Aunque, al igual que otros investigadores, hemos hecho un esfuerzo para identificar y describir diferentes tipos de generalización, una conclusión que obtenemos en este artículo es que, en ocasiones, es difícil distinguir entre ellas. En la mayoría de los casos en los que los estudiantes llegan a expresar la generalización gráficamente, utilizan una representación combinada-múltiple o una representación sintética. Las representaciones múltiples en la generalización parecen ser útiles para los estudiantes al expresar la generalización. La distinción entre los dos tipos de representaciones múltiples realizada por Cañadas y Figueiras [7] es una forma potente de describir cómo los estudiantes alcanzan la generalización. El trabajo que aquí presentamos muestra que la representación sintética aparece en tareas donde los casos particulares del enunciado están expresados gráficamente. La representación gráfica puede ser considerada la principal, en el sentido de que es la que promueve la aparición de otras representaciones.

Como consecuencia práctica para la docencia, indicamos que sería deseable utilizar tareas en diferentes contextos para guiar a los estudiantes hacia el álgebra como una forma de generalización. El trabajo con tareas de generalización comenzando con casos particulares expresados en diferentes representaciones sería enriquecedor para los estudiantes y fomentaría las capacidades de pensamiento algebraico porque podrían ayudarles a relacionar el álgebra con representaciones diferentes a la numérica.

## 8. Agradecimientos

Este trabajo ha sido apoyado por el proyecto EDU2009-11337 del Plan Nacional de Investigación I+D+i, financiado por el Ministerio de Educación y Ciencias y cofinanciado con fondos FEDER. Este trabajo se ha desarrollado dentro del grupo *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico (FQM-193)* del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

## Referencias

[1] A. Arcavi, Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics, *For the Learning of Mathematics* **14**(3) (1994), 24–34.

[2] J. R. Becker y F. Rivera, Generalization strategies of beginning High School algebra students, En: H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* **4** (2005), 121–128, Melbourne: PME.

[3] N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee, *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, London: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[4] M. C. Cañadas, *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*, Tesis doctoral, Universidad de Granada, 2007.

[5] M. C. Cañadas y E. Castro, A proposal of categorisation for analyzing inductive reasoning, *PNA* **1**(2) (2007), 67–78.

[6] M. C. Cañadas, T. Dooley, J. Hodgen y R. Oldenburg, CERME working group 3: algebraic thinking, *Research in Mathematics Education* **14**(2) (2012), 189–190.

[7] M. C. Cañadas y L. Figueiras, Uso de representaciones y generalización de la regla del producto, *Infancia y Aprendizaje* **34**(4) (2011), 409–425.

[8] E. Castro, M. C. Cañadas y M. Molina, El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático, *UNO* **54** (2010), 55–67.

[9] W. Dörfler, Forms and means of generalization in mathematics, En: A. J. Bishop (Ed.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (1991), 63–85, Dordrecht: Kluwer Academic.

[10] R. Duval, *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, México DC: Universidad del Valle, 1999.

[11] P. Gómez, *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2007.

[12] J. Hiebert y T. Carpenter, Learning and teaching with understanding, En: D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (1992), 65–97, New York: MacMillan.

[13] C. Janvier, Translation processes in mathematics education, En: C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (1987), 27–32, Hillsdale, New Jersey: LEA.

[14] J. Kaput, *Teaching and Learning a new algebra with understanding,* Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1998.

[15] J. Kaput, *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by «algebrafying» the K-12 curriculum*, Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 2000.

[16] D. Kühemann, Algebra, En: K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (1981), 102–119, London: Murray.

[17] L. Lee, An initiation into algebraic culture through generalization activities, En: N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (1996), 87–106, London: Kluwer.

[18] L. Lee y D. Wheeler, *Algebraic thinking in high school students: Their conceptions of generalisation and justification*, Montreal: Concordia University, 1987.

[19] R. Marrades y A. Gutiérrez, Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment, *Educational Studies in Mathematics* **44** (2000), 87–125.

[20] J. Mason, A. Graham, D. Pimm y N. Gowar, *Routes to roots of algebra*, Milton Keynes: Open University Press, 1985.

[21] J. Mason y D. Pimm, Generic examples: Seeing the general in the particular, *Educational Studies in Mathematics* **15**(3) (1984), 277–290.

[22] Mill, J. S., *System of logic, raciocinative and inductive*, London: Harper & Brothers, 1858.

[23] Ministerio de Educación y Ciencia, Orden ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria, *BOE* **174** (2007), 31680–31828, Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

[24] G. A. Neubert y J. B. Binko, *Inductive reasoning in the secondary classroom,* Washington DC: National Education Association, 1992.

[25] M. M. Palarea, *La adquisición del lenguaje algebraico y la detención de errores comunes cometidos en álgebra por los alumnos de 12 a 14 años*, Tesis doctoral, Universidad de la Laguna, 1998. Consultado el 10 de febrero de 2011 en `http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-106509_archivo.pdf`

[26] G. Pólya, *How to solve it*, Princeton, NJ: University Press, 1945. (Traducción al castellano: J. Zugazagoitia, 1965, *Cómo plantear y resolver problemas*, México: Trillas.)

[27] G. Pólya, *Le découverte des mathématiques*, Paris: DUNOD, 1967.

[28] L. Radford, The seen, the spoken and the written: a semiotic approach to the problem of objetification of mathematical knowledge, *For the Learning of Mathematics* **22**(2) (2002), 14–23.

[29] L. Radford, Layers of generality and types of generalization in pattern activities, *PNA* **4**(2) (2010), 37–62.

[30] D. Reid, Conjectures and refutations in grade 5 mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education* **33**(1) (2002), 5–29.

[31] D. Reid, Elements in accepting an explanation, *Journal of Mathematical Behavior* **20** (2002), 527–547.

[32] M. Socas, Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria, En: L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (1997), 125–154, Barcelona: Horsori.

[33] K. Stacey, Finding and using patterns in linear generalising problems, *Educational Studies in Mathematics* **20**(2) (1989), 147–164.

[34] M. W. Van Someren, P. Reimann, H. P. A. Boshuizen y T. De Jong, *Learning with multiple representations*, Oxford: Elsevier, 1998.

María C. Cañadas, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
Correo electrónico: mconsu@ugr.es
Página web: http://www.ugr.es/~mconsu/

Encarnación Castro, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
Correo electrónico: encastro@ugr.es

Enrique Castro, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
Correo electrónico: ecastro@ugr.es