¿DE QUÉ HABLAMOS CUANDO HABLAMOS DE POLÍGONO?

Mario Dalcín – Verónica Molfino Vigo
mdalcin00@gmail.com – veromolfino@gmail.com
Instituto de Profesores 'Artigas', Consejo de Formación en Educación, Uruguay

Tema: IV.2 – Formación y actualización del Profesorado.
Modalidad: Taller
Nivel Educativo: Medio Superior
Palabras clave: definición, polígono, construcción del conocimiento

Resumen
Los polígonos son abordados en diferentes cursos, en diferentes niveles: desde inicial hasta terciario. Sin embargo, cuestionando a estudiantes de formación docente sobre la definición de polígono o de alguno de sus casos particulares, como triángulo o cuadrilátero, encontramos diferencias notorias en sus concepciones.
Proponemos en el taller analizar las diferentes concepciones que se tienen de esos casos particulares, estudiar las posibilidades de generalizarlas al caso de polígono, y finalmente acordar una definición que contemple a las de los casos particulares, a las imágenes conceptuales que tenemos de los polígonos y, a la vez, permita generalizar propiedades "deseables" básicas en los polígonos.

Introducción

Seguramente los polígonos sean de los primeros conceptos geométricos que vamos construyendo a medida que vamos descubriendo el mundo que nos rodea. Incluso antes de cualquier experiencia escolar, nos manejamos en un mundo en el que muchos objetos tienen forma poligonal, tan cotidianos como ventanas, puertas, paredes, techos y pisos.
Ya en la escuela, también son los primeros objetos geométricos que nos enseñan a reconocer: triángulo, cuadrado, rectángulo, pentágono…

Como docentes de Matemática, aparecen en nuestro discurso en cualquiera de los cursos que llevamos adelante y en todos los niveles, si bien profundizamos en ellos en las unidades correspondientes a contenidos geométricos específicamente. Ahora, ¿de qué hablamos cuando hablamos de polígono?

Al cuestionarles a estudiantes de profesorado de Matemática sobre qué es un polígono, surgen muy variadas definiciones, que conducen a diferentes familias de figuras, bajo la misma etiqueta. Consideramos entonces que es necesario explicitarlas, no con el objetivo de encontrar una única definición "mejor" que las otras, sino más bien para conocer los alcances e implicancias de asumir una u otra en el aula.
Proponemos en el taller reflexionar sobre las diferentes concepciones de polígono que conviven en nuestras aulas, discutir sobre qué aspectos considerar a la hora de optar por una de ellas en un determinado curso.

Trabajo en la clase de Geometría: una práctica específica para el profesorado

La propuesta del taller forma parte de un curso anual de Geometría Euclidiana (8 'horas' semanales de 45 minutos, agrupadas en dos módulos de 4 horas cada uno) en el marco de la carrera inicial de Profesorado de Matemática (primer año), impartido en el Instituto de Profesores 'Artigas' de Montevideo, Uruguay. La primera parte del mismo se organiza en base a actividades nucleadas en el libro *Geometría Euclidiana en la formación de profesores. Exploración inicial del plano* (Dalcín y Molfino, 2013). En el curso se busca que los estudiantes trabajan en grupos de cuatro, cinco o seis integrantes.

Lo medular de las actividades son preguntas que plantean distintas situaciones problemáticas. También como actividades se plantean la búsqueda de información en libros de texto de geometría o en Internet y la reflexión sobre la información recabada, búsqueda de información acerca de la época, vida y obra de distintos matemáticos, la construcción de modelos en Geometría Dinámica y ejercicios de aplicación de los contenidos descubiertos en las situaciones problemáticas. El diseño de un curso en base a actividades es una alternativa a la forma en que tradicionalmente se ha trabajado la geometría y donde el conocimiento geométrico ya está escrito en los textos y llega al estudiante a través de la exposición del profesor. En esta propuesta de curso las actividades son planteadas para que los estudiantes las trabajen en equipos en clase (equipos que se mantienen para el trabajo domiciliario) y donde la formulación de preguntas y conjeturas es cotidiana. La responsabilidad del docente está en diseñar las actividades y en organizar el desarrollo de la clase, buscando que sean los estudiantes quienes lleven adelante las tareas propuestas y, claro está, organizando las puestas en común, institucionalizando los acuerdos alcanzados, organizando las preguntas (por lo general nuevos problemas surgidos en el transcurso de la clase) que van surgiendo en la misma dinámica de la clase y que muchas veces implican la propuesta de nuevas actividades para poder responderlas.

¿Qué dicen los libros de texto?

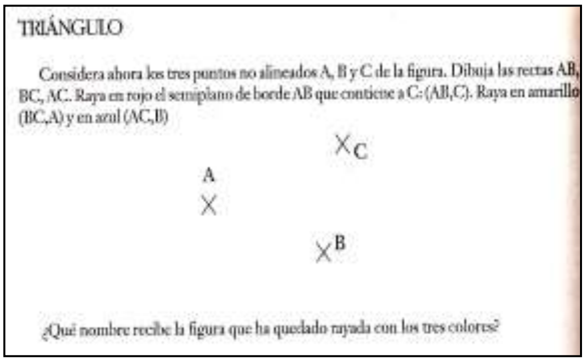
Los libros de texto tienen un papel protagónico en el discurso de aula, siendo uno de los aspectos constitutivos del discurso matemático escolar (Molfino y Buendía, 2011a). Son usados por el profesor en diversas instancias: la planificación previa a la clase, el trabajo con los estudiantes en el aula, la selección de actividades para marcar tareas domiciliarias, entre otras; lo que refuerza su rol en la institucionalización de conocimiento (Molfino y Buendía, 2011b). Es por esto que a la hora de proponer una construcción social de conocimiento, es necesario previamente conocer qué es lo que dicen los textos.

Libros de texto de ciclo básico

En Uruguay, en los cursos de ciclo básico (1º a 3º de Educación Secundaria), son bastante difundidos los de la colección Gauss y los de la colección del grupo Botadá.

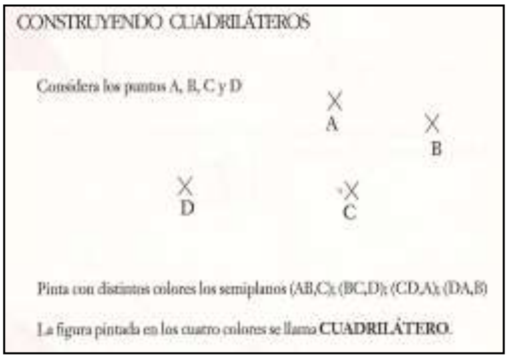
En los de la colección Gauss no figuran definiciones de ningún tipo de polígono, ni triángulo, ni cuadrilátero, ni polígono en general. En *Matemática 1°* (Belcredi y Zambra, 1998), hay un capítulo dedicado a "Construcciones geométricas" en el que se proponen actividades sobre triángulos pero no hay una reflexión explícita sobre su definición. Los restantes capítulos de geometría son sobre isometrías y geometría en el espacio. En *Matemática 2°* (Belcredi y Zambra, 1997), si bien hay un capítulo enteramente dedicado a los triángulos, en el que se desarrollan los puntos y rectas notables, tampoco figura la definición de triángulo ni una actividad que conduzca a alguna reflexión sobre ella. En otro de los capítulos de geometría, "Traslación y Rotación", se introducen los paralelogramos para dar argumentos sobre el funcionamiento de la traslación pero no figura su definición explícitamente ni una actividad que conduzca a una reflexión sobre ella.

Por su parte, en la colección del grupo Botadá, sí se introducen como objeto de estudio las definiciones de triángulo y cuadrilátero. En *Matemática 1* (Borbonet, Burgos, Martínez y Ravaioli, 1997), se define en primer lugar *semiplano*: "Toda recta r de un plano determina en él dos regiones a las que llamaremos SEMIPLANOS de borde r" (p. 129). Más adelante se plantean dos actividades que conducen a la definición de triángulo y cuadrilátero, respectivamente (p. 134 y 136):


TRIÁNGULO

Considera ahora los tres puntos no alineados A, B y C de la figura. Dibuja las rectas AB, BC, AC. Raya en rojo el semiplano de borde AB que contiene a C: (AB,C). Raya en amarillo (BC,A) y en azul (AC,B)

¿Qué nombre recibe la figura que ha quedado rayada con los tres colores?


CONSTRUYENDO CUADRILÁTEROS

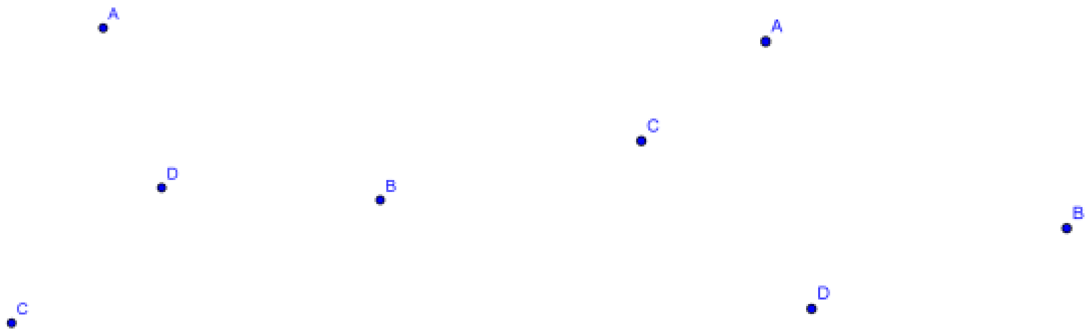
Considera los puntos A, B, C y D

Pinta con distintos colores los semiplanos (AB,C); (BC,D); (CD,A); (DA,B)

La figura pintada en los cuatro colores se llama **CUADRILÁTERO**.

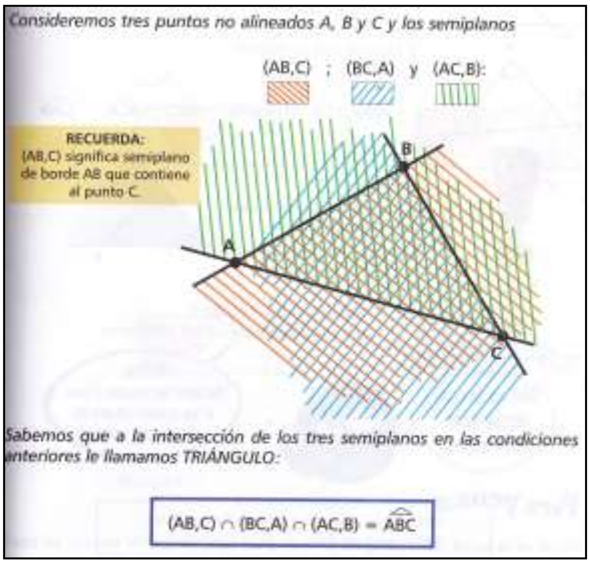
Observamos que para la definición de triángulo, se opta por una en la cual tanto contorno como puntos interiores forman parte del triángulo. Para el caso de cuadrilátero, se presenta un único caso de disposición de puntos: aquél en que el cuadrilátero formado es convexo. Y la definición que se deriva de la actividad puede ser vista como una generalización de la vista para triángulo, al igual que en ella, tanto puntos del contorno como los interiores forman parte del cuadrilátero.

No se cuestiona al estudiante sobre cuál sería el resultado de la intersección de los semiplanos dados si los puntos estuvieran en alguna de estas otras configuraciones:



No se presenta una definición, ni una actividad que conduzca a ella, de otros polígonos ni de polígonos en general.

En *Matemática 2* (Borbonet, Burgos, Martínez y Ravaioli, 2007) se presenta la definición de triángulo como intersección de tres semiplanos (p. 73):



Consideremos tres puntos no alineados A, B y C y los semiplanos

(AB,C) ; (BC,A) y (AC,B):

RECUERDA: (AB,C) significa semiplano de borde AB que contiene al punto C.

Sabemos que a la intersección de los tres semiplanos en las condiciones anteriores le llamamos TRIÁNGULO:

$(AB,C) \cap (BC,A) \cap (AC,B) = \widehat{ABC}$

Respecto de los cuadriláteros, no encontramos en ese libro un tratamiento general de los mismos, sí se trabaja específicamente sobre paralelogramos dentro del capítulo “Traslación y Rotación”. A diferencia de lo desarrollado en Matemática 2° de la colección Gauss (Belcredi y Zambra, 1997), en el que los paralelogramos son usados para la argumentación sobre el funcionamiento de la traslación, en Matemática 2 de la colección Botadá (Borbonet et al., 2007), los paralelogramos surgen a partir de la observación de lo que se obtiene al transportar un segmento según un vector dado, y la traslación es usada para justificar las propiedades de los paralelogramos. La definición de paralelogramo que se da es la siguiente (p. 151):

Paralelogramos

*Como recordarás un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.
Observa el cuadrilátero AA'B'B de la página anterior. ¿Cómo son las rectas que contienen a los lados opuestos?*

Definición
Llamaremos **PARALELOGRAMO** *a todo cuadrilátero que tenga los dos pares de lados opuestos paralelos.*

A continuación se presentan propiedades, las cuales se justifican haciendo uso del concepto de traslación desarrollado previamente en el mismo capítulo. Más adelante, se presentan definiciones de los "paralelogramos especiales": rectángulo, cuadrado y rombo y actividades que conducen a la reflexión sobre alguna de sus propiedades. No se presentan definiciones, ni actividades que conduzcan a ellas, de otro tipo de cuadriláteros ni otro tipo de polígonos, ni de polígono en general.

En el libro Matemática 3 del grupo Botadá (Borbonet, Burgos, Martínez y Ravaioli, 2004) no se trabaja en forma explícita con polígonos. Aparece el contenido triángulos pero vinculado a la Trigonometría, por un lado, y al teorema de Pitágoras, por el otro.

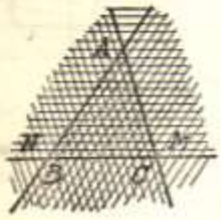
De la exploración realizada para los libros de ciclo básico concluimos que, o bien no se explicitan definiciones de polígonos, o, en caso de que sí se haga, se opta por definir triángulo como intersección de tres semiplanos (considerando contorno e interior como parte del triángulo). En el caso de los cuadriláteros, sólo se definen los convexos, considerando también contorno e interior, y en lo que hace a su tratamiento en problemas, se prioriza el trabajo con un tipo particular de ellos, los paralelogramos.

Libros de texto utilizados en Bachillerato y Formación Docente

Atenderemos en esta sección a aquéllos textos que son los tradicionalmente usados por los estudiantes de profesorado en Uruguay como consulta para el curso de Geoemtría, por su accesibilidad en librerías y bibliotecas. Asimismo, son los más tradicionalmente utilizados por profesores como referencia para la preparación de sus cursos en Bachillerato, en lo que hace a los contenidos relacionados con Geometría Métrica.

Uno de esos textos es *Curso de Geometría Métrica, Tomo 1* (Puig Adam, 1986, 1ª ed. 1947). En él se define triángulo como intersección de semiplanos (habiendo definido previamente a los semiplanos), con un tratamiento similar al que se propone en los libros de texto de la colección Botadá ya analizados. A continuación se define polígono convexo generalizando la definición dada de triángulo (p. 12):

11. **Definición de triángulo y de polígono convexo.**—*Dados tres puntos A, B, C no alineados, llamaremos «triángulo» a la interferencia (conjunto de puntos comunes) de los tres semiplanos limitados por las rectas AB, BC, CA y que contienen respectivamente los puntos C, A y B.* (Región triplemente rayada de la figura.)



Los segmentos BC, CA, AB se llaman *lados* del triángulo; se les puede designar por las letras minúsculas a, b y c, y los puntos A, B C se llaman *vértices*, respectivamente opuestos a aquellos lados.

Los ángulos determinados por cada dos de estos semiplanos se llama: *ángulo del triángulo*, y sus adyacentes *ángulos exteriores*. En la figura son exteriores, por ejemplo, $\sphericalangle ACM$, $\sphericalangle ABN$, ...

Más adelante, en el contexto del enunciado del teorema de Jordan para polígonos conexos, define poligonal: “Dados varios segmentos KL, LM, MN, …, ST, de tal modo ordenados que cada uno de los intermedios tiene un extremo común con el anterior y otro con el siguiente (sin estar alineado con ellos), el conjunto de todos ellos se llama *línea quebrada o poligonal*”. (p. 14). Distingue entre poligonales abiertas y cerradas, cuando el último punto del último segmento coincide con el primero del primer segmento (las que darían lugar a la consideración de los polígonos). Distingue a su vez las poligonales simples, que son “las que no tienen más puntos comunes entre sí que los mencionados” (p. 14).

En p. 18 habla de nuevo de la poligonal para decir que siempre tiene dos sentidos. Pero si bien comienza hablando en forma general, en seguida se centra en las poligonales cerradas y convexas.

En p. 20 y en letra muy pequeña, sobre el final del Capítulo 1° habla de sentido en las poligonales cerradas no convexas pero simples. Y generaliza el teorema de Jordan para los polígonos simples (demuestra que dichas poligonales determinan dos regiones conexas en el plano, disjuntas, y entonces polígono simple es la unión de la poligonal simple con los puntos interiores, pertenecientes a una de esas regiones). No aparecen menciones sobre polígonos cruzados, más que el hecho de que existen las poligonales cerradas no simples.

Por su parte, en *Geometría métrica. Plano y espacio* (Fernández Val, 2000) se mencionan por primera vez a los triángulos y cuadriláteros en el Capítulo 0, dedicado a una revisión de propiedades sobre figuras planas. Una sección de ese capítulo es dedicada a los triángulos pero no se los define sino que sólo se presenta una clasificación según lados y ángulos y se presentan los puntos y rectas notables. Otra sección del mismo capítulo, dedicada a cuadriláteros, se dedica al repaso de definición y propiedades de algunos cuadriláteros particulares: paralelogramo, rectángulo, rombo y cuadrado.

En el capítulo 1, define triángulo y polígono convexo al igual que en Puig Adam. No hace mención de ningún tipo a polígonos no convexos, cruzados o no.

En otro libro también utilizado en estos cursos, *Geometría. Un curso de geometría métrica para segundo ciclo* (Belcredi, Rodríguez y Zambra, 1997), explicitan propiedades de los triángulos, como los criterios de congruencia, sin detenerse previamente en una definición o una actividad que conduzca a ella. Igualmente, se tratan los cuadriláteros particulares (paralelogramos, rectángulo, rombo y cuadrado) sin una definición previa.

En suma: observamos que en los libros utilizados en Bachillerato y Formación Docente, se prioriza el trabajo con polígonos convexos, dejando de lado la consideración de los no convexos, ya sean simples o no. Aparece la definición de triángulo como intersección de semiplanos y una definición de polígono convexo que puede verse como una generalización de la misma. Desde esta perspectiva, es natural que no se consideren polígonos diferentes a los convexos ya que su definición implicaría una ruptura con la definición que se da para triángulo (la definición de polígono como intersección de semiplanos solo "funciona" para polígonos convexos).

<u>Otros libros de texto</u>

Revisando otros libros de texto, encontramos que

> Un polígono es la unión de segmentos que se juntan sólo en sus extremos, de tal manera que: (1) como máximo, dos segmentos se encuentran en un punto, y (2) cada segmento toca exactamente a otros dos. Los polígonos reciben un nombre particular de acuerdo con el número de lados que tengan. Por ejemplo: triángulo, 3 lados; cuadrilátero, 4 lados…
> Una diagonal de un polígono es un segmento que toca dos vértices no consecutivos cualesquiera del polígono.
> Un polígono es convexo si todas sus diagonales están en el interior del polígono.
> (Clemens, O'Daffer y Cooney, 1989, p. 32)

En otro,

> El triángulo ABC = AB ∪ BC ∪ AC, donde A, B y C son puntos no todos colineales. Se escribe ΔABC. Los segmentos AB, BC, CA son los lados de ΔABC.
> ¡Precaución! Un planteamiento informal de la definición precedente es: Un triángulo consta de tres puntos, no todos sobre la misma recta, junto con los tres segmentos de recta cuyos puntos extremos son pares de estos puntos.
> (Geltner y Petersen, 1998, p. 15)

Esta definición aparece después de algunos postulados y definiciones de segmento de recta, segmentos de recta congruentes, rayo, ángulo, ángulo llano, interior y exterior de un ángulo. A continuación de la definición de triángulo se define interior y exterior de un triángulo.

> Un polígono es la unión de *n* segmentos consecutivos en un plano, que se cortan en y sólo en sus puntos extremos, de modo que exactamente dos segmentos contienen cada punto extremo y ninguna pareja de segmentos consecutivos está en la misma recta. Cada segmento es un lado y cada punto extremo es un vértice del polígono.
> Un polígono es convexo si para todas las parejas de puntos A y B en lados distintos del mismo se cumple que todos los puntos entre A y B están contenidos en el interior del polígono.
> (Geltner y Petersen, 1998, p. 90)

Observamos que también en estos libros, ajenos a nuestro sistema escolar pero usados como textos en Bachillerato o en el primer año universitario, en otros países, se considera únicamente como polígonos a los que son simples, dejando de lado a los que comúnmente denominamos “cruzados” o no simples.

A modo de cierre

Mediante el presente taller esperamos i) conocer las concepciones acerca de triángulo, cuadrilátero y polígono de los profesores asistentes; ii) poner en discusión el hecho de que las definiciones matemáticas son arbitrarias, es decir que no hay ‘una’ definición correcta sino que las posibilidades son diversas (como lo confirman los textos e Internet) y que es decisión del docente cuál adoptar en sus cursos; iii) promover el análisis de la información superabundante a la cual tenemos acceso vía Internet (en este caso sobre las definiciones que nos ocupan); iv) considerar que el trabajo en Geometría Dinámica plantea algunos desafíos que no estaban presentes en el trabajo con lápiz y papel (mediante arrastre se pasa de un cuadrilátero convexo a uno no convexo o a uno cruzado en forma continua); v) proponer para la formación inicial de profesores involucrar a los estudiantes en actividades que impliquen acordar una definición como tarea alternativa a presentar una definición acabada, es decir, que aprendan a definir antes que aprender definiciones.

Referencias bibliográficas

Belcredi, L y Zambra, M. (1997). *Matemática 2°*. Montevideo: La Flor del Itapebí.

Belcredi, L y Zambra, M. (1998). *Matemática 1°*. Montevideo: La Flor del Itapebí.

Belcredi, L.; Rodríguez, M. y Zambra, M (1997). *Geometría. Un curso de geometría métrica para segundo ciclo*. Montevideo: Ediciones de la Plaza.

Borbonet, Burgos, B.; Martínez, A.; y Ravaioli, N. (2004). *Matemática 3*. Montevideo: Fin de Siglo.

Borbonet, Burgos, B.; Martínez, A.; y Ravaioli, N. (1997). *Matemática 1*. Montevideo: Fin de Siglo

Borbonet, Burgos, B.; Martínez, A.; y Ravaioli, N. (2007). *Matemática 2*. Montevideo: Fin de Siglo

Clemens, S.; O’Daffer, P. y Cooney, T. (1989). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. USA: Addison-Wesley Iberoamericana.

Dalcín y Molfino (2013). *Geometría Euclidiana en la formación de profesores. Exploración inicial del plano*. Montevideo: Ediciones Palíndromo.

Geltner, P. y Petersen, D. (1998). *Geometría*. México: International Thomson Editores.

Molfino, V. y Buendía, G. (2011a). Análisis del Discurso como Acción Social: su rol en la construcción y difusión de conocimiento matemático. En G. Buendía (coord.) *Reflexión e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 117 – 150). México: Lectorum.

Molfino, V. y Buendía, G. (2011b). Análisis del discurso como acción social con relación al concepto de límite: un estudio de libros de texto. *Premisa 13, 51*, 3-15.